УДК 519.63

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВЯЗАННОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ В НАПРЯЖЕНИЯХ

Каландаров А.А.
abrorshox@mail.ru
Гулистанский государственный педагогический институт,
120100, Узбекистан, Гулистан, ул. Талабалар, 49.

В статье предложена динамическая модель связанной задачи термоупругости в напряжениях. Сформулирована связанная краевая задача, состоящая из трёх дифференциальных уравнений относительно компонент тензора напряжений и температуры, а также уравнения притока тепла с соответствующими начальными и граничными условиями. Разработаны явные и неявные конечно-разностные уравнения, решаемые последовательным применением метода прогонки по координатным осям, и рекуррентных соотношений, соответственно. Численно решена связанная динамическая задача термоупругости для анизотропного прямоугольника в напряжениях. Сравнением результатов явных и неявных разностных схем показана достоверность полученных численных результатов и справедливость предложенной связанной динамической краевой задачи термоупругости в напряжениях.

Ключевые слова: термоупругость, напряжения, деформации, явная схема, неявная схема, перемещения.

Цитирование: *Каландаров А.А.* Численное моделирование связанной динамической задачи термоупругости в напряжениях // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2025. – № 6(70). – С. 48-60.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.6_70.2025.04

1 Введение

Математическое и численное моделирование процесса деформирования с учетом взаимовлияния термических и механических факторов является актуальной проблемой термоупругости и математического моделирования. В механике, обычно при решении термоупругих задач температурное поле считается известным как решение уравнения теплопроводности. Но, для того чтобы более адекватнее описать процесс деформирования с учетом температуры, наряду с уравнениями движения необходимо рассмотреть уравнение притока тепла. Тогда краевая задача становится связанной относительно перемещений и температуры. В статическом случае, задача становится несвязанной, и механические и тепловые уравнения могут быть решены независимо друг от друга [1, 2].

В общем случае, связанная динамическая краевая задача термоупругости состоит из уравнения движения, соотношения между напряжениями и деформациями с учетом температуры, соотношения Коши, и уравнения притока тепла с соответствующими начальными и краевыми условиями. Все вышеизложенные задачи термоупругости и термопластичности обычно решаются в перемещениях [2, 6–8].

В последние время формулировка связанных задач термоупругости относительно напряжений и температуры, и их численное решение становится актуальным. Обычно, краевые задачи в напряжениях рассматриваются в рамках уравнений Бельтрами-

Мичелла. В этом направлении можно отметить работы Коновалова [4] и др. В работах [3, 5, 9–16] приведены методы решения краевых задач.

Рассматривается связанная задача динамической термоупругости без использования уравнений Бельтрами-Мичелла. Численно решена плоская задача о свободной пластине, находящейся в начальный момент времени в температурном поле куполообразной формы.

2 Постановка задачи

Обычно, связанная задача плоской термоупругости состоит из уравнений движения

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} + X_1 = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + X_2 = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \tag{2}$$

соотношения Дюамеля-Неймана для анизотропных тел в двумерном виде

$$\sigma_{11} = C_{1111}\varepsilon_{11} + C_{1122}\varepsilon_{22} - \beta_{11}(T - T_0), \tag{3}$$

$$\sigma_{22} = C_{2211}\varepsilon_{11} + C_{2222}\varepsilon_{22} - \beta_{22}(T - T_0), \tag{4}$$

$$\sigma_{12} = 2C_{1212}\varepsilon_{12}, \tag{5}$$

соотношения Коши

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{6}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial v}{\partial y}, \tag{7}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \tag{8}$$

и уравнение притока тепла для анизотропных тел

$$\lambda_{11}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_{22}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} - T\left(\beta_{11}\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial t} + \beta_{22}\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial t}\right) = 0, \tag{9}$$

начальные

$$\begin{gathered}
\sigma_{11}(x,y,t)|_{t=0} = \varphi_1, \quad \sigma_{22}(x,y,t)|_{t=0} = \varphi_2, \\
\sigma_{12}(x,y,t)|_{t=0} = \varphi_3, \quad T(x,y,t)|_{t=0} = T_0, \\
\left.\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_1, \quad \left.\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_2, \quad \left.\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_3, \quad \left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_4,
\end{gathered} \tag{10}$$

и граничные условия

$$\begin{gathered}
\sigma_{11}(x,y,\,t)|_{x=\Gamma} = \sigma_0, \quad \sigma_{22}(x,y,\,t)|_{x=\Gamma} = \overline{\sigma}_0, \quad \sigma_{12}(x,y,\,t)|_{x=\Gamma} = \overline{\overline{\sigma}}_0, \\
T(x,y,t)|_{x=\Gamma} = T_1, \quad T(x,y,t)|_{x=\Gamma} = T_2.
\end{gathered} \tag{11}$$

где σ_{ij} – тензор напряжений, ε_{ij} – тензор деформаций, u_i – перемещения, T – температура, X_i – объёмные силы, C_{ijkl} – тензор четвёртого ранга определяющий механические свойства материала, c_ε – теплоемкость при постоянной деформации, β_{ij} – коэффициенты теплового расширения, λ_{ij} – коэффициенты теплопроводности, ρ

– плотность, δ_{ij} – символ Кронекера, Для того, чтобы записать задачу (1-9) относительно напряжений и температуры, продифференцировав уравнение (1) по x и уравнение (2) по y получим

$$\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x\partial y}+X_1=\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2\sigma_{21}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial y^2}+X_2=\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right). \tag{13}$$

С учетом соотношений Коши (6-7) уравнения (12-13) принимают следующий вид

$$\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x\partial y}+X_1=\rho\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2\sigma_{21}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial y^2}+X_2=\rho\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial t^2},$$

или

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial t^2}=\frac{1}{\rho}(\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x\partial y}+X_1), \tag{14}$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial t^2}=\frac{1}{\rho}(\frac{\partial^2\sigma_{21}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial y^2}+X_2). \tag{15}$$

Далее дважды продифференцируем уравнения (3) и (4) по времени t

$$\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial t^2}=C_{1111}\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial t^2}+C_{1122}\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial t^2}-\beta_{11}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}, \tag{16}$$

$$\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial t^2}=C_{2211}\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial t^2}+C_{2222}\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial t^2}-\beta_{22}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}. \tag{17}$$

Подставляя (14) и (15) в (16) и (17) при отсутствии объемных сил, получим

$$\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial t^2}=\frac{C_{1111}}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x^2}+\frac{C_{1111}+C_{1122}}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x\partial y}+\frac{C_{1122}}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial y^2}-\beta_{11}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}, \tag{18}$$

$$\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial t^2}=\frac{C_{2211}}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x^2}+\frac{C_{2211}+C_{2222}}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{21}}{\partial x\partial y}+\frac{C_{2222}}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial y^2}-\beta_{22}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}. \tag{19}$$

Далее продифференцировав уравнения движения (1) по y и (2) по x, без учета объемных сил можно найти следующие соотношения

$$\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial y^2}=\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{20}$$

$$\frac{\partial^2\sigma_{21}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x\partial y}=\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right), \tag{21}$$

сложив (20) и (21) полученное разделив на 2 будим иметь

$$\frac{1}{2\rho}\left(\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\sigma_{21}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x\partial y}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}), \tag{22}$$

подставляя (8) в (22) получим

$$\frac{1}{2\rho}\left(\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\sigma_{21}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x\partial y}\right)=\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial t^2}, \tag{23}$$

далее продифференцируем соотношение (5) дважды по времени t

$$\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial t^2}=2C_{1212}\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial t^2}, \tag{24}$$

и подставляя (23) в (24) получим

$$\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial t^2}=\frac{C_{1212}}{\rho}\left(\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\sigma_{21}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x\partial y}\right). \tag{25}$$

Таким образом, мы получили систему трех уравнений (18), (19) и (25) относительно компонент тензора напряжений и температуры. Теперь осталось присоединить к этой системе, уравнение притока тепла выраженное относительно температуры и напряжений.

Для чего, соотношение Дюамеля-Неймана записываем в следующей форме [1]

$$\varepsilon_{ij}=S_{ijkl}\sigma_{kl}+\beta_{ij}(T-T_0)\delta_{ij}, \tag{26}$$

и, оно в двумерном случае имеет вид

$$\varepsilon_{11}=S_{1111}\sigma_{11}+S_{1122}\sigma_{22}+\beta_{11}(T-T_0), \tag{27}$$

$$\varepsilon_{22}=S_{2211}\sigma_{11}+S_{2222}\sigma_{22}+\beta_{22}(T-T_0), \tag{28}$$

$$\varepsilon_{12}=2S_{1212}\sigma_{12}. \tag{29}$$

Подставляя (27) и (28) в (9) получим искомое уравнение притока тепла

$$\begin{gathered}\lambda_{11}\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+\lambda_{22}\frac{\partial^2T}{\partial y^2}-(c_\varepsilon+T(\beta_{11}^2+\beta_{22}^2))\frac{\partial T}{\partial t}-\\-T\left((\beta_{11}S_{1111}+\beta_{22}S_{2211})\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial t}+(\beta_{11}S_{1122}+\beta_{22}S_{2222})\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial t}\right)=0.\end{gathered} \tag{30}$$

Таким образом мы получили уравнения

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial t^2}=\dfrac{C_{1111}}{\rho}\dfrac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x^2}+\dfrac{C_{1111}+C_{1122}}{\rho}\dfrac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x\partial y}+\dfrac{C_{1122}}{\rho}\dfrac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial y^2}-\beta_{11}\dfrac{\partial^2T}{\partial t^2},\\ \dfrac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial t^2}=\dfrac{C_{2211}}{\rho}\dfrac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x^2}+\dfrac{C_{2211}+C_{2222}}{\rho}\dfrac{\partial^2\sigma_{21}}{\partial x\partial y}+\dfrac{C_{2222}}{\rho}\dfrac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial y^2}-\beta_{22}\dfrac{\partial^2T}{\partial t^2},\\ \dfrac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial t^2}=\dfrac{C_{1212}}{\rho}\left(\dfrac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2\sigma_{21}}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x\partial y}\right),\\ \lambda_{11}\dfrac{\partial^2T}{\partial x^2}+\lambda_{22}\dfrac{\partial^2T}{\partial y^2}-(c_\varepsilon+T(\beta_{11}^2+\beta_{22}^2))\dfrac{\partial T}{\partial t}-\\ -T\left((\beta_{11}S_{1111}+\beta_{22}S_{2211})\dfrac{\partial\sigma_{11}}{\partial t}+(\beta_{11}S_{1122}+\beta_{22}S_{2222})\dfrac{\partial\sigma_{22}}{\partial t}\right)=0.\end{cases} \tag{31}$$

с начальными (10) и граничными (11) условиями которые состовляют связанную динамическую задачу плоской термоупругости в напряжениях для анизотропных тел.

3 Конечно-разностные методы решения связанных задач термоупругости

Для численного решения связанной задачи плоской термоупругости конечно-разностным методом могут быть построены явные или неявные схемы. Заменяя в уравнениях (31) производные явными конечно-разностными соотношениями, получим

$$\begin{gathered}\frac{\sigma_{11}^{i,j,k+1}-2\sigma_{11}^{i,j,k}+\sigma_{11}^{i,j,k-1}}{\tau^2}=\\ =\frac{C_{1111}}{\rho}\frac{\sigma_{11}^{i+1,j,k}-2\sigma_{11}^{i,j,k}+\sigma_{11}^{i-1,j,k}}{h_1^2}+\frac{C_{1122}}{\rho}\frac{\sigma_{22}^{i,j+1,k}-2\sigma_{22}^{i,j,k}+\sigma_{22}^{i,j-1,k}}{h_2^2}+\\ +\frac{C_{1111}+C_{1122}}{\rho}\frac{\sigma_{12}^{i+1,j+1,k}-\sigma_{12}^{i+1,j-1,k}-\sigma_{12}^{i-1,j+1,k}+\sigma_{12}^{i-1,j-1,k}}{4h_1^2h_2^2}-\\ -\beta_{11}\frac{T^{i,j,k+1}-2T^{i,j,k}+T^{i,j,k-1}}{\tau^2},\end{gathered}\tag{32}$$

$$\begin{gathered}\frac{\sigma_{22}^{i,j,k+1}-2\sigma_{22}^{i,j,k}+\sigma_{22}^{i,j,k-1}}{\tau^2}=\frac{C_{2222}}{\rho}\frac{\sigma_{22}^{i,j+1,k}-2\sigma_{22}^{i,j,k}+\sigma_{22}^{i,j-1,k}}{h_2^2}+\\ +\frac{C_{2211}}{\rho}\frac{\sigma_{11}^{i+1,j,k}-2\sigma_{11}^{i,j,k}+\sigma_{11}^{i-1,j,k}}{h_1^2}+\\ +\frac{C_{2211}+C_{2222}}{\rho}\frac{\sigma_{12}^{i+1,j+1,k}-\sigma_{12}^{i+1,j-1,k}-\sigma_{12}^{i-1,j+1,k}+\sigma_{12}^{i-1,j-1,k}}{4h_1^2h_2^2}-\\ -\beta_{22}\frac{T^{i,j,k+1}-2T^{i,j,k}+T^{i,j,k-1}}{\tau^2},\end{gathered}\tag{33}$$

$$\begin{gathered}\frac{\sigma_{12}^{i,j,k+1}-2\sigma_{12}^{i,j,k}+\sigma_{12}^{i,j,k-1}}{\tau^2}=\frac{C_{1212}}{\rho}\times\\ \times\left(\frac{\sigma_{11}^{i+1,j+1,k}-\sigma_{11}^{i+1,j-1,k}-\sigma_{11}^{i-1,j+1,k}+\sigma_{11}^{i-1,j-1,k}}{4h_1^2h_2^2}+\frac{\sigma_{21}^{i+1,j,k}-2\sigma_{21}^{i,j,k}+\sigma_{21}^{i-1,j,k}}{h_1^2}+\right.\\ \left.+\frac{\sigma_{12}^{i,j+1,k}-2\sigma_{12}^{i,j,k}+\sigma_{12}^{i,j-1,k}}{h_2^2}+\frac{\sigma_{22}^{i+1,j+1,k}-\sigma_{22}^{i+1,j-1,k}-\sigma_{22}^{i-1,j+1,k}+\sigma_{22}^{i-1,j-1,k}}{4h_1^2h_2^2}\right),\end{gathered}\tag{34}$$

$$\begin{gathered}\lambda_{11}\frac{T^{i+1,j,k}-2T^{i,j,k}+T^{i-1,j,k}}{h_1^2}+\lambda_{22}\frac{T^{i,j+1,k}-2T^{i,j,k}+T^{i,j-1,k}}{h_2^2}-\\ -(c_\varepsilon+T(\beta_{11}^2+\beta_{22}^2))\frac{T^{i,j,k+1}-T^{i,j,k}}{\tau}--T^{i,j,k}\times\\ \left((\beta_{11}S_{1111}+\beta_{22}S_{2211})\,\frac{\sigma_{11}^{i,j,k}-\sigma_{11}^{i,j,k-1}}{\tau}+(\beta_{11}S_{1122}+\beta_{22}S_{2222})\,\frac{\sigma_{22}^{i,j,k}-\sigma_{22}^{i,j,k-1}}{\tau}\right)=0.\end{gathered}\tag{35}$$

Решив разностные уравнения (32)-(35) относительно $\sigma_{11}^{i,j,k+1}$, $\sigma_{22}^{i,j,k+1}$, $\sigma_{12}^{i,j,k+1}$ и $T^{i,j,k+1}$ соответственно, получим

$$\begin{gathered}
\sigma_{11}^{i,j,k+1} = \tau^2 \left(\frac{C_{1111}}{\rho} \frac{\sigma_{11}^{i+1,j,k} - 2\sigma_{11}^{i,j,k} + \sigma_{11}^{i-1,j,k}}{h_1^2} + \right. \\
+ \frac{C_{1111} + C_{1122}}{\rho} \frac{\sigma_{12}^{i+1,j+1,k} - \sigma_{12}^{i+1,j-1,k} - \sigma_{12}^{i-1,j+1,k} + \sigma_{12}^{i-1,j-1,k}}{4h_1^2 h_2^2} + \\
\left. + \frac{C_{1122}}{\rho} \frac{\sigma_{22}^{i,j+1,k} - 2\sigma_{22}^{i,j,k} + \sigma_{22}^{i,j-1,k}}{h_2^2} - \beta_{11} \frac{T^{i,j,k+1} - 2T^{i,j,k} + T^{i,j,k-1}}{\tau^2} \right) + \\
+ 2\sigma_{11}^{i,j,k} - \sigma_{11}^{i,j,k-1},
\end{gathered} \tag{36}$$

$$\begin{gathered}
\sigma_{22}^{i,j,k+1} = \tau^2 \left(\frac{C_{2222}}{\rho} \frac{\sigma_{22}^{i,j+1,k} - 2\sigma_{22}^{i,j,k} + \sigma_{22}^{i,j-1,k}}{h_2^2} + \right. \\
+ \frac{C_{2211} + C_{2222}}{\rho} \frac{\sigma_{12}^{i+1,j+1,k} - \sigma_{12}^{i+1,j-1,k} - \sigma_{12}^{i-1,j+1,k} + \sigma_{12}^{i-1,j-1,k}}{4h_1^2 h_2^2} + \\
\left. + \frac{C_{2211}}{\rho} \frac{\sigma_{11}^{i+1,j,k} - 2\sigma_{11}^{i,j,k} + \sigma_{11}^{i-1,j,k}}{h_1^2} - \beta_{22} \frac{T^{i,j,k+1} - 2T^{i,j,k} + T^{i,j,k-1}}{\tau^2} \right) + \\
+ 2\sigma_{22}^{i,j,k} - \sigma_{22}^{i,j,k-1},
\end{gathered} \tag{37}$$

$$\begin{gathered}
\sigma_{12}^{i,j,k+1} = \frac{\tau^2 C_{1212}}{\rho} \left(\frac{\sigma_{11}^{i+1,j+1,k} - \sigma_{11}^{i+1,j-1,k} - \sigma_{11}^{i-1,j+1,k} + \sigma_{11}^{i-1,j-1,k}}{4h_1^2 h_2^2} + \right. \\
+ \frac{\sigma_{21}^{i+1,j,k} - 2\sigma_{21}^{i,j,k} + \sigma_{21}^{i-1,j,k}}{h_1^2} + \frac{\sigma_{12}^{i,j+1,k} - 2\sigma_{12}^{i,j,k} + \sigma_{12}^{i,j-1,k}}{h_2^2} + \\
\left. + \frac{\sigma_{22}^{i+1,j+1,k} - \sigma_{22}^{i+1,j-1,k} - \sigma_{22}^{i-1,j+1,k} + \sigma_{22}^{i-1,j-1,k}}{4h_1^2 h_2^2} \right) + 2\sigma_{12}^{i,j,k} - \sigma_{12}^{i,j,k-1},
\end{gathered} \tag{38}$$

$$\begin{gathered}
T^{i,j,k+1} = \frac{\tau}{c_\varepsilon + T(\beta_{11}^2 + \beta_{22}^2)} \left(\lambda_{11} \frac{T^{i+1,j,k} - 2T^{i,j,k} + T^{i-1,j,k}}{h_1^2} + \right. \\
+ \lambda_{22} \frac{T^{i,j+1,k} - 2T^{i,j,k} + T^{i,j-1,k}}{h_2^2} - \\
- T^{i,j,k} \left((\beta_{11} S_{1111} + \beta_{22} S_{2211}) \frac{\sigma_{11}^{i,j,k} - \sigma_{11}^{i,j,k-1}}{\tau} + \right. \\
\left. \left. + (\beta_{11} S_{1122} + \beta_{22} S_{2222}) \frac{\sigma_{22}^{i,j,k} - \sigma_{22}^{i,j,k-1}}{\tau} \right) \right) + T^{i,j,k}.
\end{gathered} \tag{39}$$

Разностные уравнения (36)-(39) с использованием начальных и краевых условий позволяют вычислить значения искомых напряжений и температуры на $(k+1)$ слое по времени.

В приграничных узловых точках уравнение (38) принимает следующий вид при $i=1, \quad j\neq 1, \quad j\neq n-1$

$$\sigma_{12}^{i,j,k+1}=\frac{\tau^2C_{1212}}{\rho}\left(\frac{\sigma_{11}^{i+1,j+1,k}-\sigma_{11}^{i+1,j-1,k}-\sigma_{11}^{i-1,j+1,k}+\sigma_{11}^{i-1,j-1,k}}{4h_1^2h_2^2}+\right.$$
$$+\frac{\sigma_{21}^{i+1,j,k}-2\sigma_{21}^{i,j,k}+\sigma_{21}^{i-1,j,k}}{h_1^2}+\frac{\sigma_{12}^{i,j+1,k}-2\sigma_{12}^{i,j,k}+\sigma_{12}^{i,j-1,k}}{h_2^2}+$$
$$\left.+\frac{\sigma_{22}^{i+1,j+1,k}-\sigma_{22}^{i+1,j-1,k}-\sigma_{22}^{i,j+1,k}+\sigma_{22}^{i,j-1,k}}{2h_1^2h_2^2}\right)+2\sigma_{12}^{i,j,k}-\sigma_{12}^{i,j,k-1},$$

при $i=1, \quad j=1$

$$\sigma_{12}^{i,j,k+1}=\frac{\tau^2C_{1212}}{\rho}\left(\frac{\sigma_{11}^{i+1,j+1,k}-\sigma_{11}^{i+1,j,k}-\sigma_{11}^{i-1,j+1,k}+\sigma_{11}^{i-1,j,k}}{2h_1^2h_2^2}+\right.$$
$$+\frac{\sigma_{21}^{i+1,j,k}-2\sigma_{21}^{i,j,k}+\sigma_{21}^{i-1,j,k}}{h_1^2}+\frac{\sigma_{12}^{i,j+1,k}-2\sigma_{12}^{i,j,k}+\sigma_{12}^{i,j-1,k}}{h_2^2}+$$
$$\left.+\frac{\sigma_{22}^{i+1,j+1,k}-\sigma_{22}^{i+1,j-1,k}-\sigma_{22}^{i,j+1,k}+\sigma_{22}^{i,j-1,k}}{2h_1^2h_2^2}\right)+2\sigma_{12}^{i,j,k}-\sigma_{12}^{i,j,k-1},$$

при $i=1, \quad j=n-1$

$$\sigma_{12}^{i,j,k+1}=\frac{\tau^2C_{1212}}{\rho}\left(\frac{\sigma_{11}^{i+1,j,k}-\sigma_{11}^{i+1,j-1,k}-\sigma_{11}^{i-1,j,k}+\sigma_{11}^{i-1,j-1,k}}{2h_1^2h_2^2}+\right.$$
$$+\frac{\sigma_{21}^{i+1,j,k}-2\sigma_{21}^{i,j,k}+\sigma_{21}^{i-1,j,k}}{h_1^2}+\frac{\sigma_{12}^{i,j+1,k}-2\sigma_{12}^{i,j,k}+\sigma_{12}^{i,j-1,k}}{h_2^2}+$$
$$\left.+\frac{\sigma_{22}^{i+1,j+1,k}-\sigma_{22}^{i+1,j-1,k}-\sigma_{22}^{i,j+1,k}+\sigma_{22}^{i,j-1,k}}{2h_1^2h_2^2}\right)+2\sigma_{12}^{i,j,k}-\sigma_{12}^{i,j,k-1},$$

при $i=n-1, \quad j\neq 1, \quad j\neq n-1$

$$\sigma_{12}^{i,j,k+1}=\frac{\tau^2C_{1212}}{\rho}\left(\frac{\sigma_{11}^{i+1,j+1,k}-\sigma_{11}^{i+1,j-1,k}-\sigma_{11}^{i-1,j+1,k}+\sigma_{11}^{i-1,j-1,k}}{4h_1^2h_2^2}+\right.$$
$$+\frac{\sigma_{21}^{i+1,j,k}-2\sigma_{21}^{i,j,k}+\sigma_{21}^{i-1,j,k}}{h_1^2}+\frac{\sigma_{12}^{i,j+1,k}-2\sigma_{12}^{i,j,k}+\sigma_{12}^{i,j-1,k}}{h_2^2}+$$
$$\left.+\frac{\sigma_{22}^{i,j+1,k}-\sigma_{22}^{i,j-1,k}-\sigma_{22}^{i-1,j+1,k}+\sigma_{22}^{i-1,j-1,k}}{2h_1^2h_2^2}\right)+2\sigma_{12}^{i,j,k}-\sigma_{12}^{i,j,k-1},$$

при $i=n-1, \quad j=1$

$$\sigma_{12}^{i,j,k+1}=\frac{\tau^2C_{1212}}{\rho}\left(\frac{\sigma_{11}^{i+1,j+1,k}-\sigma_{11}^{i+1,j,k}-\sigma_{11}^{i-1,j+1,k}+\sigma_{11}^{i,j,k}}{2h_1^2h_2^2}+\right.$$
$$+\frac{\sigma_{21}^{i+1,j,k}-2\sigma_{21}^{i,j,k}+\sigma_{21}^{i-1,j,k}}{h_1^2}+\frac{\sigma_{12}^{i,j+1,k}-2\sigma_{12}^{i,j,k}+\sigma_{12}^{i,j-1,k}}{h_2^2}+$$
$$\left.+\frac{\sigma_{22}^{i,j+1,k}-\sigma_{22}^{i,j-1,k}-\sigma_{22}^{i-1,j+1,k}+\sigma_{22}^{i-1,j-1,k}}{2h_1^2h_2^2}\right)+2\sigma_{12}^{i,j,k}-\sigma_{12}^{i,j,k-1},$$

при $i = n-1, \quad j = n-1$

$$\sigma_{12}^{i,j,k+1} = \frac{\tau^2 C_{1212}}{\rho}\left(\frac{\sigma_{11}^{i+1,j,k} - \sigma_{11}^{i+1,j-1,k} - \sigma_{11}^{i-1,j,k} + \sigma_{11}^{i-1,j-1,k}}{2h_1^2 h_2^2} + \right.$$
$$+\frac{\sigma_{21}^{i+1,j,k} - 2\sigma_{21}^{i,j,k} + \sigma_{21}^{i-1,j,k}}{h_1^2} + \frac{\sigma_{12}^{i,j+1,k} - 2\sigma_{12}^{i,j,k} + \sigma_{12}^{i,j-1,k}}{h_2^2} +$$
$$\left. + \frac{\sigma_{22}^{i,j+1,k} - \sigma_{22}^{i,j-1,k} - \sigma_{22}^{i-1,j+1,k} + \sigma_{22}^{i-1,j-1,k}}{2h_1^2 h_2^2}\right) + 2\sigma_{12}^{i,j,k} - \sigma_{12}^{i,j,k-1},$$

при $i \neq 1, \quad i \neq n-1, \quad j = 1$

$$\sigma_{12}^{i,j,k+1} = \frac{\tau^2 C_{1212}}{\rho}\left(\frac{\sigma_{11}^{i+1,j+1,k} - \sigma_{11}^{i+1,j,k} - \sigma_{11}^{i-1,j+1,k} + \sigma_{11}^{i-1,j,k}}{2h_1^2 h_2^2} + \right.$$
$$+\frac{\sigma_{21}^{i+1,j,k} - 2\sigma_{21}^{i,j,k} + \sigma_{21}^{i-1,j,k}}{h_1^2} + \frac{\sigma_{12}^{i,j+1,k} - 2\sigma_{12}^{i,j,k} + \sigma_{12}^{i,j-1,k}}{h_2^2} +$$
$$\left. + \frac{\sigma_{22}^{i+1,j+1,k} - \sigma_{22}^{i+1,j-1,k} - \sigma_{22}^{i-1,j+1,k} + \sigma_{22}^{i-1,j-1,k}}{4h_1^2 h_2^2}\right) + 2\sigma_{12}^{i,j,k} - \sigma_{12}^{i,j,k-1},$$

при $i \neq 1, \quad i \neq n-1, \quad j = n-1$

$$\sigma_{12}^{i,j,k+1} = \frac{\tau^2 C_{1212}}{\rho}\left(\frac{\sigma_{11}^{i+1,j,k} - \sigma_{11}^{i+1,j-1,k} - \sigma_{11}^{i-1,j,k} + \sigma_{11}^{i-1,j-1,k}}{2h_1^2 h_2^2} + \right.$$
$$+\frac{\sigma_{21}^{i+1,j,k} - 2\sigma_{21}^{i,j,k} + \sigma_{21}^{i-1,j,k}}{h_1^2} + \frac{\sigma_{12}^{i,j+1,k} - 2\sigma_{12}^{i,j,k} + \sigma_{12}^{i,j-1,k}}{h_2^2} +$$
$$\left. + \frac{\sigma_{22}^{i+1,j+1,k} - \sigma_{22}^{i+1,j-1,k} - \sigma_{22}^{i-1,j+1,k} + \sigma_{22}^{i-1,j-1,k}}{4h_1^2 h_2^2}\right) + 2\sigma_{12}^{i,j,k} - \sigma_{12}^{i,j,k-1}.$$

Известно, что устойчивость явных конечно-разностные схем требует определенное ограничение на размер шага по времени аналогично неравенствам Фридрихса-Куранта.

Далее построим неявные конечно-разностные схемы без вышеназванных ограничений для рассматриваемой краевой задачи

$$\frac{\sigma_{11}^{i,j,k+1} - 2\sigma_{11}^{i,j,k} + \sigma_{11}^{i,j,k-1}}{\tau^2} = \frac{C_{1111}}{\rho}\frac{\sigma_{11}^{i+1,j,k+1} - 2\sigma_{11}^{i,j,k+1} + \sigma_{11}^{i-1,j,k+1}}{h_1^2} +$$
$$+\frac{C_{1122}}{\rho}\frac{\sigma_{22}^{i,j+1,k} - 2\sigma_{22}^{i,j,k} + \sigma_{22}^{i,j-1,k}}{h_2^2} +$$
$$+\frac{C_{1111} + C_{1122}}{\rho}\frac{\sigma_{12}^{i+1,j+1,k} - \sigma_{12}^{i+1,j-1,k} - \sigma_{12}^{i-1,j+1,k} + \sigma_{12}^{i-1,j-1,k}}{4h_1^2 h_2^2} - \tag{40}$$
$$-\beta_{11}\frac{T^{i,j,k+1} - 2T^{i,j,k} + T^{i,j,k-1}}{\tau^2},$$

$$\begin{gathered}\frac{\sigma_{22}^{i,j,k+1}-2\sigma_{22}^{i,j,k}+\sigma_{22}^{i,j,k-1}}{\tau^2}=\frac{C_{2222}}{\rho}\frac{\sigma_{22}^{i,j+1,k+1}-2\sigma_{22}^{i,j,k+1}+\sigma_{22}^{i,j-1,k+1}}{h_2^2}+\\+\frac{C_{2211}}{\rho}\frac{\sigma_{11}^{i+1,j,k}-2\sigma_{11}^{i,j,k}+\sigma_{11}^{i-1,j,k}}{h_1^2}+\\+\frac{C_{2211}+C_{2222}}{\rho}\frac{\sigma_{12}^{i+1,j+1,k}-\sigma_{12}^{i+1,j-1,k}-\sigma_{12}^{i-1,j+1,k}+\sigma_{12}^{i-1,j-1,k}}{4h_1^2h_2^2}-\\-\beta_{22}\frac{T^{i,j,k+1}-2T^{i,j,k}+T^{i,j,k-1}}{\tau^2},\end{gathered}\tag{41}$$

$$\begin{gathered}\frac{\sigma_{12}^{i,j,k+1}-2\sigma_{12}^{i,j,k}+\sigma_{12}^{i,j,k-1}}{\tau^2}=\frac{C_{1212}}{\rho}\left(\frac{\sigma_{11}^{i+1,j+1,k}-\sigma_{11}^{i+1,j-1,k}-\sigma_{11}^{i-1,j+1,k}+\sigma_{11}^{i-1,j-1,k}}{4h_1^2h_2^2}+\right.\\+\frac{\sigma_{21}^{i+1,j,k+1}-2\sigma_{21}^{i,j,k+1}+\sigma_{21}^{i-1,j,k+1}}{h_1^2}+\frac{\sigma_{12}^{i,j+1,k}-2\sigma_{12}^{i,j,k}+\sigma_{12}^{i,j-1,k}}{h_2^2}+\\\left.+\frac{\sigma_{22}^{i+1,j+1,k}-\sigma_{22}^{i+1,j-1,k}-\sigma_{22}^{i-1,j+1,k}+\sigma_{22}^{i-1,j-1,k}}{4h_1^2h_2^2}\right),\end{gathered}\tag{42}$$

$$\begin{gathered}\lambda_{11}\frac{T^{i+1,j,k+1}-2T^{i,j,k+1}+T^{i-1,j,k+1}}{h_1^2}+\lambda_{22}\frac{T^{i,j+1,k}-2T^{i,j,k}+T^{i,j-1,k}}{h_2^2}-\\-(c_\varepsilon+T^{i,j,k}(\beta_{11}^2+\beta_{22}^2))\frac{T^{i,j,k+1}-T^{i,j,k}}{\tau}-T^{i,j,k}\times\\\times\left((\beta_{11}S_{1111}+\beta_{22}S_{2211})\frac{\sigma_{11}^{i,j,k}-\sigma_{11}^{i,j,k-1}}{\tau}+(\beta_{11}S_{1122}+\beta_{22}S_{2222})\frac{\sigma_{22}^{i,j,k}-\sigma_{22}^{i,j,k-1}}{\tau}\right)=0.\end{gathered}\tag{43}$$

Неявные разностные уравнения (42-45) могут быть приведены к системе уравнений с трёх диагональной матрицей решаемых методом прогонки: уравнение (40) имеет вид

$$a_i\sigma_{11}^{i+1,j,k+1}+b_i\sigma_{11}^{i,j,k+1}+c_i\sigma_{11}^{i-1,j,k+1}=f_i.\tag{44}$$

где

$$\begin{gathered}a_i=\frac{C_{1111}}{\rho h_1^2},\ b_i=-\frac{2C_{1111}}{\rho h_1^2}-\frac{1}{\tau^2},\ c_i=\frac{C_{1111}}{\rho h_1^2},\\f_i=\beta_{11}\frac{T^{i,j,k+1}-2T^{i,j,k}+T^{i,j,k-1}}{\tau^2}-\frac{C_{1122}}{\rho}\frac{\sigma_{22}^{i,j+1,k}-2\sigma_{22}^{i,j,k}+\sigma_{22}^{i,j-1,k}}{h_2^2}-\\-\frac{C_{1111}+C_{1122}}{\rho}\frac{\sigma_{12}^{i+1,j+1,k}-\sigma_{12}^{i+1,j-1,k}-\sigma_{12}^{i-1,j+1,k}+\sigma_{12}^{i-1,j-1,k}}{4h_1^2h_2^2}-\frac{2\sigma_{11}^{i,j,k}-\sigma_{11}^{i,j,k-1}}{\tau^2}.\end{gathered}$$

Аналогичным образом, уравнения (41) и (42) могут быть приведены к трёхдиагональному виду, для уранения притока тепла имеем следующее

$$a_{4i}T^{i+1,j,k+1}+b_{4i}T^{i,j,k+1}+c_{4i}T^{i-1,j,k+1}=f_{4i}.\tag{45}$$

где

$$a_{4i} = \frac{\lambda_{11}}{h_1^2}, b_{4i} = -\frac{2\lambda_{11}}{h_1^2} - \frac{c_\varepsilon + T^{i,j,k}(\beta_{11}^2 + \beta_{22}^2)}{\tau}, c_{4i} = \frac{\lambda_{11}}{h_1^2},$$

$$f_{4i} = T^{i,j,k}\left((\beta_{11}S_{1111} + \beta_{22}S_{2211})\,\frac{\sigma_{11}^{i,j,k} - \sigma_{11}^{i,j,k-1}}{\tau} + \right.$$

$$\left. + (\beta_{11}S_{1122} + \beta_{22}S_{2222})\,\frac{\sigma_{22}^{i,j,k} - \sigma_{22}^{i,j,k-1}}{\tau} \right) -$$

$$-\lambda_{22}\frac{T^{i,j+1,k} - 2T^{i,j,k} + T^{i,j-1,k}}{h_2^2} - (c_\varepsilon + T(\beta_{11}^2 + \beta_{22}^2))\frac{T^{i,j,k}}{\tau}.$$

Определив значения искомых функций $\sigma_{ij}(x, y, z, t)$на начальных слоях $k = 0$ и $k = 1$ и $T(x, y, z, t)$ на слое $k = 0$ из начальных условий, далее пользуясь граничными условиями, разностные уравнения (44)-(45) решаются методом прогонки или итерационным методом.

4 Численные результаты

Рассмотрим связанную термоупругую задачу о свободной пластине находящейся под действием температурного поле куполообразной формы заданный в начальный момент времени. Требуется исследовать распределение температурных напряжений по времени в пластине. При этом начальные и краевые условия для рассаматриваемой задачи имеют вид: начальные условия

$$\sigma_{11}\left(x, y, t\right)|_{t=0} = 0, \sigma_{22}\left(x, y, t\right)|_{t=0} = 0, \sigma_{12}\left(x, y, t\right)|_{t=0} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \left.\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \left.\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{t=0} = 0,$$

$$T\left(x, y, t\right)|_{t=0} = T_0 \cdot \sin(\pi x)\sin(\pi y),$$

граничные условия

$$\sigma_{11}\left(x, y,\ t\right)|_{x=\Gamma} = 0, \sigma_{22}\left(x, y,\ t\right)|_{x=\Gamma} = 0, \sigma_{12}\left(x, y,\ t\right)|_{x=\Gamma} = 0,$$

$$T\left(x, y, t\right)|_{x=\Gamma} = 0, T\left(x, y, t\right)|_{x=\Gamma} = 0.$$

константы

$$C_{1111} = 0.78, \quad C_{1122} = 0.44, \quad C_{2222} = 0.3, \quad C_{1212} = 0.5,$$

$$\lambda_{11} = 0.6, \quad \lambda_{22} = 0.3, \quad \beta_{11} = 0.015,$$

$$\beta_{22} = 0.018, \quad \rho = 0.86, \quad c_\varepsilon = 3.4, \quad T_0 = 20, \quad h_1 = 0.1, \quad h_2 = 0.1, \quad \tau = 0.01.$$

Таблица 1. Значения напряжений σ_{11}

y=0.5, t=0.08	***x=0***	***x=0.1***	***x=0.2***	***x=0.3***	***x=0.4***	***x=0.5***
Явная схема	0	0.0192	0.0365	0.0503	0.0592	0.0623
Неявная схема	0	0.0188	0.0357	0.0492	0.0578	0.0608

Таблица 2. Значения напряжений σ_{22}

y=0.5, t=0.08	***x=0***	***x=0.1***	***x=0.2***	***x=0.3***	***x=0.4***	***x=0.5***
Явная схема	0	0.0233	0.0443	0.0610	0.0718	0.0755
Неявная схема	0	0.0228	0.0435	0.0599	0.0704	0.0741

Таблица 3. Значения температуры T

y=0.5, t=0.08	***x=0***	***x=0.1***	***x=0.2***	***x=0.3***	***x=0.4***	***x=0.5***
Явная схема	0	4.874	9.268	12.753	14.988	15.758
Неявная схема	0	4.896	9.310	12.812	15.060	15.834

В таблицах 1 и 2 приведены численные значения напряжений полученные двумя методами, как видно из численных результатов, на основе температурного поля появляются напряжения. Температурное поле задано купалообразно, симметрично по осям координат. Так как рассматриваемая задача для анизотропных тел, численные результаты напряжений в середине рассматриваемой области различные, что показывает влияние анизотропии.

В таблице 3 приведены численные значения температуры полученные двумя методами. Численные результаты, полученные на основе явных и неявных конечно-разностных схем достаточно близки, что доказывает справедливость предложенных математических и численных моделей.

5 Заключение

Сформулирована связанная задача плоской термоупругости в напряжениях. При этом, краевая задача состоит из четырех уравнений вкючая уравнений притока тепла. В предложенной краевой задаче, в отличие от известных связанных задач, неизвестными являются три компоненты тензора напряжений и температура. Разностные уравнения составлены конечно-разностным методом в виде явных и неявных схем.

Численно решена плоская задача о термических напряжениях свободной пластины под действием температурных воздействие куполообразной формы. Сравнением результатов явных и неявных схем показана достоверность полученных результатов и справедливость предложенной связанной краевой задачи термоупругости в напряжениях.

Литература

[1] *Youssef H.M., Al-Felali A.S.* Generalized thermoelasticity problem of material subjected to thermal loading due to laser pulse // Applied Mathematics. – 2012. – Vol. 3. – P. 142-146.

[2] *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. – М.: Мир, 1970. – 256 с.

[3] *Победря Б.Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. – М.: МГУ, 1996. – 343 с.

[4] *Коновалов А.Н.* Решение задач термоупругости в напряжениях. – Новосибирск, 1979. – 92 с.

[5] *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 592 с.

[6] *Khaldjigitov A.A., Kalandarov A.A., Djumayozov U.Z.* Numerical modeling of coupled problems of thermo-plasticity on non-uniform meshes // AIP Conference Proceedings. – 2022. – Vol. 2686, Issue 1. – Art. 020007.

[7] *Kalandarov A.A., Khaldjigitov A.A., Atabayev K.* Coupled plane problem of dynamic thermal elasticity in stresses // AIP Conference Proceedings. – 2024. – (International Conference: Mechanics, Earthquake Engineering, Machinery Building, Tashkent, May 27-29, 2024).

[8] *Каландаров А.А., Джумаёзов У.З., Сагдуллаева Д.А.* Численное моделирование термоупругопластического состояния изотропного параллелепипеда // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2021. – № 4(15). – С. 1-19.

[9] *Халджигитов А.А., Каландаров А.А., Джумаёзов У.З.* Численное моделирование связанной задачи термоупругости в деформациях // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2023. – № 6(53). – С. 114-122.

[10] *Andrianov I., Topol H.* Compatibility conditions: number of independent equations and boundary conditions // Mechanics and Physics of Structured Media. – 2022. – P. 123-140. doi: `http://dx.doi.org/10.1016/b978-0-32-390543-5.00011-6`.

[11] *Abirov R.A., Khusanov B.E., Sagdullaeva D.A.* Numerical modeling of the problem of indentation of elastic and elastic-plastic massive bodies // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2020. – Vol. 971. – Art. 032017. doi: `http://dx.doi.org/10.1088/1757-899X/971/3/032017`.

[12] *Akhmedov A., Kholmanov N.* Problems of the theory of elasticity in stresses // AIP Conference Proceedings. – 2022. – Vol. 2637, Issue 1. – P. 1-10. doi: `http://dx.doi.org/10.1063/5.0119144`.

[13] *Borodachev N.M.* Three-dimensional problem of the theory of elasticity in strains // Strength of Materials. – 1995. – Vol. 27. – P. 296-299. doi: `http://dx.doi.org/10.1007/bf02208501`.

[14] *Borodachev N.M.* About one approach in the solution of the 3D problem of elasticity in stresses // International Journal of Applied Mechanics. – 1995. – Vol. 31, Issue 12. – P. 38-44.

[15] *Borodachev N.M.* An approach to solving the stress problem of elasticity // International Applied Mechanics. – 2006. – Vol. 42, Issue 7. – P. 744-748. doi: `http://dx.doi.org/10.1007/s10778-006-0142-8`.

[16] *Georgievski D.V., Pobedrya B.E.* On the number of independent compatibility equations in the mechanics of a deformable solid // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2004. – Vol. 68, Issue 6. – P. 941-946.

UDC 519.63

NUMERICAL SIMULATION OF THE COUPLED DYNAMIC PROBLEM OF THERMOELASTICITY IN STRESSES

Kalandarov A.A.
`abrorshox@mail.ru`
Gulistan State Pedagogical Institute,
49, st. Talabalar, Gulistan, 120100 Uzbekistan.

This article proposes a dynamic model of a coupled thermoelasticity problem under stress. A coupled boundary value problem is formulated, consisting of three differential equations for the stress and temperature tensor components, as well as a heat flux equation with corresponding initial and boundary conditions. Explicit and implicit finite difference equations are developed, solved by successive application of the sweep method along the coordinate axes and recurrence relations, respectively. The coupled dynamic thermoelasticity problem for an anisotropic rectangle under stress is solved numerically. A comparison of the results of explicit and implicit difference schemes demonstrates the reliability of the obtained numerical results and the validity of the proposed coupled dynamic boundary value problem of thermoelasticity under stress.

Keywords: thermoelasticity, stresses, deformations, explicit scheme, implicit scheme, displacements.

Citation: Kalandarov A.A. 2025. Numerical simulation of the coupled dynamic problem of thermoelasticity in stresses. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 6(70): 48-60.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.6_70.2025.04

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 6(70) 2025

Журнал основан в 2015 году.
Издается 6 раз в год.

Учредитель:
Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта.

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при Администрации Президента Республики Узбекистан.
Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Адрес редакции:
100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.
Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.
Э-почта: `journals@airi.uz`.
Веб-сайт: `https://journals.airi.uz`.

Дизайн и вёрстка:
Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.
Подписано в печать 25.12.2025 г.
Формат 60x84 1/8. Заказ №8. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 6(70) 2025

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:
Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.
The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Address:
100125, Tashkent, Buz-2, 17A.
Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.
E-mail: journals@airi.uz.
Web-site: https://journals.airi.uz.

Layout design:
Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.
Signed for print 25.12.2025
Format 60x84 1/8. Order No. 8. Print run of 100 copies.

Содержание

Алимова Н.Б., Паровик Р.И.
Программный комплекс FrOsFHN для количественного и качественного анализа дробного осциллятора ФитцХью-Нагумо с переменной памятью 5

Эшкулов М.У., Хамдамов Р.Х.
Проектирование и анализ системы солнечного водоснабжения для многоэтажных жилых зданий на основе булева программирования 18

Равшанов Н., Усмонов Л.С.
Трёхмерная математическая модель и алгоритм численного решения для мониторинга и прогнозирования процессов подземного выщелачивания в пористой среде 26

Каландаров А.А.
Численное моделирование связанной динамической задачи термоупругости в напряжениях 48

Равшанов Н., Рахманов Х.Э. Фаттаева Д.А.
Моделирование пространственно-временной динамики площади водоёма (на примере Каттакурганского водохранилища) на основе индексов NDWI, NDVI, EVI и ансамблевых методов обучения 61

Хажиев И.О., Шобдаров Э.Б.
Регуляризация начально-краевой задачи для неоднородного параболического уравнения с меняющимся направлением времени 74

Равшанов Н., Боборахимов Б.И., Бердиев М.И.
Модель и алгоритмы классификации аномальных явлений на основе сходимости акустико-визуальных сигналов 88

Рустамов Н., Мухамеджанов Н.Б.
Конструкция и принцип работы когенеративного фрактального солнечного коллектора 103

Холияров Э.Ч., Тураев Д.Ш.
Численное решение плоскорадиальной граничной обратной задачи для уравнения нестационарной релаксационной фильтрации жидкости в пористой среде 112

Ахмедов Д.М., Маматова Н.Х.
Оптимальный метод приближённого решения гиперсингулярных интегральных уравнений 124

Шадиметов Х.М., Элмуратов Г.Ч.
Оптимизация приближенного вычисления интегралов от быстроосцилирующих функций в пространстве Соболева комплекснозначных функций 132

Зиякулова Ш.А.
Об оптимальных итерационных и прямых методах решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона 143

Contents

Alimova N.B., Parovik R.I.
FrOsFHN software package for quantitative and qualitative analysis of the FitzHugh-Nagumo fractional oscillator with variable memory 5

Eshkulov M.U., Khamdamov R.Kh.
Design and analysis of solar water supply system for multi-story residential buildings based on Boolean programming 18

Ravshanov N., Usmonov L.S.
Three-dimensional mathematical model and numerical solution algorithm for monitoring and predicting in-situ leaching processes in porous medium 26

Kalandarov A.A.
Numerical simulation of the coupled dynamic problem of thermoelasticity in stresses 48

Ravshanov N., Rakhmanov Kh.E. Fattaeva D.A.
Modeling the spatio-temporal dynamics of a reservoir area (using the Kattakurgan Reservoir as an example) based on NDWI, NDVI, EVI indices and ensemble learning methods 61

Khajiev I.O., Shobdarov E.B.
Regularization of the initial-boundary value problem for a inhomogeneous parabolic equation with changing time direction 74

Ravshanov N., Boborakhimov B.I., Berdiev M.I.
Model and algorithms for classifying anomalous phenomena based on the convergence of acoustic-visual signals 88

Rustamov N., Mukhamejanov N.B.
Design and operating principle of a cogenerative fractal solar collector 103

Kholiyarov E.Ch., Turaev D.Sh.
Numerical solution of plane-radial boundary value inverse problem for the equation of non-stationary relaxation filtration of fluid in a porous medium 112

Akhmedov D.M., Mamatova N.H.
An optimal method for the approximate solution of the hypersingular integral equations 124

Shadimetov Kh.M., Elmuratov G.Ch.
Optimization of approximate computation of integrals of rapidly oscillating functions in the Sobolev space of complex-valued functions 132

Ziyakulova Sh.A.
On optimal iterative and direct methods for solving the Dirichlet problem for the Poisson equation 143

№ 6(70) 2025

ISSN 2181-8460

HISOBLASH VA AMALIY MATEMATIKA MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

RAQAMLI TEXNOLOGIYALAR VA
SUN'IY INTELLEKTNI RIVOJLANTIRISH
ILMIY-TADQIQOT INSTITUTI