УДК 519

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ОТ БЫСТРООСЦИЛИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

[1,2*] ***Шадиметов Х.М.***, [1,3] ***Элмуратов Г.Ч.***
kholmatshadimetov@mail.ru
[1]Ташкентский государственный университет транспорта,
100167, Узбекистан, Ташкент, ул. Одилходжаева, 1;
[2]Институт математики имени В.И. Романовского Академии наук Узбекистана,
100174, Узбекистан, Ташкент, ул. Университетская, 9;
[3]Алмалыкский государственный технический институт,
110100, Узбекистан, г. Алмалык, ул. М. Улугбек д. 45.

Интегралы быстро осциллирующих функций появляются в основном в теории специальных функций и анализе Фурье, но также и в других прикладных и вычислительных науках и технике, например, в теоретической физике, акустическом рассеянии, квантовой химии, теории процессов переноса, электромагнетизме, телекоммуникациях, механике и т.д. Вычисление интеграла от быстро осциллирующих функций часто выполняется методом Файлона. Метод Файлона напоминает квадратурную формулу Симпсона. Однако в то время, как в методе Симпсона вся подинтегральная функция заменяется параболой, в методе Файлона параболой заменяется только функция $f(x)$. Таким путём Файлон получил квадратурую формулу с коэффициентами, зависящими от ω. В данной работе будут построены оптимальные квадратурные формулы в пространстве Соболева комплекснозначных периодических функций для приближенного вычисления быстроосцилирующих интегралов.

Ключевые слова: комплекснозначные функции, функционал погрешности, оптимальные квадратурные формулы, дискретных аналогов дифференциальных операторов.

Цитирование: *Шадиметов Х.М., Элмуратов Г.Ч.* Оптимизация приближенного вычисления интегралов от быстроосцилирующих функций в пространстве Соболева комплекснозначных функций // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2025. – № 6(70). – С. 132-142.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.6_70.2025.11

1 Введение

При решении таких классов задач, как статистическая обработка экспериментальных данных, цифровая фильтрация, распознавание образов, моделирование оптических систем и синтезированных голограмм, краевые задачи для уравнений частных производных и другие, возникает необходимость в вычислении интегралов вида [1]

$$I_0(\omega) = \int_0^1 f(x)\, e^{2\pi i\omega x} dx, \tag{1}$$

$$I_1(\omega) = \int_0^1 f(x) \sin \omega x dx, \tag{2}$$

$$I_2(\omega) = \int_0^1 f(x)\cos\omega x dx. \qquad (3)$$

Здесь $f(x) \in F$ (F – некоторый заданный класс функций), ω – произвольное вещественное число, информация о $f(x)$ задана не более чем в N точках.

Хорошо известно, что численный счет таких интегралов наталкивается на определение трудности при больших значениях ω из-за того, что подинтегральная функция сильно осцилирует.

Вычисление интеграла (1) при $\omega \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ – множество целых чисел) часто выполняется методом Файлона [2]. Метод Файлона напоминает квадратурную формулу Симпсона. Однако в то время, как в методе Симпсона вся подинтегральная функция заменяется параболой, в методе Файлона параболой заменяется только функция $f(x)$. Таким путём Файлон получил квадратурую формулу с коэффициентами, зависящими от ω.

Для приближенного вычисления интегралов (1)-(3) в работе [3] Н.П. Еругиным и С.Л. Соболеваым предложен метод, который также сохраняет равномерную точность относительно ω. В работе [4] В.И.Крылов развивал метод Файлона. В [5] при построении квадратурной формулы для вычисления коэффициентов Фурье была использована сплайн интерполяции и многочлены Лагранжа.

Работы [6, 7] посвящены нахождению оптимальных оценок и построению оптимальных по точности квадратурных формул вычисления преобразования Фурье финитных функций вида (2) и (3) в предположении, что $f(x)$ принадлежит в интерполяционный класс функций, удовлетворяющих условию Липщица. В работах [8, 9] с помощью функциональных методов построены оптимальные квадратурные формулы в пространствах Гильберта.

В настоящей работе мы будем построить оптимальные квадратурные формулы для приближенного вычисления интеграла (1) в пространстве $\tilde{H}_2^{(m)}(0,1)$.

2 Постановка задачи

Пусть $H_2^{(m)}(0,1)$ – пространство Соболева 1 – периодических комплекснозначных функций $\varphi(x)$, $-\infty < x < \infty$, отличающихся более, чем на константу, m – е производные которых (в обобщенном смысле) квадратично интегрируемы со скалярным произведением

$$(f,\varphi) = \int_0^1 \frac{d^m f}{dx^m}\overline{\frac{d^m\varphi}{dx^m}}dx \qquad (4)$$

и нормой

$$\left\|\varphi\left|\tilde{H}_2^{(m)}\right.\right\| = \left(\int_0^1 \varphi^{(m)}(x)\overline{\varphi^{(m)}(x)}dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь обозначение $\overline{\varphi(x)}$ сопряженное к $\varphi(x)$. Для $\varphi(x) \in \tilde{H}_2^{(m)}(0,1)$ рассмотрим следующую квадратурную формулу

$$\int_0^1 \exp(2\pi i\omega x)\varphi(x)\,dx \cong \sum_{k=1}^N C_k\varphi(x_k), \qquad (5)$$

где C_k и x_k соответственно коэффициенты и узлы квадратурной формулы, $N = 2, 3, ...,$ $\omega \in R$(R – множество действительных чисел). Погрешность квадратурной формулы (5) определяется равенством

$$\begin{aligned}(l,\varphi) &= \int\limits_0^1 \exp\left(2\pi i\omega x\right)\varphi(x)\,dx - \sum_{k=1}^{N} C_k\,\varphi(x_k) = \\ &= \int\limits_0^1 \left(\exp\left(2\pi i\omega x\right) - \sum_{k=1}^{N} C_k\,\delta(x-x_k)*\varphi_0(x)\right)\varphi(x)\,dx.\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $\delta\left(x\right)$ – дельта функция Дирака,
$l\left(x\right) = \varepsilon_{[0,1]}\left(x\right)\exp\left(2\pi i\omega x\right) - \sum\limits_{k=1}^{N} C_k\delta\left(x-x_k\right)*\varphi_0\left(x\right)$ функционал погрешности квадратурной формулы (5), $\varphi_0\left(x\right) = \sum\limits_{\beta=-\infty}^{\infty}\delta\left(x-\beta\right)$. Наша задача о построении оптимальной квадратурной формулы для приближенного вычисления интеграла $I_0\left(\varphi\right) = \int\limits_0^1 \exp\left(2\pi i\omega x\right)\varphi\left(x\right)dx$ при фиксированном x_k заключается в следующем.

Требуется найти величину

$$\inf_{C_k}\left(\sup_{\varphi\in\tilde{H}_2^{(m)}}\frac{|(l,\varphi)|}{\left\|\varphi\left|\tilde{H}_2^{(m)}\right.\right\|}\right) = \left\|\overset{o}{l}\left|\tilde{H}_2^{(m)*}\right.\right\|.$$

Это означает, что найти функцию $\psi_l\left(x\right)$ из $\tilde{H}_2^{(m)}\left(0,1\right)$ для которой достигается точная верхняя грань, далее найти коэффициенты C_k для которых достигается точная нижняя грань в (6). Это означает, что выполняется следующее равенство

$$(l,\psi_l) = \left\|l\left|\tilde{H}_2^{(m)*}\right.\right\|\left\|\psi_l\left|\tilde{H}_2^{(m)}\right.\right\|.$$

Коэффициенты C_k называется оптимальными коэффициентами а $\left\|\overset{o}{l}\left|\tilde{H}_2^{(m)*}\right.\right\|$ нормой функционала погрешности оптимальной квадратурной формулы. В следующем пункте мы приводим оптимальные квадратурные формулы при $x_k = hk,\ h = \frac{1}{N}$.

3 Основные результаты

Основные результаты в этой работе приводятся в следующих теоремах.

Теорема 1. Среди квадратурных формул вида (5) в пространстве $\tilde{H}_2^{(1)}\left(0,1\right)$ при $\omega \in R$ существует единственная оптимальная квадратурная формула коэффициенты которой определяется формулой

$$\overset{o}{C}\left[\beta\right] = h\frac{e^{2\pi i\omega}-1}{2\pi i\omega} - h\sum_{\gamma\neq 0}\left(\frac{\sin\pi h\gamma}{\pi h\gamma}\right)^2\frac{e^{2\pi i(\omega-\gamma)}-1}{2\pi i\left(\omega-\gamma\right)}e^{2\pi i\gamma h\beta},\ \ \beta = 1,2,...,N,\ h = \frac{1}{N}.$$

При $\omega \in \mathbb{Z}$ оптимальные коэффициенты $\overset{o}{C}\left[\beta\right]$ принимает следующий вид:

$$\overset{o}{C}\left[\beta\right] = h\left(\frac{\sin\pi\omega h}{\pi\omega h}\right)^2 e^{2\pi i\omega h\beta},\ \ \beta = 1,2,...,N.$$

А при $\omega = 0$, оптимальные коэффициенты принимает следующий вид:

$$\overset{o}{C}[\beta] = h, \ \ \beta = 1, 2, ..., N.$$

Теорема 2. В пространстве $\tilde{H}_2^{(2)}(0,1)$ Соболева периодических функций следующая квадратурная формула является оптимальной

$$\int_0^1 e^{2\pi i\omega x}\varphi(x)\,dx \cong \sum_{\beta=1}^{N} C_\beta\,\varphi(h\beta).$$

Здесь оптимальные коэффициенты $\overset{o}{C}[\beta]$ задается равенством

$$\overset{o}{C}[\beta] = h\frac{e^{2\pi i\omega}-1}{2\pi i\omega} - h\sum_{\gamma\neq 0}\frac{e^{2\pi i(\omega-\gamma)}-1}{2\pi i(\omega-\gamma)}\cdot 3\left(\frac{\sin\pi h\gamma}{\pi h\gamma}\right)^4\frac{e^{2\pi i h\gamma\beta}}{\cos 2\pi h\gamma+2},$$

$\omega \in R$, $\omega \overline{\in} \mathbb{Z}, \beta = 1, 2, ..., N$.

А при $\omega \in Z\backslash 0$, оптимальные коэффициенты $\overset{o}{C}[\beta]$ принимает следующий вид:

$$\overset{o}{C}[\beta] = 3h\left(\frac{\sin\pi h\gamma}{\pi h\gamma}\right)^4\frac{e^{2\pi i\omega h\beta}}{\cos 2\pi h\omega+2}, \beta = 1, 2, ..., N.$$

В случае $\omega = 0$ оптимальные коэффициенты $\overset{o}{C}[\beta]$ определяется равенством

$$\overset{o}{C}[\beta] = h, \ \ \beta = 1, 2, ..., N.$$

Теорема 3. Оптимальные коэффициенты квадратурной формулы вида (5) в пространстве $H_2^{(3)}(0,1)$ определяется формулой

$$\overset{o}{C}[\beta] = h\frac{e^{2\pi i\omega}-1}{2\pi i\omega} + 60h\sum_{\gamma\neq 0}\frac{e^{2\pi i(\omega-\gamma)}-1}{2\pi i(\omega-\gamma)}\cdot\left(\frac{\sin\pi\gamma h}{\pi\gamma h}\right)^4\cdot$$

$$\cdot\frac{e^{2\pi i h\gamma\beta}}{\cos 4\pi h\gamma + 26\cos 2\pi h\gamma + 33}, \ \omega \in R, \ \omega\overline{\in}\mathbb{Z}, \ \ \beta = 1, 2, ..., N.$$

При $\omega \in Z\backslash 0$, оптимальные коэффициенты принимают следующий вид:

$$\overset{o}{C}[\beta] = 60h\left(\frac{\sin\pi\omega h}{\pi\omega h}\right)^6\frac{e^{2\pi i\omega h\beta}}{\cos 4\pi\omega h + 26\cos 2\pi\omega h + 33}, \beta = 1, 2, ..., N.$$

А при $\omega = 0$ оптимальные коэффициенты $\overset{o}{C}[\beta]$ принимает вид:

$$\overset{o}{C}[\beta] = h, \ \ \beta = 1, 2, ..., N.$$

4 Доказательство теорем

Для доказательства теорем мы будем использовать дискретных аналогов дифференциальных операторов вида [10] $\frac{d^2}{dx^2}$, $\frac{d^4}{dx^4}$, $\frac{d^6}{dx^6}$, который определяются формулами

$$D_1[\beta] = \begin{cases} h^{-2} & |\beta| = 1, \\ -2h^{-2} & \beta = 0, \\ 0 & |\beta| \geqslant 2, \end{cases}$$

$$D_2\left[\beta\right]=\frac{6}{h^4}\begin{cases}\frac{(1-\lambda)^5\lambda^{|\beta|}}{\lambda^4+11\lambda^3+11\lambda^2+\lambda} & |\beta|\geqslant 2,\\ 1+\frac{(1-\lambda)^5}{\lambda^3+11\lambda^2+11\lambda+1} & \beta=0,\\ -8+\frac{(1-\lambda)^5}{\lambda^4+11\lambda^3+11\lambda^2+\lambda} & \beta=0,\end{cases}$$

$$D_3\left[\beta\right]=\frac{120}{h^6}\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{2}\frac{(1-\lambda_k)^7\lambda_k^{|\beta|}}{\lambda_k^6+57\lambda_k^5+302\lambda_k^4+302\lambda_k^3+57\lambda_k^2+\lambda_k} & |\beta|\geqslant 2,\\ 1+\sum\limits_{k=1}^{2}\frac{(1-\lambda_k)^7}{\lambda_k^5+57\lambda_k^4+302\lambda_k^3+302\lambda_k^2+57\lambda_k+1} & |\beta|\leqslant 1,\\ -32+\sum\limits_{k=1}^{2}\frac{(1-\lambda_k)^7}{\lambda_k^6+57\lambda_k^5+302\lambda_k^4+302\lambda_k^3+57\lambda_k^2+\lambda_k} & \beta=0.\end{cases}$$

Кроме того эти дискретные операторы удовлетворяют следующих равенств

$$\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}D_1\left[\beta\right]e^{2\pi ihp\beta}=-4h^{-2}\sin^2\left(\pi hp\right), \tag{7}$$

$$\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}D_2\left[\beta\right]e^{2\pi ihp\beta}=\frac{96h^{-4}\sin^4\left(\pi hp\right)}{2\cos\left(2\pi hp\right)+4}=\frac{48h^{-4}\sin^4\left(\pi hp\right)}{\cos\left(2\pi hp\right)+2}, \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}D_3[\beta]\,e^{2\pi ihp\beta}&=-\frac{-2^6\,5!\,h^{-6}\,\sin^6(\pi hp)}{2\cos(4\pi hp)+52\cos(\pi hp)+66}=\\&=-\frac{2^5\,5!\,h^{-6}\,\sin^6(\pi hp)}{\cos(4\pi hp)+26\cos(\pi hp)+33}.\end{aligned} \tag{9}$$

Доказательство теоремы 1. Для этого пользуемся формулой из работы [11]

$$\overset{o}{C}\left[\beta\right]=h\left[\int\limits_0^1 e^{2\pi i\omega x}dx+\int\limits_0^1 e^{2\pi i\omega x}D_1\left[\beta\right]*B_2\left(x-h\beta\right)dx\right]. \tag{10}$$

$$B_2\left(x-h\beta\right)=\sum_{\gamma\neq 0}\frac{e^{-2\pi i\gamma(x-h\beta)}}{\left(2\pi i\gamma\right)^2}. \tag{11}$$

Теперь вычислим интеграл

$$J_1\left(\varphi\right)=\int\limits_0^1 e^{2\pi i\omega x}dx=\frac{e^{2\pi i\omega}-1}{2\pi i\omega}. \tag{12}$$

Не трудно заметить, что при $\omega\in Z\backslash 0$, $Z-$ множество целых чисел $J_1\left(\omega\right)=0$. А при ω стремящиеся к нулю $J_1\left(\omega\right)$ стремится к единице. Действительно

$$\lim_{\omega\to 0}J_1\left(\omega\right)=\lim_{\omega\to 0}\frac{e^{2\pi i\omega}-1}{2\pi i\omega}=\lim_{\omega\to 0}\frac{2\pi ie^{2\pi i\omega}}{2\pi i}=1.$$

Рассмотрим следующий интеграл в равенстве (4.7)

$$J_2\left(\omega\right)=\int\limits_0^1 e^{2\pi i\omega x}D_1\left[\beta\right]*B_2\left(x-h\beta\right)dx=D_1\left[\beta\right]*\int\limits_0^1 e^{2\pi i\omega x}B_2\left(x-h\beta\right)dx.$$

Отсюда в силу (11) имеем

$$J_2(\omega) = D_1[\beta] * \sum_{\gamma\neq 0} \frac{\int\limits_0^1 e^{2\pi i\omega x} e^{-2\pi i\gamma(x-h\beta)}\,dx}{(2\pi i\gamma)^2} = \\ = D_2[\beta] * \sum_{\gamma\neq 0} \frac{e^{2\pi i\gamma h\beta}}{(2\pi i\gamma)^2} \int\limits_0^1 e^{2\pi i(\omega-\gamma)x}\,dx. \tag{13}$$

Обозначим через

$$J_3(\omega,\gamma) = \int\limits_0^1 e^{2\pi i(\omega-\gamma)x}dx = \frac{e^{2\pi i(\omega-\gamma)} - 1}{2\pi i(\omega-\gamma)}. \tag{14}$$

Интеграл $J_3(\omega,\gamma)$ при γ стремящиеся к ω стремиться к единице, т.е.

$$\lim_{\gamma\to\omega} \frac{e^{2\pi i(\omega-\gamma)} - 1}{2\pi i(\omega-\gamma)} = 1.$$

Теперь пользуясь определением сверки двух функций дискретного аргумента, т.е.

$$f[\beta] * g[\beta] = \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} f[\beta-\gamma] g[\gamma].$$

Имеем

$$D_1[\beta] * e^{2\pi i\gamma h\beta} = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} D_2[\alpha] e^{2\pi i\gamma h(\beta-\alpha)} = e^{2\pi i\gamma h\beta} \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} D_2[\alpha] e^{-2\pi i\gamma h\alpha}.$$

Отсюда пользуясь равенством (7) и учитывая, что $D_1[\beta] = D_2[-\beta]$ получим

$$D_1[\beta] * e^{2\pi i\gamma h\beta} = -4e^{2\pi i\gamma h\beta} h^{-2} \sin^2(\pi h\gamma). \tag{15}$$

В силу (14), (15) равенство (13) приводим к виду

$$J_2(\omega) = -4\sum_{\gamma\neq 0} \frac{e^{2\pi i\gamma h\beta} h^{-2}\sin^2(\pi h\gamma)}{(2\pi i\gamma)^2} \cdot \frac{e^{2\pi i(\omega-\gamma)} - 1}{2\pi i(\omega-\gamma)} = \\ = \sum_{\gamma\neq 0} \left(\frac{\sin(\pi h\gamma)}{\pi h\gamma}\right)^2 \cdot \frac{e^{2\pi i(\omega-\gamma)} - 1}{2\pi i(\omega-\gamma)}.$$

Учитывая (11), (15) равенство (9) приводим

$$\overset{o}{C}[\beta] = h\frac{e^{2\pi i\omega} - 1}{2\pi i\omega} + h\sum_{\gamma\neq 0} \left(\frac{\sin(\pi h\gamma)}{\pi h\gamma}\right)^2 \cdot \frac{e^{2\pi i(\omega-\gamma)} - 1}{2\pi i(\omega-\gamma)}. \tag{16}$$

Так, как

$$\gamma \in Z\backslash 0,$$

тогда

$$e^{2\pi i(\omega-\gamma)}-1=e^{2\pi i\omega}-1.$$

Тогда (16) примет вид

$$\overset{o}{C}\,[\beta]=h\frac{e^{2\pi i\omega}-1}{2\pi i\omega}\left(\frac{1}{\omega}+\sum_{\gamma\neq 0}\frac{1}{\omega-\gamma}\left(\frac{\sin(\pi h\gamma)}{\pi h\gamma}\right)^2\right).$$

Отсюда при $\omega\to 0$ следует, что $\overset{o}{C}\,[\beta]=h$. И при $\omega\to\gamma$, где $\gamma\in Z\backslash 0$

$$\overset{o}{C}\,[\beta]=h\left(\frac{\sin(\pi\omega h)}{\pi\omega h}\right)^2 e^{2\pi i\omega h\beta}.$$

Теорема 1 доказано полностью. Переходим к доказательству теорем 2. В этом случая оптимальные коэффициенты определяется формулой

$$\overset{o}{C}\,[\beta]=h\left[\int_0^1 e^{2\pi i\omega x}dx+D_2[\beta]*\int_0^1 e^{2\pi i\omega x}B_4(x-h\beta)\,dx\right], \tag{17}$$

где

$$B_4(x)=\sum_{\lambda\neq 0}\frac{e^{-2\pi i\gamma(x-h\beta)}}{(2\pi i\gamma)^4}. \tag{18}$$

В силу (12) и (18) равенство (17) принимает следующий вид

$$\mathring{C}[\beta]=h\left[\frac{e^{2\pi i\omega}-1}{2\pi i\omega}+D_2[\beta]*\sum_{\gamma\neq 0}\frac{\int_0^1 e^{2\pi i\omega x}e^{-2\pi i\gamma(x-h\beta)}\,dx}{(2\pi i\gamma)^2}\right]=$$

$$=h\left[\frac{e^{2\pi i\omega}-1}{2\pi i\omega}+\sum_{\gamma\neq 0}D_2[\beta]*\frac{e^{2\pi i\gamma h\beta}}{(2\pi i\gamma)^4}\int_0^1 e^{2\pi i(\omega-\gamma)x}\,dx\right].$$

Отсюда учитывая (14) имеем

$$\begin{aligned}\mathring{C}[\beta]&=h\left[\frac{e^{2\pi i\omega}-1}{2\pi i\omega}+\sum_{\gamma\neq 0}D_2[\beta]*\frac{e^{2\pi i\gamma h\beta}}{(2\pi i\gamma)^4}\cdot\frac{e^{2\pi i(\omega-\gamma)}-1}{2\pi i(\omega-\gamma)}\right]=\\&=h\left[\frac{e^{2\pi i\omega}-1}{2\pi i\omega}+\sum_{\gamma\neq 0}\frac{\left(e^{2\pi i(\omega-\gamma)}-1\right)D_2[\beta]*e^{2\pi i\gamma h\beta}}{2\pi i(\omega-\gamma)\,(2\pi i\gamma)^4}\right].\end{aligned} \tag{19}$$

Пользуясь формулой (8) и учитывая, что $D_1[\beta]=D_2[-\beta]$, вычислим свертку

$$D_2[\beta]*e^{2\pi i\gamma h\beta}=\sum_{\alpha=-\infty}^{\infty}D_2[\alpha]\,e^{2\pi i\gamma h(\beta-\alpha)}=e^{2\pi i\gamma h\beta}\sum_{\alpha=-\infty}^{\infty}e^{-2\pi i\gamma h\alpha}=$$

$$=e^{2\pi i\gamma h\beta}\cdot\frac{48h^{-4}\sin^4(\pi h\gamma)}{\cos 2\pi h\gamma+2}.$$

Учитывая полученное равенство (19) перепишем

$$\overset{o}{C}[\beta] = h\left[\frac{e^{2\pi i\omega}-1}{2\pi i\omega} + \sum_{\gamma\neq 0}\frac{e^{2\pi i\gamma h\beta}48h^{-4}\sin^4(\pi h\gamma)}{(2\pi i\gamma)^4 4(\cos 2\pi h\gamma+2)}\cdot\frac{e^{2\pi i(\omega-\gamma)}-1}{2\pi i(\omega-\gamma)}\right] =$$
$$= h\left[\frac{e^{2\pi i\omega}-1}{2\pi i\omega} + 3\sum_{\gamma\neq 0}\left(\frac{\sin(\pi h\gamma)}{\pi h\gamma}\right)^4\frac{\left(e^{2\pi i(\omega-\gamma)}-1\right)}{2\pi i(\omega-\gamma)}\frac{e^{2\pi i\gamma h\beta}}{\cos 2\pi h\gamma+2}\right].$$

Учитывая, что $e^{2\pi i(\omega-\gamma)}-1 = e^{-2\pi i\gamma}e^{2\pi i\omega}-1 = e^{2\pi i\omega}-1$. Тогда

$$\overset{o}{C}[\beta] = h\frac{e^{2\pi i\omega}-1}{2\pi i}\left(\frac{1}{\omega} + 3\sum_{\gamma\neq 0}\left(\frac{\sin(\pi h\gamma)}{\pi h\gamma}\right)^4\frac{e^{2\pi i\gamma h\beta}}{(\omega-\gamma)(\cos 2\pi h\gamma+2)}\right).$$

Отсюда при $\omega \in Z\backslash 0$, имеем

$$\overset{o}{C}[\beta] = 3h\left(\frac{\sin(\pi\omega h)}{\pi\omega h}\right)^4\frac{e^{2\pi i\omega h\beta}}{(\cos 2\pi\omega h+2)}.$$

А при $\omega = 0$ следует, что

$$\overset{o}{C}[\beta] = h.$$

Теорема 2 доказано полностью.

Доказательство теоремы 3. В этом случае имеем

$$\overset{o}{C}[\beta] = h\left[\int_0^1 e^{2\pi i\omega x}dx + D_3[\beta] * \int_0^1 e^{2\pi i\omega x}B_6(x-h\beta)\,dx\right]. \tag{20}$$

Здесь

$$B_6(x) = \sum_{\lambda\neq 0}\frac{e^{-2\pi i\gamma(x-h\beta)}}{(2\pi i\gamma)^6}. \tag{21}$$

Теперь подставляя (21) в выражении (20) получим

$$\overset{o}{C}[\beta] = h\left[\int_0^1 e^{2\pi i\omega x}dx + D_3[\beta] * \int_0^1 e^{2\pi i\omega x}\sum_{\lambda\neq 0}\frac{e^{-2\pi i\gamma(x-h\beta)}}{(2\pi i\gamma)^6}dx\right] =$$
$$= h\left[\int_0^1 e^{2\pi i\omega x}dx + \sum_{\lambda\neq 0}\frac{D_3[\beta] * e^{2\pi i\gamma h\beta}}{(2\pi i\gamma)^6}\int_0^1 e^{2\pi i\omega x}e^{-2\pi i\gamma x}dx\right] =$$
$$= h\left[\int_0^1 e^{2\pi i\omega x}dx + \sum_{\lambda\neq 0}\frac{D_3[\beta] * e^{2\pi i\gamma h\beta}}{(2\pi i\gamma)^6}\int_0^1 e^{2\pi i(\omega-\gamma)x}dx\right].$$

Отсюда вычисляя интегралы имеем

$$\overset{o}{C}[\beta]=h\left[\frac{e^{2\pi i\omega}-1}{2\pi i\omega}+\sum_{\gamma\neq 0}\frac{e^{2\pi i(\omega-\gamma)}-1}{2\pi i(\omega-\gamma)}\cdot\frac{D_3[\beta]*e^{2\pi i\gamma h\beta}}{(2\pi i\gamma)^6}\right]. \tag{22}$$

Теперь вычисляя свертку функций

$$D_3[\beta], \qquad e^{2\pi i\gamma h\beta}.$$

По определению свертки функций дискретного аргумента следует, что

$$D_3[\beta]*e^{2\pi i\gamma h\beta}=\sum_{\alpha=-\infty}^{\infty}D_3[\alpha]e^{-2\pi i\gamma h(\beta-\alpha)}=e^{2\pi i\gamma h\beta}\sum_{\alpha=-\infty}^{\infty}D_3[\alpha]e^{-2\pi i\gamma h\alpha}.$$

Отсюда в силу (4.6) получим

$$D_3[\beta]*e^{2\pi i\gamma h\beta}=\frac{-2^6 5!h^{-6}\sin^6(\pi h\gamma)\,e^{2\pi i\gamma h\beta}}{2\cos 4\pi h\gamma+52\cos 2\pi h\gamma+66}. \tag{23}$$

Теперь подставляя в (22) в место $D_3[\beta]*e^{2\pi i\gamma h\beta}$ найденные формулой (23) имеем

$$\overset{o}{C}[\beta]=h\left[\frac{e^{2\pi i\omega}-1}{2\pi i\omega}+\sum_{\gamma\neq 0}\frac{e^{2\pi i(\omega-\gamma)}-1}{2\pi i(\omega-\gamma)(2\pi i\gamma)^6}\cdot\frac{-2^6 5!h^{-6}\sin^6(\pi h\gamma)\,e^{2\pi i\gamma h\beta}}{2\cos 4\pi h\gamma+52\cos 2\pi h\gamma+66}\right]=$$

$$=h\left[\frac{e^{2\pi i\omega}-1}{2\pi i\omega}+\sum_{\gamma\neq 0}\frac{e^{2\pi i(\omega-\gamma)}-1}{2\pi i(\omega-\gamma)(2\pi i\gamma)^6}\cdot\left(\frac{\sin(\pi h\gamma)}{\pi h\gamma}\right)^6\cdot\frac{60e^{2\pi i\gamma h\beta}}{\cos 4\pi h\gamma+26\cos 2\pi h\gamma+33}\right].$$

Отсюда при $\omega\in Z\backslash 0$ имеем

$$\overset{o}{C}[\beta]=60h\left(\frac{\sin(\pi h\gamma)}{\pi h\gamma}\right)^6\frac{e^{2\pi i\omega h\beta}}{\cos 4\pi h\gamma+26\cos 2\pi h\gamma+33},\quad \beta=1,2,...,N.$$

А при $\omega=0$ следует, что

$$\overset{o}{C}[\beta]=h,\qquad \beta=1,2,...,N.$$

И так мы доказали теорему 3 полностью

5 Заключение

В данной работе с помощью вариационных методов построены оптимальные квадратурные формулы в пространствах Соболева комплекснозначных периодических функций для приближенного вычисления быстроосцилирующих интегралов. В периодических пространствах комплекснозначных функций где скалярное произведение и норма функций определяются с помощью производных порядка m, при $m=1$, $m==2$, $m=3$. В пространствах $\tilde{H}_2^{(1)}(0,1)$, $\tilde{H}_2^{(2)}(0,1)$ и $\tilde{H}_2^{(3)}(0,1)$ найдены аналитический вид оптимальных коэффициентов построенных квадратурных формул.

Литература

[1] *Бахвалов Н.С.* Оптимальность линейных методов приближения операторов на выпуклых классах функций // ЖВМ и МФ. – 1971. – № 4. – С. 1014-1018.

[2] *Filon L.N.G.* On a quadrature formula for trigonometric integrals // Proc. Roy. Soc. Edinb. – 1928. – Vol. 49. – P. 38-47.

[3] *Еручин Н.П., Соболев С.Л.* Приближенное интегрирование некоторых колеблющихся функций // Прикладная математика и механика. – 1950. – №2. – С. 193-196.

[4] *Крылов В.И.* Приближенное вычисление интегралов от функций, содержащих быстро колеблющиеся множители // Докл. АН СССР. – 1956. – №6. – С. 1014-1017.

[5] *Бахвалов Н.С.* Численные методы. Ч. 1. – М.: Наука, 1973.

[6] *Задирака В.К.* Теория вычисления преобразования Фурье. – Киев: Наук. думка, 1983. – 112 с.

[7] *Задирака В.К.* Цифровая обработка сигнала. – Киев: Наук. думка, 1993. – 204 с.

[8] *Shadimetov Kh.M., Adilkhodjaev A.I., Gulomov O.Kh.* Optimal quadrature formulas for approximate calculation of rapidly oscillating integrals // Results in Applied Mathematics. – 2025. – Art. 100627. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.rinam.2025.100627.

[9] *Shadimetov Kh.M., Davlatova F.I., Mamatova N.H.* Optimal quadrature formulas with derivative for calculating integrals of strongly oscillating functions // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2024. – Vol. 45, Issue 10. – P. 5254-5263.

[10] *Auersch L.* The effect of critically moving loads on the vibrations of soft soils and isolated railway tracks // Journal of Sound and Vibration. – 2008. – №3. – P. 587-607.

[11] *Савченко А.В., Иоскевич А.В., Хазиева Л.Ф., Нестеров А.А., Иоскевич В.В.* Продольно-поперечный изгиб балки: решение в различных программных комплексах // Строительство уникальных зданий и сооружений. – 2015. – №11(38). – С. 89-105.

[12] *Демченко Д.Б., Маяцкий И.А.* Численная реализация задачи об изгибе балки-полосы на упругом основании методом конечных разностей // Молодой исследователь Дона. – 2017. – №2(5). – С. 81-94.

[13] *Калашников А.Л.* Методы приближенного решения интегральных уравнений второго рода: учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 2017. – 51 с.

[14] *Shadimetov Kh.M., Usmanov Kh.I.* Weighted optimal quadrature formulas in Sobolev space and their applications // Algorithms. – 2025. – Vol. 18. – Art. 374.

[15] *Azamov S.S., Qobilov H.M.* Optimal quadrature formulas in the space of periodic functions // International Scientific Journal of Computing Technologies and Mathematical Modeling. – 2024. – №2(3). – P. 3-10.

[16] *Qobilov H.M.* Estimating the norm of the error functional in Sobolev's space of periodic functions // O'zMU Xabarlari. – 2025. – №5. – P. 68-73.

[17] *Hayotov A.R., Karimov R.S.* Optimal difference formula in the Hilbert space $W_2^{(2,1)}(0,1)$ // Problems of Computational and Applied Mathematics. – 2021. – №5(35). – P. 129-136.

[18] *Shadimetov Kh.M., Mirzakabilov R.N.* On a construction method of optimal difference formulas // AIP Conference Proceedings. – 2021. – Vol. 2365. – Art. 020032.

[19] *Hayotov A.R., Bozarov B.I.* Optimal quadrature formula with cosine weight function // Problems of Computational and Applied Mathematics. – 2021. – №4(34). – P. 106-118.

[20] *Akhmedov D.M., Atamuradova B.M.* Construction of optimal quadrature formulas for Cauchy type singular integrals in the $W_2^{(1,0)}(0,1)$ space // Uzbek Mathematical Journal. – 2022. – Vol. 66, Issue 2. – P. 5-9.

UDC 519

OPTIMIZATION OF APPROXIMATE COMPUTATION OF INTEGRALS OF RAPIDLY OSCILLATING FUNCTIONS IN THE SOBOLEV SPACE OF COMPLEX-VALUED FUNCTIONS

[1,2]***Shadimetov Kh.M.***, [2]***Elmuratov G.Ch.***
kholmatshadimetov@mail.ru
[1]Tashkent State Transport University,
1, Temiryolchilar street, Tashkent, 100167 Uzbekistan;
[2]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics,
9, University street, Tashkent, 100174 Uzbekistan;
[3]Almalyk State Technical Institute,
45, M. Ulugbek Street, Almalyk, 110100 Uzbekistan.

Integrals of rapidly oscillating functions arise mainly in the theory of special functions and Fourier analysis, but also in other applied and computational sciences and engineering, for example, in theoretical physics, acoustic scattering, quantum chemistry, transport theory, electromagnetism, telecommunications, mechanics, and so on.The computation of integrals of rapidly oscillating functions is often carried out using the Filon method. The Filon method resembles Simpson's quadrature formula. However, whereas in Simpson's method the entire integrand is approximated by a parabola, in the Filon method only the function $f(x)$ is approximated by a parabola. In this way, Filon derived a quadrature formula with coefficients that depend on ω. In this work, optimal quadrature formulas in the Sobolev space of complex-valued periodic functions will be constructed for the approximate computation of rapidly oscillating integrals.

Keywords: complex-valued functions, error functional, optimal quadrature formulas, discrete analogues of differential operators.

Citation: Shadimetov Kh.M., Elmuratov G.Ch. 2025. Optimization of approximate computation of integrals of rapidly oscillating functions in the Sobolev space of complex-valued functions. *Problems of Computational and Applied Mathematics.* 6(70): 132-142.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.6_70.2025.11

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 6(70) 2025

Журнал основан в 2015 году.
Издается 6 раз в год.

Учредитель:
Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта.

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при Администрации Президента Республики Узбекистан.
Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Адрес редакции:
100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.
Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.
Э-почта: `journals@airi.uz`.
Веб-сайт: `https://journals.airi.uz`.

Дизайн и вёрстка:
Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.
Подписано в печать 25.12.2025 г.
Формат 60x84 1/8. Заказ №8. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 6(70) 2025

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:
Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.
The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Address:
100125, Tashkent, Buz-2, 17A.
Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.
E-mail: journals@airi.uz.
Web-site: https://journals.airi.uz.

Layout design:
Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.
Signed for print 25.12.2025
Format 60x84 1/8. Order No. 8. Print run of 100 copies.

Содержание

Contents

№ 6(70) 2025

ISSN 2181-8460

HISOBLASH VA AMALIY MATEMATIKA MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

RAQAMLI TEXNOLOGIYALAR VA
SUN'IY INTELLEKTNI RIVOJLANTIRISH
ILMIY-TADQIQOT INSTITUTI