

УДК 532.546

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКОРАДИАЛЬНОЙ ГРАНИЧНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ РЕЛАКСАЦИОННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

*Холияров Э.Ч., *Тураев Д.Ш.*

**turaevdilmurod8@gmail.com*

Термезский университет экономики и сервиса,
190111, Узбекистан, г. Термез, ул. Ибн Сино, 38Б.

В работе рассматривается численное решение плоскорадиальной граничной обратной задачи для уравнения релаксационной фильтрации жидкости в пористой среде в упругом режиме. Актуальность обусловлена широким применением релаксационной фильтрации в гидрогеологии, нефтегазодобыче и подземной гидромеханике, где важны идентификация параметров среды и восстановление неизвестных граничных воздействий. Такие граничные обратные задачи являются некорректными: малые ошибки исходной информации могут существенно искажать результат, поэтому требуются устойчивые численные методы. Для решения использован маршевый метод Де Сузы, однако вычислительные эксперименты показали, что его точность заметно зависит от расстояния между точкой задания измеренных «начальных данных» и искомой границей: при увеличении расстояния погрешность растёт из-за накопления ошибок и неустойчивости реконструкции. Для повышения устойчивости применены сглаживающие сплайны, которые фильтруют высокочастотный шум и стабилизируют восстановление граничных значений. В итоге получены более устойчивые решения с приемлемой точностью даже при значительных погрешностях входных данных, что подтверждает перспективность сочетания маршевых методов и сглаживания для некорректных граничных обратных задач релаксационной фильтрации.

Ключевые слова: граничная обратная задача, аппроксимация, регуляризация, устойчивость решения, сглаживающие сплайны.

Цитирование: Холияров Э.Ч., Тураев Д.Ш. Численное решение плоскорадиальной граничной обратной задачи для уравнения нестационарной релаксационной фильтрации жидкости в пористой среде // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2025. – №6(70). – С. 112-123.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.6_70.2025.09

1 Введение

Одна из первых моделей релаксационной фильтрации жидкости в пористой среде была предложена в [1], где учитываются релаксационные явления градиента давления относительно скорости фильтрации. На основе общих предположений теории упругого режима с использованием уравнения неразрывности и закона Дарси выведено следующее уравнение пьезопроводности

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varkappa \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \lambda_p \frac{\partial^3 p}{\partial x^2 \partial t} \right), \quad \varkappa = \frac{k}{\mu (m\beta_{\text{ж}} + \beta_{\text{с}})}, \quad (1)$$

где p – текущее давление (МПа); t – время; x – координата; λ_p – время релаксации градиента давления; \varkappa – коэффициент пьезопроводности; k – проницаемость среды; μ – коэффициент вязкости; m – пористость; $\beta_{ж}, \beta_c$ – коэффициенты сжимаемости жидкости и пласта соответственно.

В [2] учтены релаксационные явления как по градиенту давления, так и скорости фильтрации. Аналогично (1) выведено уравнение нестационарной фильтрации в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \lambda_v \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \varkappa \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \lambda_p \frac{\partial^3 p}{\partial x^2 \partial t} \right), \quad (2)$$

где λ_v – время релаксации скорости фильтрации.

Дальнейшее развитие этой теории было осуществлено в [3, 4]. Некоторые интегральные модели фильтрации, учитывающие эффекты памяти, предложены в [5, 6]. С относительно недавнего времени стали исследоваться обобщения моделей (1), (2) с применением дробного дифференциального исчисления [7]. В [8] показано, что дробно-дифференциальные модели релаксационной фильтрации по сравнению с моделями типа (1), (2) позволяют в более широком спектре исследовать релаксационные явления.

Прямые задачи для уравнений (1), (2) исследованы достаточно хорошо. Установлено влияние параметров λ_p, λ_v на распределение давления и скорости фильтрации в среде. Однако, для указанных выше моделей обратные задачи изучены мало, в частности, не получены априорные оценки их устойчивости.

В работах [9, 10] решена граничная обратная задача для уравнения релаксационной фильтрации (1). В [11] численно решена плоскорадиальная гранично-обратная задача для уравнения релаксационной фильтрации

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varkappa \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \lambda_p \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \right] \right], \quad t \in (0, T], \quad r_c < r < R, \quad (3)$$

где r – координата.

В работе [12] численно решена гранично-обратная задача для уравнения нестационарной релаксационной фильтрации (2). В [13] предложен численный метод решения обратной задачи определения дебитов скважин по заданным забойным давлениям для многомерной модели течения слабосжимаемой жидкости в упруго-деформируемой пористой среде. В [14] нелинейная обратная задача теплопроводности была решена с использованием итерационного метода сопряженных градиентов.

В данной работе рассмотрена плоскорадиальная граничная обратная задача для уравнения нестационарной релаксационной фильтрации жидкости в пористой среде с учетом релаксационных явлений как по градиенту давления, так и по скорости фильтрации. Задача решена численно с различными возмущенными исходными данными. Оценена устойчивость решения задачи в зависимости от погрешности исходных данных.

2 Постановка граничной обратной задачи

Рассмотрим плоскорадиальную граничную обратную задачу для уравнения релаксационной фильтрации. Считаем, что в точке $r = R$ задано граничное условие и в точке $r = d, d \in (r_c, R)$ известно изменение давления жидкости. Начальное распределение давления также известно: $p(r, 0) = p_0, p_0 = \text{const}$. Необходимо определить давление в точке $r = r_c$. Эту подстановку можно интерпретировать как определение характеристик фильтрации в нефтедобывающей скважине ДС (рис. 1) на основе

данных, полученных на наблюдательной скважине – НС. Задача сводится к определению поля давления области $[r_c, d)$ на основе измерений давления в НС ($r = d$).

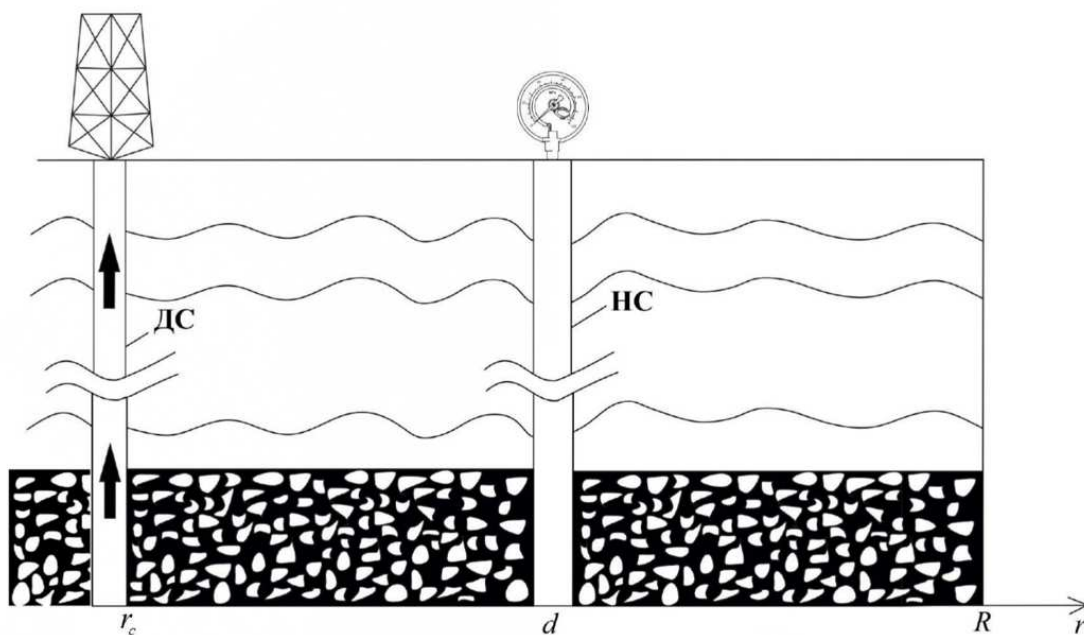


Рис. 1 Схема расположения добывающей и наблюдательной скважин (ДС, НС)

Пусть нам дано уравнение релаксационной фильтрации жидкости

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \lambda_v \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \varkappa \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \lambda_p \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \right] \right], \quad t \in (0, T], \quad r_c < r < R, \quad (4)$$

и дополнительные условия

$$p(r, 0) = p_0, \quad r \in [r_c, R], \quad (5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}(r, 0) = 0, \quad r \in [r_c, R], \quad (6)$$

$$p(d, t) = z(t), \quad t \in (0, T], \quad (7)$$

$$p(R, t) = p_0, \quad t \in (0, T], \quad (8)$$

где $z(t)$ – заданная функция.

Для решения обратной задачи необходимо задать $z(t)$ в (7). Для этого в $[r_c, R]$ для (4) решим прямую задачу с заданным граничным условием

$$Q_0 = 2\pi H \frac{k}{\mu} r \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=r_c}, \quad (9)$$

где Q_0 – дебит скважины; H – толщина пласта. После определения поля давления $z(t)$ определяем как $z(t) = p(d, t)$. Следует отметить, что в реальных условиях $z(t)$ определяется экспериментально. Мы же здесь $z(t)$ определяем из решения соответствующей прямой задачи, но интерпретируем ее как экспериментально определенную

функцию с некоторой погрешностью. Погрешность моделируем с помощью генерации псевдослучайных величин.

3 Алгоритм численного решения задачи

Для решения прямой задачи (4), (5), (6), (8), (9) применим метод конечных разностей [15]. Для начала определяем область D , т.е. $D = D_1 \cup D_2 = \{r_c \leq r \leq d, 0 \leq t \leq t_m\} \cup \{d \leq r < R, 0 \leq t \leq t_m\}$, затем вводим сетку

$$\omega_{h\tau} = \{(r_i, t_j), r_i = r_c + ih, h = (R - r_c)/N;$$

$$r_{i-1/2} = ih - h/2; r_{i+1/2} = ih + h/2;$$

$$r_n = nh = d; t_j = j\tau; h = R/N; \tau = T/M;$$

$$i = 0, 1, \dots, n-1, n, n+1, \dots, N; j = 0, 1, \dots, M\}$$

Сначала аппроксимируем задачу (4), (5), (6), (8), (9):

$$\begin{aligned} & \frac{p_i^{j+1} - p_i^{j-1}}{2\tau} + \lambda_v \frac{p_i^{j+1} - 2p_i^j + p_i^{j-1}}{\tau^2} = \\ & = \varkappa \left[\frac{1}{r_i h} \left(r_{i+1/2} \frac{p_{i+1}^{j+1} - p_i^{j+1}}{h} - r_{i-1/2} \frac{p_i^{j+1} - p_{i-1}^{j+1}}{h} \right) + \right. \\ & + \frac{\lambda_p}{\tau r_i h} \left\{ \left(r_{i+1/2} \frac{p_{i+1}^{j+1} - p_i^{j+1}}{h} - r_{i-1/2} \frac{p_i^{j+1} - p_{i-1}^{j+1}}{h} \right) - \right. \\ & \left. \left. - \left(r_{i+1/2} \frac{p_{i+1}^j - p_i^j}{h} - r_{i-1/2} \frac{p_i^j - p_{i-1}^j}{h} \right) \right\} \right]. \\ & i = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, \dots, M-1, \end{aligned} \quad (10)$$

$$p_i^0 = p_0, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (11)$$

$$\frac{p_i^1 - p_i^0}{\tau} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (12)$$

$$p_N^{j+1} = p_0, \quad (13)$$

$$Q_0 = 2\pi H \frac{k}{\mu} \left(r_c \frac{p_1^{j+1} - p_0^{j+1}}{h} \right), \quad j = 0, 1, \dots, M-1. \quad (14)$$

Напишем разностное уравнение (10) следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{\varkappa}{h^2} r_{i-1/2} (\tau + \lambda_p) p_{i-1}^{j+1} - \left[\frac{\varkappa}{h^2} (r_{i+1/2} + r_{i-1/2}) (\tau + \lambda_p) + \frac{r_i}{2} + \frac{r_i \lambda_v}{\tau} \right] p_i^{j+1} + \\ & + \frac{\varkappa}{h^2} r_{i+1/2} (\tau + \lambda_p) p_{i+1}^{j+1} = - \left[r_i \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda_v}{\tau} \right) p_i^{j-1} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{2r_i \lambda_v}{\tau} + \frac{\varkappa \lambda_p}{h^2} (r_{i+1/2} + r_{i-1/2}) \right) p_i^j - \frac{\varkappa \lambda_p}{h^2} (r_{i+1/2} p_{i+1}^j + r_{i-1/2} p_{i-1}^j) \right], \end{aligned}$$

что приводит к системе линейных уравнений

$$A_i p_{i-1}^{j+1} - C_i p_i^{j+1} + B_i p_{i+1}^j + 1 = -F_i^j, \quad (15)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, \dots, M-1,$$

$$\text{где } A_i = \frac{\varkappa}{h^2} r_{i-1/2} (\tau + \lambda_p), \quad B_i = \frac{\varkappa}{h^2} r_{i+1/2} (\tau + \lambda_p),$$

$$C_i = \frac{\varkappa}{h^2} (r_{i+1/2} + r_{i-1/2}) (\tau + \lambda_p) + \frac{r_i}{2} + \frac{r_i \lambda_v}{\tau},$$

$$F_i^j = r_i \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda_v}{\tau} \right) p_i^{j-1} + \left(\frac{2r_i \lambda_v}{\tau} + \frac{\varkappa \lambda_p}{h^2} (r_{i+1/2} + r_{i-1/2}) \right) p_i^j - \\ - \frac{\varkappa \lambda_p}{h^2} (r_{i+1/2} p_{i+1}^j + r_{i-1/2} p_{i-1}^j).$$

Система (15) при (11), (12), (13), (14) решается методом прогонки.

Из уравнения (14) находим p_0^{j+1} , т.е.

$$p_0^{j+1} = p_1^{j+1} - \frac{Q_0 \mu h}{2\pi H k r_c}.$$

Отсюда определяем коэффициенты прогонки, т.е.

$$p_0^{j+1} = \alpha_1 p_1^{j+1} + \beta_1,$$

$$\alpha_1 = 1, \quad \beta_1 = -\frac{Q_0 \mu h}{2\pi H k r_c}, \quad (16)$$

$$\alpha_{i+1} = \frac{B}{C - A\alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{A\beta_i + F_i^j}{C - A\alpha_i}, \quad (17)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, \dots, M-1.$$

и вычисляем значения давления

$$p_N^{j+1} = p_0,$$

$$p_i^{j+1} = \alpha_{i+1} p_{i+1}^{j+1} + \beta_{i+1}, \quad (18)$$

$$i = N-1, N-2, \dots, 1, 0, \quad j = 0, 1, \dots, M-1.$$

В качестве исходных данных для граничной обратной задачи, как указывалось выше, принимаются значения давления в точке d , т.е. $z(t_j) = p_n^j$. Чтобы оценить влияние ошибок в исходных данных на решение граничной обратной задачи вместо функции $z(t)$ используем возмущенную функцию

$$z^\delta(t) = z(t) + 2\delta(\sigma(t) - 0,5),$$

где δ – погрешность, $\sigma(t)$ – равномерно распределенная случайная величина на отрезке $[0, 1]$. На рис. 2 представлены графики функций $z^\delta(t)$ при различных значениях d и δ .

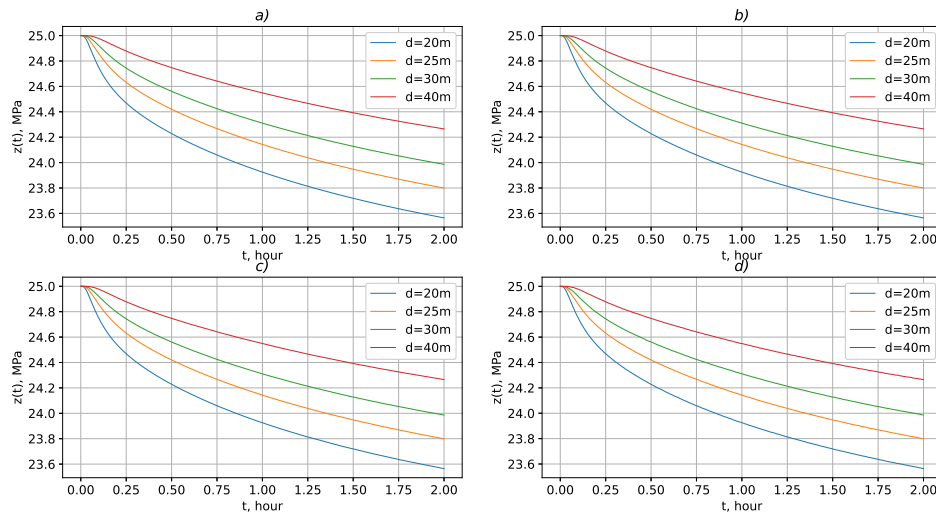


Рис. 2 Графики функций $z(t)$ и $z^\delta(t)$ при различных d : а) при $\delta = 0$, б) при $\delta = 10^{-5}$, в) при $\delta = 10^{-4}$, д) при $\delta = 10^{-3}$

Для решения обратной задачи применим маршевый метод Де Сузы [16]. Из уравнения (10) находим p_{i-1}^{j+1} т.е.

$$p_{i-1}^{j+1} = \frac{C_i p_i^{j+1} - B_i p_{i+1}^{j+1} - F_i^j}{A_i}, \quad i = n, n-1, \dots, 1, \quad j = 0, 1, \dots, M-1. \quad (19)$$

Отсюда можно найти значение давления в ДС.

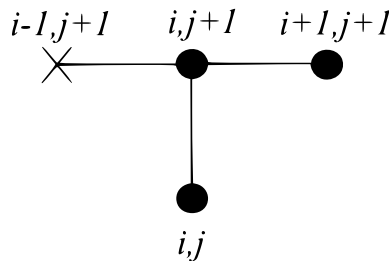


Рис. 3 Вычислительный шаблон схемы метода Де Сузы (19)

4 Результаты и обсуждение

Для численного решения задачи (4), (5), (6), (8), (9) использованы следующие значения исходных данных: $N = 400$, $M = 250$, $H = 10$ м, $R = 200$ м, $r_c = 0.1$ м, $T = 200$ с, $k = 10^{-12}$ м², $\kappa = 3 \cdot 10^{-1}$ м²/с, $p_0 = 25$ МПа, $\mu = 25 \cdot 10^{-9}$ МПа · с, $Q_0 = 100$ м³/сут, $\lambda_p = 1000$ с, $\lambda_v = 500$ с.

На рис. 4 представлены результаты численного расчёта точных и приближённых решений функции давления $p(t, 0)$ при значении параметра $\delta = 0$ и различных значениях расстояния d . Сравнение, представленное на подрисунках а)–д), показывает, что по мере увеличения d приближённые решения граничной обратной задачи практически совпадают с точными.

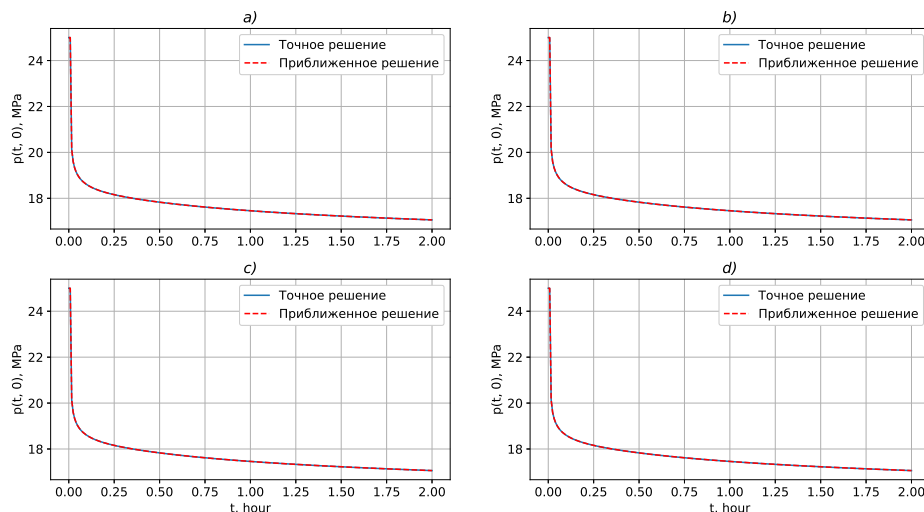


Рис. 4 Результаты решения обратной задачи при $\delta = 0$: а) при $d = 20$ м, б) при $d = 25$ м, в) при $d = 30$ м, г) при $d = 40$ м

На рис. 5 представлены результаты расчетов точных и приближенных решений $p(t, 0)$ при значении параметра $\delta = 10^{-5}$ и различных значениях расстояния d . С увеличением расстояния d наблюдается существенное возрастание погрешности приближенных решений, что выражается в усилении колебаний и отклонений от точного решения. Это особенно ярко проявляется на подрисунках в) и г), где приближенное решение значительно расходится с точным.

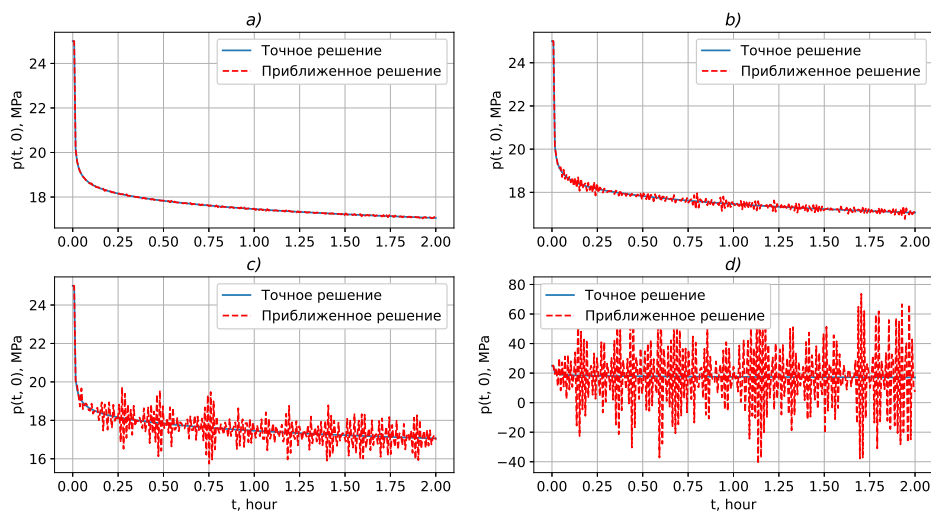


Рис. 5 Результаты решения обратной задачи при $\delta = 10^{-5}$: а) при $d = 20$ м, б) при $d = 25$ м, в) при $d = 30$ м, г) при $d = 40$ м

На рис. 6 представлены результаты расчетов $p(t, 0)$ при $\delta = 10^{-4}$ и различных d . С увеличением расстояния d наблюдается значительное усиление возмущённости приближенного решения. По сравнению с результатами на рис. 5, ошибки становятся

более выраженными как по амплитуде, так и по характеру колебаний. Особенно заметное расхождение между точным и приближённым решениями фиксируется на подрисунках с) и d), где приближённый результат приобретает явно неустойчивый характер.

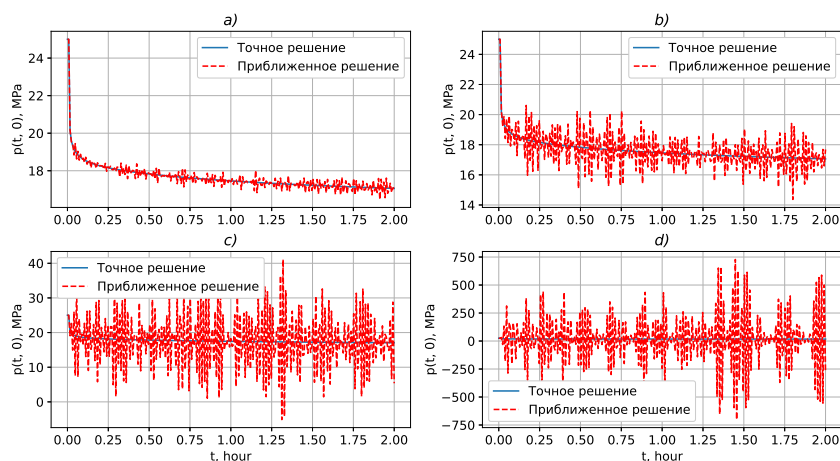


Рис. 6 Результаты решения обратной задачи при $\delta = 10^{-4}$: а) при $d = 20$ м, б) при $d = 25$ м, в) при $d = 30$ м, г) при $d = 40$ м

На рис. 7 представлены результаты расчетов $p(t, 0)$ при $\delta = 10^{-3}$ и различных d . Анализ данных показывает, что с увеличением расстояния d и погрешности наблюдается значительное возрастание возмущенности численного решения по сравнению с результатами, представленными на рис. 6, что требует применения сглаживающих сплайнов для улучшения точности приближенного решения.

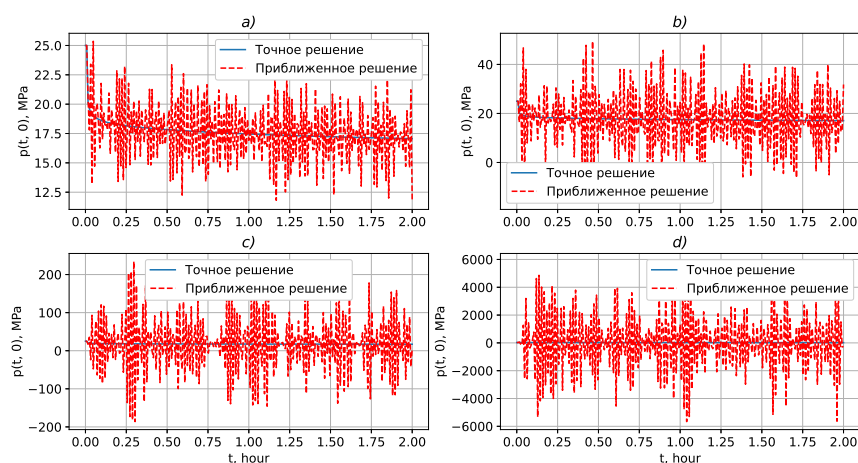


Рис. 7 Результаты решения обратной задачи при $\delta = 10^{-3}$: а) при $d = 20$ м, б) при $d = 25$ м, в) при $d = 30$ м, г) при $d = 40$ м

На рис. 8-10 представлены результаты расчетов точных и приближенных решений при различных значениях δ с использованием сглаживающих сплайнов.

На рис. 8 представлены результаты расчетов точных и приближенных решений $p(t, 0)$ при $\delta = 10^{-5}$ и различных значениях d с использованием сглаживающих сплайнов. Из рис. 8 а)-d) видно, что с помощью сглаживающих сплайнов при определенных значениях параметров позволяет получить более устойчивые решения. Однако полностью восстановить граничные условия не удается.

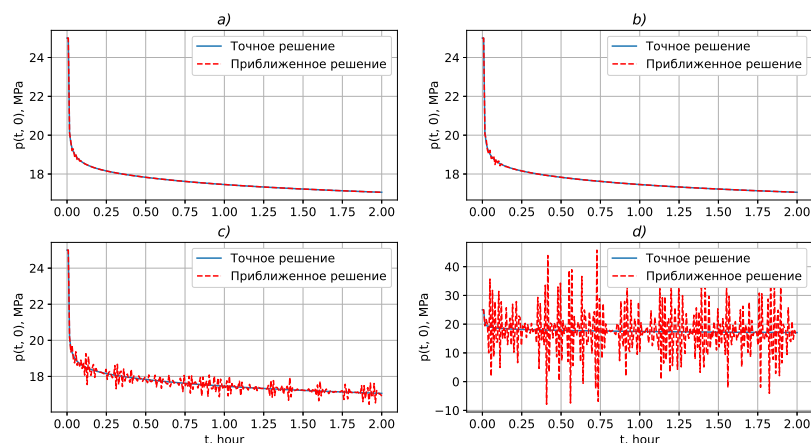


Рис. 8 Результаты решения обратной задачи со сглаживающим сплайном при $\delta = 10^{-5}$: а) при $d = 20$ м, параметр сглаживания $= 1 \cdot 10^{-5}$ б) при $d = 25$ м, параметр сглаживания $= 1 \cdot 10^{-8}$ в) при $d = 30$ м, параметр сглаживания $= 1 \cdot 10^{-9}$ д) при $d = 40$ м, параметр сглаживания $= 1 \cdot 10^{-9}$

Рис. 9 демонстрирует результаты расчетов $p(t, 0)$ при $\delta = 10^{-4}$ и различных значениях d . Как видно из рис. 9 а) – d), применение сглаживающих сплайнов в некоторых случаях позволяет получить более устойчивые решения. При этом приближенное решение хорошо согласуется с точным, что подтверждает его применимость для моделирования рассматриваемого процесса.

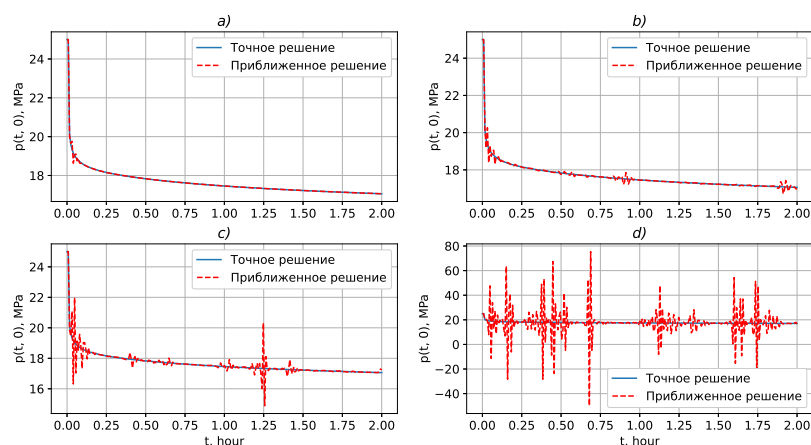


Рис. 9 Результаты решения обратной задачи со сглаживающим сплайном при $\delta = 10^{-4}$: а) при $d = 20$ м, параметр сглаживания $= 1 \cdot 10^{-6}$ б) при $d = 25$ м, параметр сглаживания $= 5 \cdot 10^{-7}$ в) при $d = 30$ м, параметр сглаживания $= 5 \cdot 10^{-7}$ д) при $d = 40$ м, параметр сглаживания $= 5 \cdot 10^{-7}$

На рис. 10 представлены результаты расчётов $p(t, 0)$ при $\delta = 10^{-3}$ и различных значениях d . Анализ представленных графиков из рис. 10 а)–д) показывает, что применение сглаживающих сплайнов также способствует получению более устойчивых решений в данных случаях. Это подтверждает эффективность данных подходов для стабилизации численных решений и уменьшения влияния возможных возмущений в исходных данных.

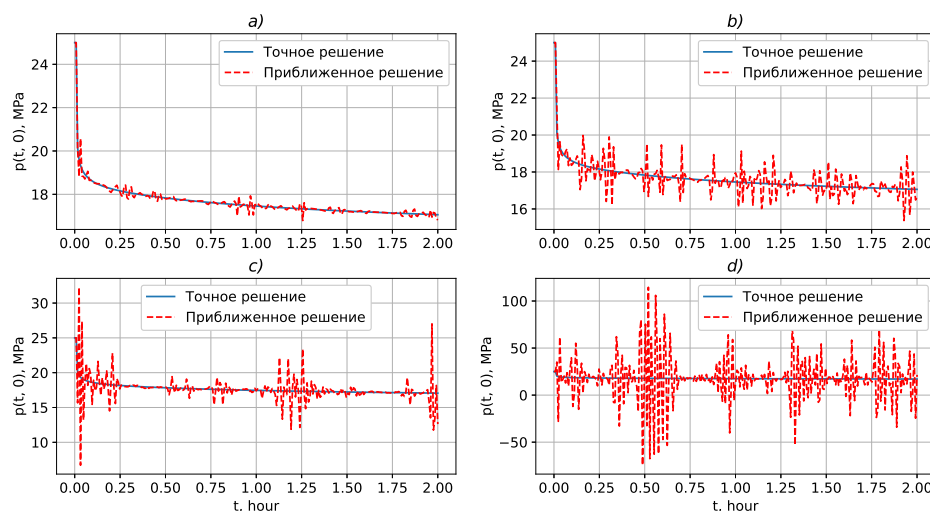


Рис. 10 Результаты решения обратной задачи со сглаживающим сплайном при $\delta = 10^{-3}$: а) при $d = 20$ м, параметр сглаживания $= 5 \cdot 10^{-5}$ б) при $d = 25$ м, параметр сглаживания $= 5 \cdot 10^{-5}$ в) при $d = 30$ м, параметр сглаживания $= 5 \cdot 10^{-5}$ д) при $d = 40$ м, параметр сглаживания $= 5 \cdot 10^{-5}$

5 Заключение

В данной работе численно решена плоскорадиальная граничная обратная задача для уравнения нестационарной релаксационной фильтрации жидкости в пористой среде. Для решения поставленной задачи использован маршевый метод Де Сузы. Дополнительная информация для решения обратной задачи подготовлена на основе квазиреального численного эксперимента. В исходные значения внесены возмущения со случайными ошибками. В случае возмущенных исходных данных искомое решение определяется с погрешностью, соответствующей порядку возмущения. Чтобы уменьшить погрешность использован сглаживающие сплайны. При относительно малых d и погрешности δ , погрешность определения граничного условия уменьшается.

Литература

- [1] Алишаев М. О нестационарной фильтрации с релаксацией давления // Гидромеханика. – 1974. – Вып. 111. – С. 166-177.
- [2] Алишаев М., Мирзаджанзаде А. К учету явлений запаздывания в теории фильтрации // Нефть и газ. – 1975. – №6. – С. 71-74.
- [3] Молокович Ю., Непримеров Н., Пикуза В., Штанин А. Релаксационная фильтрация. – Казань: Издательство Казанского университета, 1980. – 136 с.
- [4] Молокович Ю. Неравновесная фильтрация и ее применение в нефтепромысловой практике. – Регулярная и хаотическая динамика, 2006. – 214 с.

- [5] *Аметов И., Байдилов Ю., Рузин Л., Спиридонов Ю.* Добыча тяжелых и высоковязких жидкостей. – М.: Недра, 1985. – 205 с.
- [6] *Динариев О., Николаев О.* О релаксационных процессах в низкопроницаемых пористых материалах // Инженерно-физический журнал. – 1990. – Vol. 58, Issue 1. – С. 78-82.
- [7] *Caputo M.* Models of flux in porous media with memory // Water Resources Research. – 2000. – Vol. 36, Issue 3. – P. 693-705.
- [8] *Khuzhayorov B., Djiyanov T., Zokirov M.* Generalized relaxation fractional differential model of fluid filtration in a porous medium // International Journal of Applied Mathematics. – 2024. – Vol. 37, Issue 1. – P. 119-132. doi: <http://dx.doi.org/10.12732/ijam.v37i1.10>.
- [9] *Kholiyarov E., Turaev D., Buriev J.* Numerical solution of boundary inverse problem for fluid relaxation filtration in porous media // AIP Conference Proceedings. – 2024. – Vol. 3244, Issue 1. doi: <http://dx.doi.org/10.1063/5.0241626>.
- [10] *Холияров Э., Тураев Д., Буриев Ж.* Численное решение граничной обратной задачи для уравнения релаксационной фильтрации // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2024. – №3(57). – С. 36-46.
- [11] *Холияров Э., Тураев Д.* Численное решение плоскорадиальной граничной обратной задачи для уравнения релаксационной фильтрации // Проблемы механики. – 2024. – №4. – С. 101-109.
- [12] *Холияров Э., Тураев Д.* Численное решение граничной обратной задачи для уравнения нестационарной релаксационной фильтрации жидкости // Научный вестник. – 2024. – №5/1(147). – С. 195-203.
- [13] *Вабищевич П., Васильев В., Васильева М., Никифоров Д.* Численное решение одной обратной задачи фильтрации // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2015. – Vol. 157, Issue 4. – С. 79-89.
- [14] *Алифанов О., Михайлов В.* Решение нелинейной обратной задачи теплопроводности итерационным методом // Инженерно-физический журнал. – 1978. – №6. – С. 1123-1129.
- [15] *Самарский А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
- [16] *Beck J., Blackwell B., Clair C.* Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems. – A Wiley-Interscience Publication, 1985. – 312 p.

UDC 532.546

NUMERICAL SOLUTION OF PLANE-RADIAL BOUNDARY VALUE INVERSE PROBLEM FOR THE EQUATION OF NON-STATIONARY RELAXATION FILTRATION OF FLUID IN A POROUS MEDIUM

*Kholiyarov E.Ch., *Turaev D.Sh.*

*turaevdilmurod8@gmail.com

Termiz University of Economics and Service,
38-B, Ibn Sino Str., Termez, 190111 Uzbekistan

The paper addresses a numerical solution of a plane-radial boundary inverse problem for the relaxation filtration equation describing fluid flow in an elastically deformable porous medium. The study is motivated by the widespread occurrence of relaxation

filtration in hydrogeology, oil and gas production, and subsurface hydromechanics, where reliable identification of medium parameters and reconstruction of unknown boundary actions are essential. Such boundary inverse problems are ill-posed: small perturbations in the input data may cause large deviations in the recovered solution, which makes stable and accurate numerical techniques crucial. The inverse problem is solved using De Souza's marching method; however, computational experiments show that its accuracy strongly depends on the distance between the measurement point providing the "initial data" and the target boundary. As this distance increases, the error grows due to error accumulation and the intrinsic instability of boundary reconstruction. To improve stability and reduce errors, smoothing splines are employed. The spline approximation effectively suppresses high-frequency noise and stabilizes the recovery of boundary values. As a result, more stable numerical solutions with acceptable accuracy are obtained even under substantial data errors, demonstrating the promise of combining marching methods with smoothing procedures for ill-posed boundary inverse problems of relaxation filtration.

Keywords: boundary value inverse problem, approximation, regularization, solution stability, smoothing splines.

Citation: Kholiyarov E.Ch., Turaev D.Sh. 2025. Numerical solution of plane-radial boundary value inverse problem for the equation of non-stationary relaxation filtration of fluid in a porous medium. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 6(70): 112-123.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.6_70.2025.09

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 6(70) 2025

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Арипов М.М., Шадиметов Х.М., Ахмедов Д.Д.

Ответственный секретарь:

Убайдуллаев М.Ш.

Редакционный совет:

Азамов А.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Арушанов М.Л.,
Бурнашев В.Ф., Джумаёзов У.З., Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия),
Игнатъев Н.А., Ильин В.П. (Россия), Иманкулов Т.С. (Казахстан),
Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия), Карачик В.В. (Россия),
Курбонов Н.М., Маматов Н.С., Мирзаев Н.М., Мухамадиев А.Ш., Назирова Э.Ш.,
Нормуродов Ч.Б., Нуралиев Ф.М., Опанасенко В.Н. (Украина),
Расулмухамедов М.М., Расулов А.С., Садуллаева Ш.А.,
Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А., Хамдамов Р.Х.,
Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Чье Ен Ун (Россия), Шабозов М.Ш. (Таджикистан),
Dimov I. (Болгария), Li Y. (США), Mascagni M. (США), Min A. (Германия),
Singh D. (Южная Корея), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

Дизайн и вёрстка:

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 25.12.2025 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №8. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 6(70) 2025

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

Editor-in-Chief:

Ravshanov N.

Deputy Editors:

Aripov M.M., Shadimetov Kh.M., Akhmedov D.D.

Executive Secretary:

Ubaydullaev M.Sh.

Editorial Council:

Azamov A.A., Aloev R.D., Amirgaliev E.N. (Kazakhstan), Arushanov M.L.,
Burnashev V.F., Djumayozov U.Z., Zagrebina S.A. (Russia), Zadorin A.I. (Russia),
Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia), Imankulov T.S. (Kazakhstan), Ismagilov I.I. (Russia),
Kabanikhin S.I. (Russia), Karachik V.V. (Russia), Kurbonov N.M., Mamatov N.S.,
Mirzaev N.M., Mukhamadiev A.Sh., Nazirova E.Sh., Normurodov Ch.B., Nuraliev F.M.,
Opanasenko V.N. (Ukraine), Rasulov A.S., Sadullaeva Sh.A., Starovoitov V.V. (Belarus),
Khayotov A.R., Khaldjigitov A., Khamdamov R.Kh., Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh.,
Chye En Un (Russia), Shabozov M.Sh. (Tajikistan), Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA),
Mascagni M. (USA), Min A. (Germany), Singh D. (South Korea), Singh M. (South
Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the
Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.

The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.

Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

Address:

100125, Tashkent, Buz-2, 17A.

Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

E-mail: journals@airi.uz.

Web-site: <https://journals.airi.uz>.

Layout design:

Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.

Signed for print 25.12.2025

Format 60x84 1/8. Order No. 8. Print run of 100 copies.

Содержание

Алимова Н.Б., Паровик Р.И.

Программный комплекс FrOsFHN для количественного и качественного анализа дробного осциллятора ФитцХью-Нагумо с переменной памятью 5

Эшкуллов М.У., Хамдамов Р.Х.

Проектирование и анализ системы солнечного водоснабжения для многоэтажных жилых зданий на основе булева программирования 18

Равшанов Н., Усмонов Л.С.

Трёхмерная математическая модель и алгоритм численного решения для мониторинга и прогнозирования процессов подземного выщелачивания в пористой среде 26

Каландаров А.А.

Численное моделирование связанной динамической задачи термоупругости в напряжениях 48

Равшанов Н., Рахманов Х.Э. Фаттаева Д.А.

Моделирование пространственно-временной динамики площади водоёма (на примере Каттакурганского водохранилища) на основе индексов NDWI, NDVI, EVI и ансамблевых методов обучения 61

Хажиев И.О., Шобдаров Э.Б.

Регуляризация начально-краевой задачи для неоднородного параболического уравнения с меняющимся направлением времени 74

Равшанов Н., Боборахимов Б.И., Бердиев М.И.

Модель и алгоритмы классификации аномальных явлений на основе сходимости акустико-визуальных сигналов 88

Рустамов Н., Мухамеджанов Н.Б.

Конструкция и принцип работы когенеративного фрактального солнечного коллектора 103

Холияров Э.Ч., Тураев Д.Ш.

Численное решение плоскорадиальной граничной обратной задачи для уравнения нестационарной релаксационной фильтрации жидкости в пористой среде 112

Ахмедов Д.М., Маматова Н.Х.

Оптимальный метод приближённого решения гиперсингулярных интегральных уравнений 124

Шадиметов Х.М., Эльмуратов Г.Ч.

Оптимизация приближенного вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций в пространстве Соболева комплекснозначных функций 132

Зиякулова Ш.А.

Об оптимальных итерационных и прямых методах решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона 143

Contents

<i>Alimova N.B., Parovik R.I.</i>	
FrOsFHN software package for quantitative and qualitative analysis of the FitzHugh-Nagumo fractional oscillator with variable memory	5
<i>Eshkulov M.U., Khamdamov R.Kh.</i>	
Design and analysis of solar water supply system for multi-story residential buildings based on Boolean programming	18
<i>Ravshanov N., Usmonov L.S.</i>	
Three-dimensional mathematical model and numerical solution algorithm for monitoring and predicting in-situ leaching processes in porous medium	26
<i>Kalandarov A.A.</i>	
Numerical simulation of the coupled dynamic problem of thermoelasticity in stresses	48
<i>Ravshanov N., Rakhmanov Kh.E. Fattaeva D.A.</i>	
Modeling the spatio-temporal dynamics of a reservoir area (using the Kattakurgan Reservoir as an example) based on NDWI, NDVI, EVI indices and ensemble learning methods	61
<i>Khajiev I.O., Shobdarov E.B.</i>	
Regularization of the initial-boundary value problem for a inhomogeneous parabolic equation with changing time direction	74
<i>Ravshanov N., Boborakhimov B.I., Berdiev M.I.</i>	
Model and algorithms for classifying anomalous phenomena based on the convergence of acoustic-visual signals	88
<i>Rustamov N., Mukhamejanov N.B.</i>	
Design and operating principle of a cogenerative fractal solar collector	103
<i>Kholiyarov E.Ch., Turaev D.Sh.</i>	
Numerical solution of plane-radial boundary value inverse problem for the equation of non-stationary relaxation filtration of fluid in a porous medium	112
<i>Akhmedov D.M., Mamatova N.H.</i>	
An optimal method for the approximate solution of the hypersingular integral equations	124
<i>Shadimetov Kh.M., Elmuratov G.Ch.</i>	
Optimization of approximate computation of integrals of rapidly oscillating functions in the Sobolev space of complex-valued functions	132
<i>Ziyakulova Sh.A.</i>	
On optimal iterative and direct methods for solving the Dirichlet problem for the Poisson equation	143

HISOBLASH VA AMALIY МАТЕМАТИКА MUAMMOLARI



ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL
AND APPLIED MATHEMATICS

