

УДК 519.622.2

ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС FROSFHN ДЛЯ КОЛИЧЕСТВЕННОГО И КАЧЕСТВЕННОГО АНАЛИЗА ДРОБНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ФИТЦХЬЮ-НАГУМО С ПЕРЕМЕННОЙ ПАМЯТЬЮ*

¹ *Алимова Н.Б.*, ^{2*} *Паровик Р.И.*

*parovik@ikir.ru

¹Ташкентский государственный университет экономики,
Узбекистан, г. Ташкент, Ислама Каримова, 49;²Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН,
Россия, Камчатский край, с. Паратунка, ул. Мирная, д. 7.

В статье дается описание и приводятся примеры работы программного комплекса FrOsFHN для количественного и качественного анализа нелинейного осциллятора ФитцХью-Нагумо с переменной памятью (дробный осциллятор ФитцХью-Нагумо (FrOsFHN)). Переменная память учитывалась в модельном уравнении осциллятора ФитцХью-Нагумо с помощью производных типа Герасимова-Капуто переменных по времени дробных порядков. Количественный анализ в программном комплексе был реализован на основе численного алгоритма нелокальной явной конечно-разностной схемы первого порядка точности, а качественный анализ - на алгоритмах визуализации численного решения в виде осциллограмм, фазовых траекторий и бифуркационных диаграмм. Для проведения количественного анализа была реализована возможность выбора пользователем функциональной зависимости порядков дробных производных от времени: линейная убывающая функция, тригонометрическая функция, убывающая экспоненциальная функция. Для построения бифуркационных диаграмм была реализована возможность учитывать помимо последовательного алгоритма его параллельную версию, привлекая вычислительные ресурсы центрального процессора ЭВМ. В программном комплексе реализована возможность сохранять расчеты в текстовый файл, а также графики результатов. Программный комплекс был написан на языке Python в среде PyCharm.

Ключевые слова: дробный осциллятор ФитцХью-Нагумо, осциллограммы, фазовые траектории, нелокальная явная конечно-разностная схема, алгоритмы, Python, PyCharm, бифуркационная диаграмма.

Цитирование: Алимова Н.Б., Паровик Р.И. Программный комплекс FrOsFHN для количественного и качественного анализа дробного осциллятора ФитцХью-Нагумо с переменной памятью // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2025. – № 6(70). – С. 5-17.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.6_70.2025.01

1 Введение

Основой настоящего исследования служит классическая колебательная система (осциллятор) ФитцХью-Нагумо [1, 2], которая была разработана в 1960-х годах как упрощение модели Ходжкина-Хаксли [3]. Данный осциллятор описывает динамику двух переменных: быстрой «возбуждающей» (мембранный потенциал) и медленной

*Работа выполнена в рамках государственного задания ИКИР ДВО РАН №124012300245-2.

«восстанавливающей» (ток восстановления), и широко используется для моделирования автоколебательных процессов активации и деактивации нейронов. Отметим, что помимо точечного осциллятора ФитцХью-Нагумо, существует ее пространственно-распределенный вариант, учитывающий распространение возбуждения и описываемый уравнениями диффузионного типа [4].

Обобщение классического осциллятора ФитцХью-Нагумо, которое включало учет эффекта наследственности, впервые было предложено в работах [6–8]. Напомним, что наследственность – это свойство системы сохранять память о предыдущих состояниях, в том числе в условиях внешнего воздействия, отклик на которое проявляются с задержкой во времени. Математический аппарат для описания таких систем основан на интегро-дифференциальных уравнениях вольтеровского типа [9]. В частном случае, если степенная функция памяти, то модельные интегро-дифференциальные уравнения могут быть сведены к дифференциальным уравнениям с дробными производными [5], а соответствующий осциллятор будет называться дробным [10]. В статьях [6–8] исследовался дробный осциллятор ФитцХью-Нагумо в терминах дробной производной Герасимова-Капуто постоянного порядка [11, 12] и постоянной интенсивности раздражителя, далее были исследованы количественные и качественные свойства его решения, которые характеризует тот или иной колебательный режим.

В работах [13, 14] было проведено дальнейшее развитие исследования дробного осциллятора ФитцХью-Нагумо, которое заключалось в учете переменных по времени порядков дробных производных типа Герасимова-Капуто и интенсивности раздражителя. Было показано с помощью компьютерных экспериментов, что в этом случае существуют предельные циклы, которые могут быть устойчивыми. С помощью бифуркационных диаграмм было показана смена различных колебательных режимов в зависимости от изменения значений ключевых модельных параметров.

Целью настоящей работы является разработка программного комплекса, который позволит проводить количественный и качественный анализ колебательных режимов дробного осциллятора ФитцХью-Нагумо с переменной памятью и интенсивностью раздражителя.

2 Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу Коши [14]:

$$\begin{aligned} \partial_{0t}^{\alpha(t)} x(t) - c(x^2(t) + p) \partial_{0t}^{\beta(t)} x(t) + qx(t) + gx^3(t) &= a + bz(t), \\ x(0) = k_1, \dot{x}(0) &= k_2, \end{aligned} \quad (1)$$

где a, b, c – константы, удовлетворяющие условиям $1 - 2b/3 < a < 1, 0 < b < 1, b < c^2$, $x(t) \in C^2[0, T]$ – мембранный потенциал, $q, g > 0$ – заданные константы, $z(t) \in C[0, T]$ – функция внешнего воздействия, которая отвечает за интенсивность раздражителя, $t \in [0, T]$ – время рассматриваемого процесса, $T > 0$ – время моделирования, k_1, k_2 – константы, которые определяют начальные условия, операторы дробных производных переменных порядков имеют вид:

$$\begin{aligned} \partial_{0t}^{\alpha(t)} x(t) &= \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha(t))} \int_0^t \frac{\ddot{x}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\alpha(t)-1}}, \\ \partial_{0t}^{\beta(t)} x(t) &= \frac{1}{\Gamma(1 - \beta(t))} \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\beta(t)}}, \end{aligned}$$

понимаются в смысле типа Герасимова-Капуто [11, 12] с дробными $1 < \alpha(t) < 2$, $0 < \beta(t) < 1$ являются функциями из класса $C[0, T]$.

Отметим, что свойства производных дробных переменных порядков, а также ссылки на соответствующие литературные источники можно найти в обзорных статьях [15, 16].

Задачу Коши (1) мы будем называть дробным осциллятором ФицХью-Нагумо. Он описывает нелинейные автоколебания с учетом переменной наследственности и внешнего воздействия (интенсивностью раздражителя).

Отметим, что в случае, когда $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $z(t)$ являются константами мы приходим к результатам, полученным в работах [6–8]. В случае, когда $\alpha(t) = \beta(t) = 1$ и $z(t)$ является константой, то мы переходим к классическому осциллятору ФитцХью-Нагумо [1, 2].

В работах [13, 14] в качестве методики решения задачи Коши (1) был выбран численный алгоритм на основе нелокальной явной конечно-разностной схеме. В статье [14] с помощью правила Рунге и компьютерного моделирования было показано, что вычислительная точность численного алгоритма при увеличении узлов расчетной сетки стремиться к единице.

Также можно отметить, что численный алгоритм условно устойчив, это определяется ограничением на шаг дискретизации расчетной сетки.

В настоящей работе мы дадим описание программному комплексу FrOsFHN, в котором был реализован, указанный выше численный алгоритм для расчета осциллограмм, фазовых траекторий и бифуркационных диаграмм.

3 Программный комплекс FrOsFHN

Программный комплекс FrOsFHN был разработан на языке Python [17] в среде PyCharm [18]. Программный комплекс имеет простой понятный интерфейс (рис. 1).

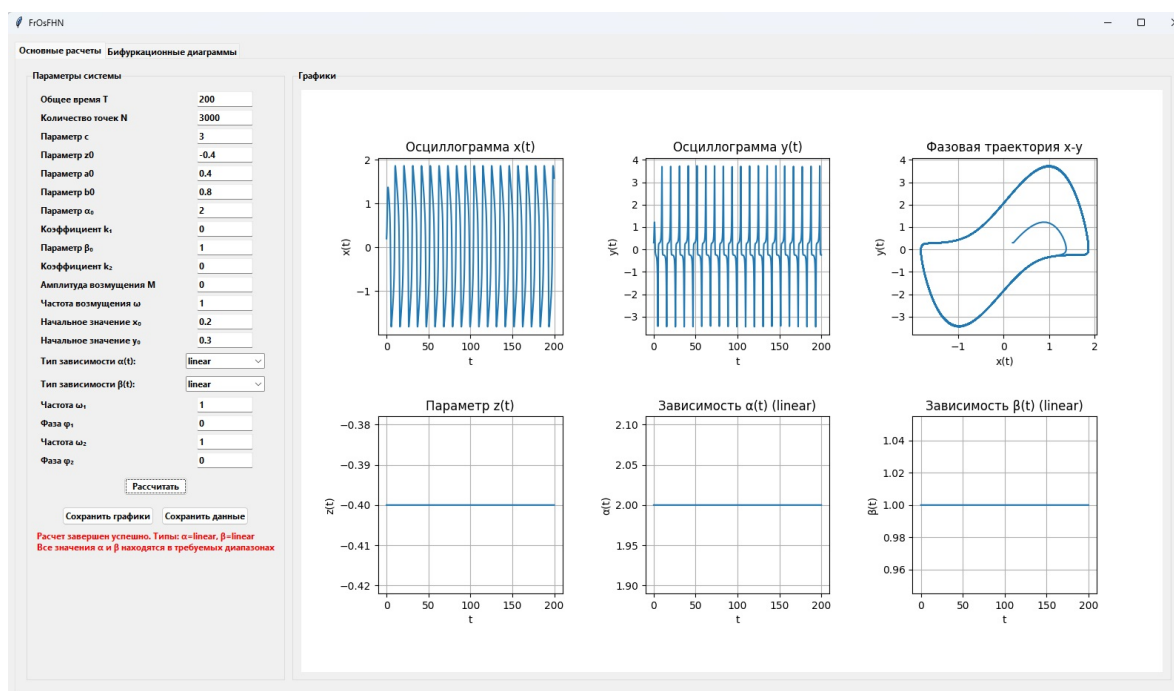


Рис. 1 Скриншот главного окна "Основные расчеты" программного комплекса FrOsFHN

На рис.1 мы видим, что интерфейс главного окна "Основные расчеты" имеет поля для ввода пользователем значений параметров дробного осциллятора ФитцХью-Нагумо (1) и возможности проведения расчета по численному алгоритму, основанному на нелокальной явной конечно-разностной схеме первого порядка [14].

Псевдокод алгоритма основного расчета по данной схеме приведен ниже.

Алгоритм 1 CalculateSystem(*params*)

Вход: Параметры системы: $T, N, c, z_0, a_0, b_0, \alpha_0, k_1, \beta_0, k_2, M, \omega, x_0, y_0$

Выход: Массивы x, y, z, α, β

```

1:  $\tau \leftarrow T/N$ 
2:  $p \leftarrow b_0^2/c - 1$ 
3:  $q \leftarrow 1 - b_0$ 
4:  $g \leftarrow b_0/3$ 
5: Инициализировать массивы:  $x[0..N], y[0..N], z[0..N - 1], \alpha[0..N - 1], \beta[0..N - 1], A[0..N - 1], B[0..N - 1]$ 
6:  $x[0] \leftarrow x_0, y[0] \leftarrow y_0$ 
7:  $x[1] \leftarrow \tau \cdot y[0] + x[0]$ 
8:  $y[1] \leftarrow (x[1] - x[0])/\tau$ 
9: для  $i = 0$  to  $N - 1$ 
10:    $z[i] \leftarrow z_0 + M \cdot \sin(\omega \cdot \tau \cdot i)$ 
11:    $\alpha[i], \beta[i] \leftarrow \text{CalculateAlphaBeta}(i, \tau, T, \alpha_{\text{type}}, \beta_{\text{type}}, \alpha_0, k_1, \beta_0, k_2, \omega_1, \varphi_1, \omega_2, \varphi_2)$ 
12:   Ограничить  $\alpha[i] \in [0.001, 2.0], \beta[i] \in [0.001, 1.0]$ 
13:    $A[i] \leftarrow \tau^{-\alpha[i]}/\Gamma(3 - \alpha[i])$ 
14:    $B[i] \leftarrow \tau^{-\beta[i]}/\Gamma(2 - \beta[i])$ 
15: для  $k = 1$  to  $N - 1$ 
16:    $S_1 \leftarrow 0, S_2 \leftarrow 0$ 
17:   для  $j = 1$  to  $k - 1$ 
18:      $S_1 \leftarrow S_1 + [(j + 1)^{1-\beta[k]} - j^{1-\beta[k]}] \cdot (x[k - j + 1] - x[k - j])$ 
19:      $S_2 \leftarrow S_2 + [(j + 1)^{2-\alpha[k]} - j^{2-\alpha[k]}] \cdot (x[k - j + 1] - 2x[k - j] + x[k - j - 1])$ 
20:     numerator  $\leftarrow a_0 + b_0 \cdot z[k] + (2A[k] + c \cdot B[k] \cdot (x[k]^2 + p) - q) \cdot x[k] - x[k]^3 \cdot g -$ 
21:        $- A[k] \cdot x[k - 1] - B[k] \cdot c \cdot (x[k]^2 + p) \cdot S_1 - A[k] \cdot S_2$ 
22:     denominator  $\leftarrow A[k] + c \cdot B[k] \cdot (x[k]^2 + p)$ 
23:     если  $|\text{denominator}| < \varepsilon$  то
24:        $x[k + 1] \leftarrow x[k]$ 
25:     иначе
26:        $x[k + 1] \leftarrow \text{numerator}/\text{denominator}$ 
27:        $y[k + 1] \leftarrow (x[k + 1] - x[k])/\tau$ 
28: return  $x, y, z, \alpha, \beta$ 

```

Также на рис. 1 мы можем увидеть возможность вывода результатов расчета в отдельном графическом окне. Выводятся следующие графики: осциллограммы для мембранного потенциала $x(t)$ и его скорости $y(t) = \dot{x}(t)$, фазовой траектории, построенной по координатам $(x(t), y(t))$, функции внешнего воздействия или интенсивности раздражителя $z(t)$, функций порядков $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ дробных производных типа Герасимова-Капуто.

Функция интенсивности раздражителя $z(t)$ реализована в Алгоритме 1 виде тригонометрической функции. Кроме того, функции $1 < \alpha(t) < 2$ и $0 < \beta(t) < 1$ можно

выбирать из выпадающего списка "Тип зависимости" в виде убывающих линейных функций, тригонометрических функций, убывающих экспоненциальных функций, причем эти функции можно комбинировать между собой.

В программе реализован также контроль за значениями этих функций, которые не должны выходить за рамки соответствующих диапазонов. Алгоритм выбора функций $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ в программном комплексе можно представить в следующем псевдокоде (Алгоритм 2).

Алгоритм 2 CalculateAlphaBeta($i, \tau, T, \alpha_{\text{type}}, \beta_{\text{type}}, \alpha_0, k_1, \beta_0, k_2, \omega_1, \varphi_1, \omega_2, \varphi_2$)

Вход: Индекс i , шаг τ , общее время T , типы зависимостей, параметры

Выход: Значения α, β

```

1: // Вычисление  $\alpha[i]$ 
2: если  $\alpha_{\text{type}} = \text{linear}$  то
3:    $\alpha \leftarrow \alpha_0 - k_1 \cdot \tau \cdot i / T$ 
4: иначе если  $\alpha_{\text{type}} = \text{cosine}$  то
5:    $\alpha \leftarrow \alpha_0 - k_1 \cdot \cos(\tau \cdot i \cdot \omega_1 + \varphi_1)$ 
6: иначе если  $\alpha_{\text{type}} = \text{exponential}$  то
7:    $\alpha \leftarrow \alpha_0 - k_1 \cdot \exp(-\tau \cdot i \cdot \omega_1)$ 
8: иначе
9:    $\alpha \leftarrow \alpha_0 - k_1 \cdot \tau \cdot i / T$  // линейная по умолчанию
10: // Вычисление  $\beta[i]$ 
11: если  $\beta_{\text{type}} = \text{linear}$  то
12:    $\beta \leftarrow \beta_0 - k_2 \cdot \tau \cdot i / T$ 
13: иначе если  $\beta_{\text{type}} = \text{cosine}$  то
14:    $\beta \leftarrow \beta_0 - k_2 \cdot \cos(\tau \cdot i \cdot \omega_2 + \varphi_2)$ 
15: иначе если  $\beta_{\text{type}} = \text{exponential}$  то
16:    $\beta \leftarrow \beta_0 - k_2 \cdot \exp(-\tau \cdot i \cdot \omega_2)$ 
17: иначе
18:    $\beta \leftarrow \beta_0 - k_2 \cdot \tau \cdot i / T$  // линейная по умолчанию
19: return  $\alpha, \beta$ 

```

На вкладке "Бифуркационные диаграммы" главного окна программного комплекса FrOsFHN (рис. 2) пользователь может ввести параметры для расчета бифуркационной диаграммы в зависимости от значений ключевых параметров задачи (1).

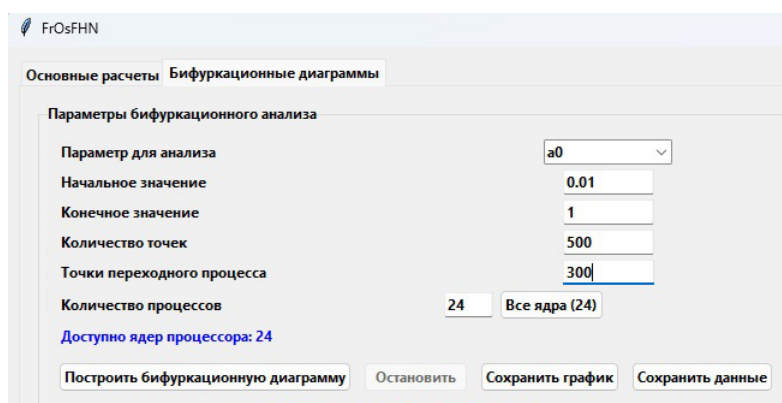


Рис. 2 Скриншот окна "Бифуркационные диаграммы" программного комплекса FrOsFHN

Напомним, что бифуркационная диаграмма – это график, который показывает, как качественное поведение динамической системы (например, её устойчивые состояния) изменяется в зависимости от значения одного или нескольких управляющих параметров. В качестве таких ключевых параметров в программном комплексе выступают параметры: $a_0, b_0, z_0, c, \alpha_0, \beta_0, k_1, k_2, M, \omega$. Пользователь выбирает один из перечисленных параметров, вводит диапазон его изменения (начальное и конечное значения), количество точек (шаг дискретизации) в рассматриваемом диапазоне, количество точек переходного процесса. Количество точек переходного процесса – это то количество точек, которое участвует в переходном процессе, система "забывает" свое начальное условие и "притягивается" к своему устойчивому состоянию (аттрактору). Эти точки не наносятся на бифуркационную диаграмму. Нужно здесь учитывать, что количество точек должно быть достаточно большим иначе бифуркационная диаграмма будет искажена. Алгоритм построения бифуркационной диаграммы приведен в следующем псевдокод (Алгоритм 3).

Алгоритм 3 BifurcationAnalysis($param_{name}, start, end, points, transient, processes$)

Вход: Имя параметра, диапазон, количество точек, переходный процесс, процессы

Выход: Бифуркационная диаграмма

```

1:  $param_{values} \leftarrow linspace(start, end, points)$ 
2:  $results \leftarrow \emptyset$ 
3: если  $processes = 1$  то
4:   для  $i = 0$  то  $points - 1$ 
5:     если  $stop_{flag}$  то
6:       break
7:      $point_{result} \leftarrow CalculateSinglePoint(param_{values}[i])$ 
8:      $results \leftarrow results \cup point_{result}$ 
9:      $UpdateProgress(i/points)$ 
10: иначе
11:    $executor \leftarrow ProcessPoolExecutor(max\_workers = processes)$ 
12:    $futures \leftarrow \emptyset$ 
13:   для  $param_{value} \in param_{values}$ 
14:     если  $stop_{flag}$  то
15:       break
16:      $future \leftarrow executor.submit(CalculateSinglePoint, param_{value})$ 
17:      $futures \leftarrow futures \cup \{future\}$ 
18:    $completed \leftarrow 0$ 
19:   для  $future \in as\_completed(futures)$ 
20:     если  $stop_{flag}$  то
21:        $CancelRemainingFutures()$ 
22:       break
23:      $result \leftarrow future.result()$ 
24:      $results \leftarrow results \cup result$ 
25:      $completed \leftarrow completed + 1$ 
26:      $UpdateProgress(completed/points)$ 
27:    $executor.shutdown()$ 
28:  $PlotBifurcationDiagram(results)$ 
29:  $SaveResults(results)$ 

```

В Алгоритме 3 для параллельных вычислений на CPU используется процедура ProcessPoolExecutor (Алгоритм 4).

Алгоритм 4 Использование ProcessPoolExecutor для параллельных вычислений

```

1: Инициализация многопроцессорности: InitializeMultiprocessing
2: cpu_cores ← multiprocessing.cpu_count() // Определение количества ядер
3: processes ← min(user_input, cpu_cores) // Ограничение разумным значением
4: executor ← ProcessPoolExecutor(max_workers=processes)
5: futures ← [] // Массив для отслеживания задач

1: Параллельное выполнение задач: ParallelExecutionparam_values, base_
   params, param_name, transient
2: Создание задач:
3: для each param_value ∈ param_values
4:   если stop_calculation то
       break
5:   args ← (base_params.copy(), param_value, param_name, transient)
6:   future ← executor.submit(calculate_single_point, args)
7:   futures ← futures ∪ future
8: Обработка результатов:
9: completed ← 0
10: total ← len(param_values)
11: results ← []
12: для each future ∈ as_completed(futures)
13:   если stop_calculation то
       CancelAllFutures()
       break
14:   result ← future.result() // Блокировка до получения результата
15:   results ← results ∪ result
16:   completed ← completed + 1
17:   UpdateProgress(completed, total)
18: return results

1: Архитектура пула процессов: ProcessPoolArchitecture
2: • Главный процесс: UI, координация, сбор результатов
3: • Worker процессы: Независимые вычисления calculate_single_point
4: • Очередь задач: Автоматическое распределение executor
5: • Межпроцессное взаимодействие: Сериализация через pickle

```

Основная идея распараллеливания в построении бифуркационной диаграммы – разбиение массива значений параметра на несколько частей и вычисление каждой такой части в отдельном процессе (поток).

Выбор ProcessPoolExecutor определялся следующими преимуществами:

- Автоматическое управление пулом. Не нужно создавать/удалять процессы вручную.
- Балансировка нагрузки. Равномерное распределение задач.
- Очередь результатов: `as_completed()` для обработки по готовности.
- Обработка исключений. Исключения в воркерах не уничтожают главный процесс.

- Контроль времени жизни. Автоматическое завершение при выходе из контекста.
- Кроссплатформенность. Работает на Windows/Linux/macOS.

Особенность Алгоритма 4 заключается в том, что он автоматически вычисляет количество потоков центрального процессора (CPU). Это дает дополнительную информацию пользователю об оптимальном выборе необходимого количества потоков для построения бифуркационной диаграммы. Также выводится информация в виде текстового сообщения о времени выполнения алгоритма и нагрузке на CPU в процентах. Кроме того, если выбраны не верные параметры алгоритма, то всегда можно остановить расчет и провести его коррекцию.

4 Результаты исследования

Рассмотрим некоторые примеры работы программного комплекса FrOsFHN.

Пример 1. Классический осциллятор ФитцХью-Нагумо [1, 2]. Значения параметров задачи выберем как на рис. 1, бифуркационная диаграмма приведена на рис. 2. Отметим, что на рис. 1 построен пример для классического осциллятора ФитцХью-Нагумо, когда $z(t) = z_0$ является константой, а $\alpha(t) = \alpha_0 = 2$, $\beta(t) = \beta_0 = 1$.

Бифуркационная диаграмма на рис. 2 указывает на то, что есть две области кардинального изменения функции $x(a_0)$: $a_0 \in [0.01, 0.69]$ и $a_0 \in [0.7, 1]$. Выберем значения из этих областей и построим фазовые траектории (рис. 3).

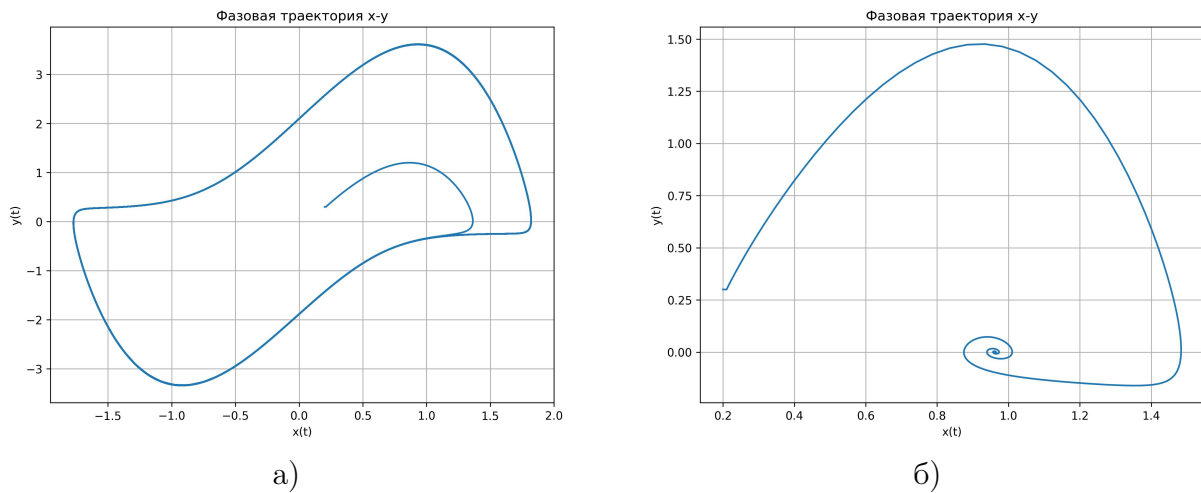


Рис. 3 Фазовые траектории классического осциллятора ФитцХью-Нагумо: а) $a_0 = 0.4$, б) $a_0 = 0.75$

На рис. 3 мы видим, что фазовая траектория (рис. 3а) выходит на предельный цикл, характеризующая релаксационные колебания, а фазовая траектория (рис. 3б) представляет собой закручивающуюся спираль около точки равновесия системы, которая называется устойчивым фокусом. Кроме того известно, что модельное уравнение классического осциллятора ФитцХью-Нагумо принадлежит к классу уравнений Льенаровского типа [19]. Поэтому предельный цикл на рис. 3а является единственным и устойчивым.

Исходя из выше сказанного, мы можем сделать вывод о том, что мембранный потенциал $x(a_0)$ при $a_0 \in [0.01, 0.69]$ совершает релаксационные колебания, на интервале $a_0 \in [0.7, 1]$ – затухающие колебания. Отметим, что в точках, граничащих с точками смены этих режимов, могут возникать и другие режимы (рис. 4).

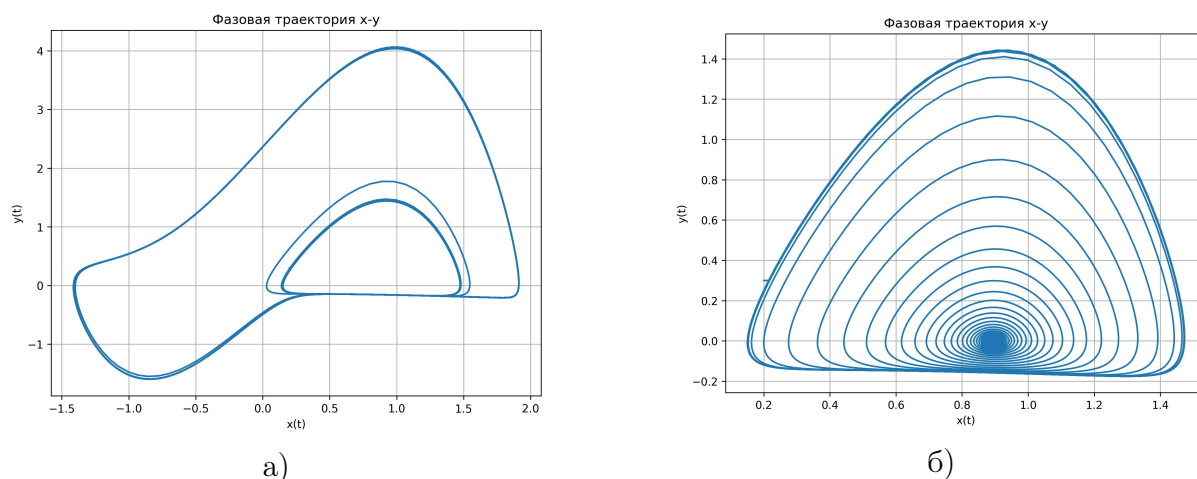


Рис. 4 Фазовые траектории классического осциллятора ФитцХью-Нагумо:
а) $a_0 = 0.69031047$, б) $a_0 = 0.69031048$

На рис. 4а приведена фазовая траектория, построенная при значении $a_0 = 0.69031047$ и которая описывает двух периодичный колебательный режим. Однако уже при значении $a_0 = 0.69031048$ фазовая траектория описывает другой колебательный режим (рис. 4б): сначала фазовая траектория наматывается с каким-то периодом, а потом срывается в закручивающуюся спираль.

Пример 2. Дробный осциллятор ФитцХью-Нагумо [6–8]. Мы выберем значение $\beta_0 = 0.7$, количество точек для построения бифуркационной диаграммы 800, остальные параметры остаются без изменения.

На рис. 5 мы видим две бифуркационные диаграммы, построенные при $\alpha_0 = 1.6$ (рис. 5а) и при $\alpha_0 = 1.8$ (рис. 5б).

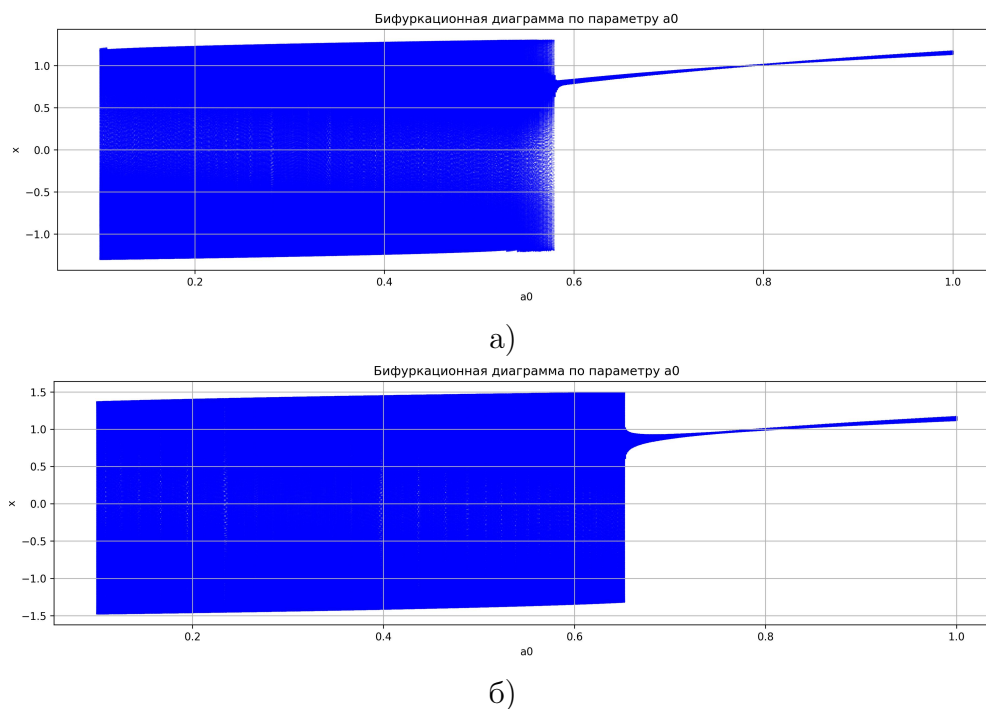


Рис. 5 Фазовые траектории классического осциллятора ФитцХью-Нагумо:
а) $\alpha_0 = 1.6$, б) $\alpha_0 = 1.8$

При уменьшении значений α_0 сужается область релаксационных колебаний, область затухающих колебаний расширяется. Это подтверждает полученные ранее результаты о том, что порядок дробной производной α_0 связан с добротностью колебательной системы [20, 21].

Пример 3. Дробный осциллятор ФитцХью-Нагумо [14]. Значения параметров: $T = 100, N = 3000, \alpha_0 = 1.8, \beta_0 = 0.9, z_0 = -0.4, c = 3, b_0 = 0.8, k_1 = 0.03, k_2 = 0.01, M = 0.3, \omega = 1.25, \omega_1 = 3, \omega_2 = 1.5, \varphi_1 = \varphi_2 = 0$.

Выберем функции в задаче Коши (1):

$$z(t) = z_0 + M \sin(\omega t), \alpha(t) = \alpha_0 - k_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \beta(t) = \beta_0 - k_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \quad (2)$$

что соответствует методу cosine в главном окне программного комплекса на вкладке "Основные расчеты".

На рис.6 приведена бифуркационная диаграмма для Примера 3. Здесь мы видим две области изменения параметра a_0 , в которых существуют режимы отличные друг от друга. Например, на рис. 6 приведены фазовые траектории при значениях $a_0 = 0.6$ и $a_0 = 0.8$.

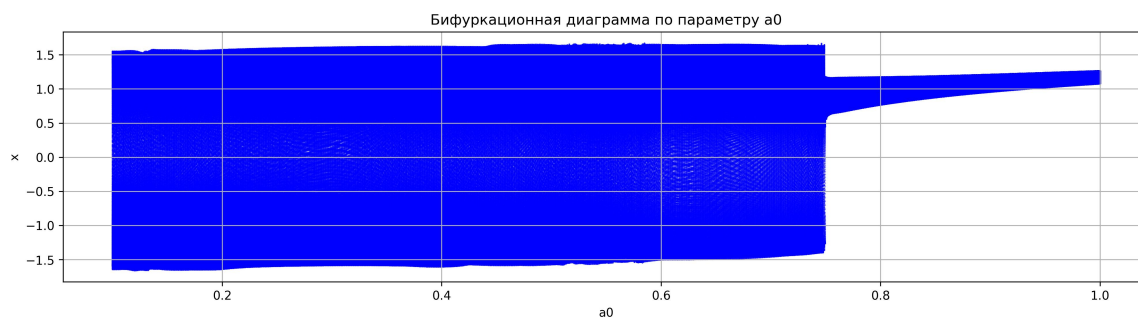


Рис. 6 Бифуркационная диаграмма $x(a_0)$ для Примера 3

На рис. 7а фазовая траектория соответствует хаотическому режиму (хаотический аттрактор), а на рис. 7б фазовая траектория соответствует предельному циклу, который определяется зависимостью $z(t)$ в формуле (2).

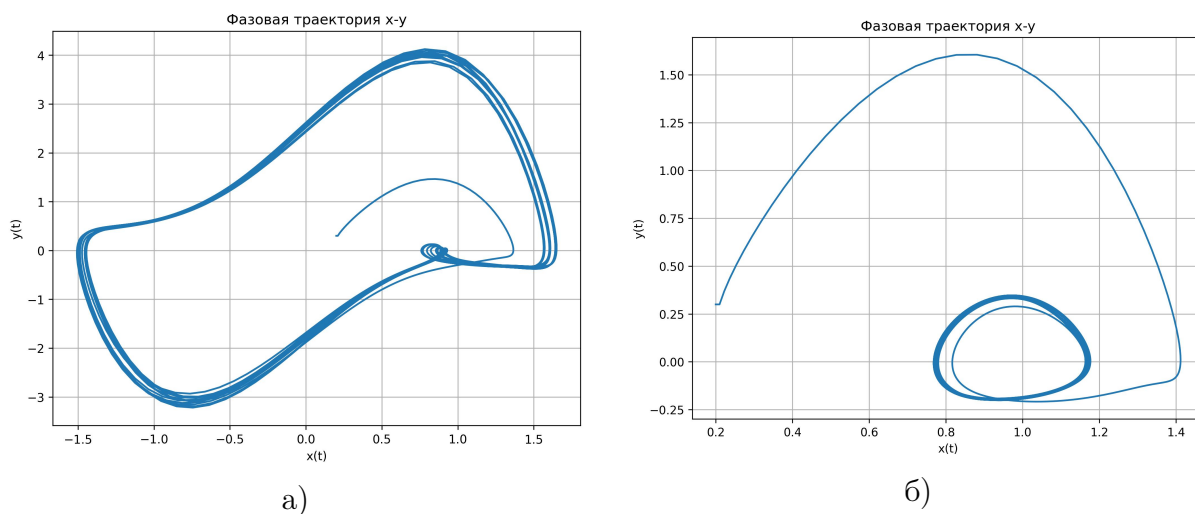


Рис. 7 Фазовые траектории дробного осциллятора ФитцХью-Нагумо [14]: а) $a_0 = 0.6$, б) $a_0 = 0.8$

Наличие хаотических режимов указывает на то, что необходимо дополнительно их исследовать, например, с помощью методов нелинейной динамики, определить условиях их существования. Однако такое исследование выходит за рамки настоящей статьи.

5 Заключение

В работе дается описание и приводятся примеры работы программного комплекса FrOsFHN, написанного на языке программирования Python для качественного и количественного анализа дробного осциллятора ФитцХью-Нагумо с переменной памятью и внешним воздействием. Программный комплекс позволяет с помощью нелокальной явной конечно-разностной схемы с первым порядком точности строить графики осциллограмм, фазовых траекторий и бифуркационных диаграмм в зависимости от различных значений параметров. В программном комплексе реализована возможность выбора вида функций от времени для порядков дробных производных типа Герасимова-Капуто и для внешнего воздействия – интенсивности раздражителя.

В статье приводятся описание основных алгоритмов реализованных в программном комплексе, в том числе алгоритмы распараллеливания на CPU для расчета бифуркационных диаграмм. Также показана работа программного комплекса на некоторых примерах. Результаты, полученные в рамках рассматриваемых примеров, согласуются ранее известными результатами, что в свою очередь указывает на корректность реализации алгоритмов расчета.

Дальнейшее продолжение работы связано с построением бифуркационных диаграмм в зависимости от значений других ключевых параметров дробного осциллятора ФитцХью-Нагумо. Согласно полученным бифуркационным диаграммам провести установление различных динамических режимов, которые будут подтверждены осциллограммами и фазовыми траекториями. Другое направление исследований связано с изучением условий существования хаотических режимов с помощью методов нелинейной динамики, а также построение карт динамических режимов, для которого потребуется привлечь значительные вычислительные ресурсы.

Литература

- [1] *FitzHugh R.* Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // *Biophysical Journal*. – 1961. – Vol. 1, Issue 6. – P. 445-466. – doi: [http://dx.doi.org/10.1016/S0006-3495\(61\)86902-6](http://dx.doi.org/10.1016/S0006-3495(61)86902-6).
- [2] *Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S.* An active pulse transmission line simulating nerve axon // *Proceedings of the IRE*. – 1962. – Vol. 50, Issue 10. – P. 2061-2070. – doi: <http://dx.doi.org/10.1109/JRPROC.1962.288235>.
- [3] *Hodgkin A.L., Huxley A.F.* A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve // *J. Physiol.* – 1952. – Vol. 117, Issue 4. – P. 500-544. – doi: <http://dx.doi.org/10.1113/jphysiol.1952.sp004764>.
- [4] *Казарников А.В., Ревина С.В.* Монотонная неустойчивость в системе ФитцХью-Нагумо с диффузией // *Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки*. – 2018. – № 4(200). – С. 18-24.
- [5] *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. – М.: Физматлит, 2003. – 272 с.
- [6] *Lipko O.D.* Mathematical model of propagation of nerve impulses with regard hereditarity // *Vestnik KRAUNC. Fiziko-matematicheskie nauki*. – 2017. – № 1(17). – P. 33-43. – doi: <http://dx.doi.org/10.18454/2079-6641-2017-17-1-33-43>.

- [7] *Lipko O.D., Parovik R.I.* Some aspects of investigation of limit cycles of Fitzhugh-Nagumo oscillator with degree memory // Journal of Physics: Conference Series. – 2018. – Vol. 1141. – Art. 012125. – doi: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1141/1/012125>.
- [8] *Lipko O.D., Parovik R.I.* The study of chaotic and regular regimes of the fractal oscillators FitzHugh-Nagumo // E3S Web of Conferences. – 2018. – Vol. 62. – Art. 02017. – doi: <http://dx.doi.org/10.1051/e3sconf/20186202017>.
- [9] *Volterra V.* Functional theory, integral and integro-differential equations. – New York: Dover Publications, 2005. – 288 p.
- [10] *Паровик Р.И.* Хаотические и регулярные режимы дробных осцилляторов. – Петропавловск-Камчатский: КАМЧАТПРЕСС, 2019. – 132 с.
- [11] *Novozhenova O.G.* Life and science of Alexey Gerasimov, one of the pioneers of fractional calculus in Soviet Union // Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2017. – Vol. 20, Issue 3. – P. 790-809. – doi: <http://dx.doi.org/10.1515/fca-2017-0040>.
- [12] *Caputo M., Fabrizio M.* On the notion of fractional derivative and applications to the hysteresis phenomena // Meccanica. – 2017. – Vol. 52, Issue 13. – P. 3043-3052. – doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s11012-017-0652-y>.
- [13] *Алимова Н.Б.* Математическое моделирование автоколебаний нейрона в клеточной мембране с использованием дробной модели ФитцХью-Нагумо с функцией интенсивности раздражителя // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. – 2024. – Т. 48, № 3. – С. 56-69. – doi: <http://dx.doi.org/10.26117/2079-6641-2024-48-3-56-69>.
- [14] *Алимова Н.Б., Паровик Р.И.* Осциллятор ФитцХью-Нагумо с переменной наследственностью и внешним воздействием // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2025. – № 1(63). – С. 5-16. – doi: http://dx.doi.org/10.71310/pcam.1__63.2025.01.
- [15] *Sun H., Chang A., Zhang Y., Chen W.* A review on variable-order fractional differential equations: mathematical foundations, physical models, numerical methods and applications // Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2019. – Vol. 22, Issue 1. – P. 27-59. – doi: <http://dx.doi.org/10.1515/fca-2019-0003>.
- [16] *Patnaik S., Holikamp J.P., Semperlotti F.* Applications of variable-order fractional operators: a review // Proc. R. Soc. A. – 2020. – Vol. 476, Issue 2234. – Art. 20190498. – doi: <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2019.0498>.
- [17] *Shaw Z.A.* Learn Python the Hard Way. – 5th ed. – Boston: Addison-Wesley Professional, 2024. – 352 p.
- [18] *Van Horn B.M. II, Nguyen Q.* Hands-On Application Development with PyCharm: Build Applications like a Pro with the Ultimate Python Development Tool. – 2nd ed. – Birmingham: Packt Publishing, 2023. – 652 p.
- [19] *Liénard A.* Etude des oscillations entretenues // Revue générale de l'électricité. – 1928. – Vol. 23. – P. 901-912, 946-954.
- [20] *Pskhu A.V., Rekhviashvili S.Sh.* Analysis of forced oscillations of a fractional oscillator // Technical Physics Letters. – 2018. – Vol. 44, Issue 12. – P. 1218-1221. – doi: <http://dx.doi.org/10.1134/S1063785019010164>.
- [21] *Паровик Р.И.* Анализ добротности вынужденных колебаний дробного линейного осциллятора // Журнал технической физики. – 2020. – Т. 90, № 7. – С. 1059-1063. – doi: <http://dx.doi.org/10.21883/JTF.2020.07.49436.233-19>.

UDC 519.622.2

FROSFHN SOFTWARE PACKAGE FOR QUANTITATIVE AND QUALITATIVE ANALYSIS OF THE FITZHUGH-NAGUMO FRACTIONAL OSCILLATOR WITH VARIABLE MEMORY*

¹ *Alimova N.B.*, ^{2*} *Parovik R.I.*

*parovik@ikir.ru

¹Tashkent State University of Economics,
Islom Karimov 49, Tashkent, Uzbekistan;²Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS,
Mirnaya st., 7, Kamchatka, Paratunka, Russia.

This article describes and provides examples of the FrOsFHN software package for the quantitative and qualitative analysis of a nonlinear FitzHugh-Nagumo oscillator with variable memory (the fractional FitzHugh-Nagumo oscillator (FrOsFHN)). Variable memory was taken into account in the FitzHugh-Nagumo oscillator model equation using fractional-order derivatives of the Gerasimov-Caputo type with respect to time. The quantitative analysis in the software package was implemented based on a numerical algorithm for a nonlocal explicit finite-difference scheme of first-order accuracy, and the qualitative analysis was implemented using algorithms for visualizing the numerical solution in the form of oscillograms, phase trajectories, and bifurcation diagrams. To conduct the quantitative analysis, the user was able to select the functional dependence of the fractional derivative orders on time: a linear decreasing function, a trigonometric function, or a decreasing exponential function. To construct bifurcation diagrams, we implemented the ability to consider a parallel version of the algorithm in addition to the sequential version, leveraging the computing resources of the computer's central processor. The software package also features the ability to save calculations to a text file, as well as result graphs. The software package was written in Python using the PyCharm environment.

Keywords: FitzHugh-Nagumo fractional oscillator, oscillograms, phase trajectories, nonlocal explicit finite-difference scheme, algorithms, Python, PyCharm, bifurcation diagram.

Citation: Alimova N.B., Parovik R.I. 2025. FrOsFHN software package for quantitative and qualitative analysis of the FitzHugh-Nagumo fractional oscillator with variable memory. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 6(70): 5-17.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.6_70.2025.01

*The work was carried out within the framework of the state assignment of IKIR FEB RAS (no. 124012300245-2).

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 6(70) 2025

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Арипов М.М., Шадиметов Х.М., Ахмедов Д.Д.

Ответственный секретарь:

Убайдуллаев М.Ш.

Редакционный совет:

Азамов А.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Арушанов М.Л.,
Бурнашев В.Ф., Джумаёзов У.З., Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия),
Игнатъев Н.А., Ильин В.П. (Россия), Иманкулов Т.С. (Казахстан),
Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия), Карачик В.В. (Россия),
Курбонов Н.М., Маматов Н.С., Мирзаев Н.М., Мухамадиев А.Ш., Назирова Э.Ш.,
Нормуродов Ч.Б., Нуралиев Ф.М., Опанасенко В.Н. (Украина),
Расулмухамедов М.М., Расулов А.С., Садуллаева Ш.А.,
Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А., Хамдамов Р.Х.,
Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Чье Ен Ун (Россия), Шабозов М.Ш. (Таджикистан),
Dimov I. (Болгария), Li Y. (США), Mascagni M. (США), Min A. (Германия),
Singh D. (Южная Корея), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

Дизайн и вёрстка:

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТТИ.

Подписано в печать 25.12.2025 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №8. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 6(70) 2025

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

Editor-in-Chief:

Ravshanov N.

Deputy Editors:

Aripov M.M., Shadimetov Kh.M., Akhmedov D.D.

Executive Secretary:

Ubaydullaev M.Sh.

Editorial Council:

Azamov A.A., Aloev R.D., Amirgaliev E.N. (Kazakhstan), Arushanov M.L.,
Burnashev V.F., Djumayozov U.Z., Zagrebina S.A. (Russia), Zadorin A.I. (Russia),
Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia), Imankulov T.S. (Kazakhstan), Ismagilov I.I. (Russia),
Kabanikhin S.I. (Russia), Karachik V.V. (Russia), Kurbonov N.M., Mamatov N.S.,
Mirzaev N.M., Mukhamadiev A.Sh., Nazirova E.Sh., Normurodov Ch.B., Nuraliev F.M.,
Opanasenko V.N. (Ukraine), Rasulov A.S., Sadullaeva Sh.A., Starovoitov V.V. (Belarus),
Khayotov A.R., Khaldjigitov A., Khamdamov R.Kh., Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh.,
Chye En Un (Russia), Shabozov M.Sh. (Tajikistan), Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA),
Mascagni M. (USA), Min A. (Germany), Singh D. (South Korea), Singh M. (South
Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the
Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.

The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.
Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

Address:

100125, Tashkent, Buz-2, 17A.

Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

E-mail: journals@airi.uz.

Web-site: <https://journals.airi.uz>.

Layout design:

Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.

Signed for print 25.12.2025

Format 60x84 1/8. Order No. 8. Print run of 100 copies.

Содержание

Алимова Н.Б., Паровик Р.И.

Программный комплекс FrOsFHN для количественного и качественного анализа дробного осциллятора ФитцХью-Нагумо с переменной памятью 5

Эшкуллов М.У., Хамдамов Р.Х.

Проектирование и анализ системы солнечного водоснабжения для многоэтажных жилых зданий на основе булева программирования 18

Равшанов Н., Усмонов Л.С.

Трёхмерная математическая модель и алгоритм численного решения для мониторинга и прогнозирования процессов подземного выщелачивания в пористой среде 26

Каландаров А.А.

Численное моделирование связанной динамической задачи термоупругости в напряжениях 48

Равшанов Н., Рахманов Х.Э. Фаттаева Д.А.

Моделирование пространственно-временной динамики площади водоёма (на примере Каттакурганского водохранилища) на основе индексов NDWI, NDVI, EVI и ансамблевых методов обучения 61

Хажиев И.О., Шобдаров Э.Б.

Регуляризация начально-краевой задачи для неоднородного параболического уравнения с меняющимся направлением времени 74

Равшанов Н., Боборахимов Б.И., Бердиев М.И.

Модель и алгоритмы классификации аномальных явлений на основе сходимости акустико-визуальных сигналов 88

Рустамов Н., Мухамеджанов Н.Б.

Конструкция и принцип работы когенеративного фрактального солнечного коллектора 103

Холияров Э.Ч., Тураев Д.Ш.

Численное решение плоскорадиальной граничной обратной задачи для уравнения нестационарной релаксационной фильтрации жидкости в пористой среде 112

Ахмедов Д.М., Маматова Н.Х.

Оптимальный метод приближённого решения гиперсингулярных интегральных уравнений 124

Шадиметов Х.М., Эльмуратов Г.Ч.

Оптимизация приближенного вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций в пространстве Соболева комплекснозначных функций 132

Зиякулова Ш.А.

Об оптимальных итерационных и прямых методах решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона 143

Contents

Alimova N.B., Parovik R.I.

FrOsFHN software package for quantitative and qualitative analysis of the
FitzHugh-Nagumo fractional oscillator with variable memory 5

Eshkulov M.U., Khamdamov R.Kh.

Design and analysis of solar water supply system for multi-story residential build-
ings based on Boolean programming 18

Ravshanov N., Usmonov L.S.

Three-dimensional mathematical model and numerical solution algorithm for
monitoring and predicting in-situ leaching processes in porous medium 26

Kalandarov A.A.

Numerical simulation of the coupled dynamic problem of thermoelasticity in
stresses 48

Ravshanov N., Rakhmanov Kh.E. Fattaeva D.A.

Modeling the spatio-temporal dynamics of a reservoir area (using the Kattakur-
gan Reservoir as an example) based on NDWI, NDVI, EVI indices and ensemble
learning methods 61

Khajiev I.O., Shobdarov E.B.

Regularization of the initial-boundary value problem for a inhomogeneous
parabolic equation with changing time direction 74

Ravshanov N., Boborakhimov B.I., Berdiev M.I.

Model and algorithms for classifying anomalous phenomena based on the con-
vergence of acoustic-visual signals 88

Rustamov N., Mukhamejanov N.B.

Design and operating principle of a cogenerative fractal solar collector 103

Kholiyarov E.Ch., Turaev D.Sh.

Numerical solution of plane-radial boundary value inverse problem for the equa-
tion of non-stationary relaxation filtration of fluid in a porous medium 112

Akhmedov D.M., Mamatova N.H.

An optimal method for the approximate solution of the hypersingular integral
equations 124

Shadimetov Kh.M., Elmuratov G.Ch.

Optimization of approximate computation of integrals of rapidly oscillating func-
tions in the Sobolev space of complex-valued functions 132

Ziyakulova Sh.A.

On optimal iterative and direct methods for solving the Dirichlet problem for
the Poisson equation 143

HISOBLASH VA AMALIY МАТЕМАТИКА MUAMMOLARI



ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL
AND APPLIED MATHEMATICS

