УДК 519.6

ВНУТРЕННЯЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА

[1*] ***Фаязов К.С.***, [2] ***Абдуллаева З.Ш.***

*kudratillo52@mail.ru

[1]Туринский политехнический университет в городе Ташкенте,
100095, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Кичик Халка йули, 17;

[2]Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразмий,
100202, Узбекистан, Ташкент, ул. Амира Темура, 108.

Математические модели многих прикладных задач приводят к необходимости решения внутренняя-краевых задач для уравнений с частными производными. Исследуемая задача относится к классу некорректно поставленных задач математической физики. Возникает проблема малых знаменателей; существование и единственность решения зависят от числовых свойств данных задачи. Доказаны теоремы о единственности решения и её условной устойчивости на множестве корректности, определены априорные оценки решения и построены приближённые решения методом регуляризации. Разработка приближённых методов их решения базируется на построении и исследовании численных методов решения задач с внутренними и граничными данными для базовых (основных, модельных) уравнений математической физики.

Ключевые слова: некорректная задача, смешанный тип, обратная задача, единственность, система уравнений.

Цитирование: *Фаязов К.С., Абдуллаева З.Ш.* Внутренняя краевая задача для системы уравнений смешанного типа второго порядка // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2025. – № 5(69). – С. 86-101.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.5_69.2025.07

1 Введение

При исследовании математических моделей прикладных задач возникают обратные и некорректные задачи для дифференциальных уравнений смешанного типа. Теория смешанных и внутренних задач в силу своей прикладной важности в настоящее время является одним из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения в частных производных смешанного и составного типов рассматриваются при решении задач теории нелинейной акустики и гидродинамической теории космической плазмы. В работе К.С. Фаязова и З.Ш. Абдуллаева [1], [9–11] рассмотрены задачи для системы уравнений смешанного типа с краевыми данными внутри области регулярности. В качестве классического примера внутренней задачи для дифференциальных уравнений можно указать задачу аналитического продолжения. По-видимому, впервые она как некорректная задача была рассмотрена М.М. Лаврентьевым. По определению М. М. Лаврентьева, под внутренними задачами понимают определение решения уравнения по её известным значениям внутри области регулярности, а под внутренне-краевыми задачами — задачи, когда исходные данные задаются как внутри области регулярности, так и на границе области. Также в работах [2] рассматривается внутренняя задача для псевдодифференциального уравнения с меняющимся направлением времени. Внутренне-краевые задачи для уравнений четвёртого и более общего порядка рассмотрены в работах Б.И. Пташника [4]. По поводу обратных задач см. [7, 8].

Представляют большой интерес с точки зрения физических приложений дифференциальные уравнения второго порядка смешанного и смешанно-составного типа. Изучение многих задач газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводит к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков.

2 Постановка задачи

В данной работе исследуется некорректная внутренне-краевая задача для системы неоднородного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка смешанного типа.

Рассмотрим системы уравнений

$$\begin{cases} v_{tt}(x,t) + \mathrm{sgn}(x) v_{xx}(x,t) = f(x,t), \\ u_{tt}(x,t) + \mathrm{sgn}(x) u_{xx}(x,t) = v(x,t) \end{cases} \tag{1}$$

в области $\Omega = \{-1 < x < 1,\ x \neq 0,\ 0 < t < T\}$, где $f(x,t)$ – заданная достаточно гладкая функция.

Постановка задачи. Найти пару функций $(v(x,t), u(x,t))$ решение системы уравнений (1), удовлетворяющее условиям:
начальным и внутренним

$$\left. \begin{array}{l} v(x,0) = \varphi_0(x),\ v(x,t_1) = \varphi_1(x) \\ u(x,0) = \psi_0(x),\ u(x,t_1) = \psi_1(x) \end{array} \right\},\ 0 < t_1 < T,\ -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{2}$$

граничным

$$\left. \begin{array}{l} v(-1,t) = v(1,t) = 0 \\ u(-1,t) = u(1,t) = 0 \end{array} \right\},\ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

и условиям склеивания

$$\left. \begin{array}{l} v(-0,t) = v(+0,t),\ v_x(-0,t) = v_x(+0,t) \\ u(-0,t) = u(+0,t),\ u_x(-0,t) = u_x(+0,t) \end{array} \right\},\ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4}$$

где $\varphi_i(x),\ \psi_i(x)$ заданные достаточные гладкие функции, $i = 0, 1$.

Определение. Под решением задачи понимаем пару функций, которая удовлетворяющая системе уравнений (1) в Ω, и имеет соответствующие непрерывные производные в области регулярности решения, а также непрерывную в замкнутой $\overline{\Omega}$, а также удовлетворяет условиям (2), (3), (4).

Исследуемая нами задача относится к классу некорректно поставленных задач математической физики, а именно отсутствует непрерывно зависимость решения от данных. Кроме того возникает проблема малых знаменателей, а существования и единственность решения зависит от числовых свойств данных задачи.

В данной работе доказаны теорема о единственности решения и его условной устойчивости на множестве корректности.

Для дальнейшего изложения нам понадобятся следующие факты.

В работе [3] рассматривается спектральная задача: найти такие значения λ при котором

$$\begin{cases} sgn\, x\, X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(-1) = X(1) = 0, \\ X(-0) = X(+0),\ X'(-0) = X'(+0), \end{cases} \tag{5}$$

имеет нетривиальное решение.

В работе [3] доказано, что существует счетное количество собственных значений $\{\lambda_k^+\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\lambda_k^-\}_{k=1}^{\infty}$ (где λ_k^-, λ_k^+ соответственно отрицательное и положительное значения) и соответствующие им собственные функции $\{X_k^+(x)\}_{k=1}^{\infty}$, $\{X_k^-(x)\}_{k=1}^{\infty}$.

Заметим, что [6]

$$X_k^+(x) = \begin{cases} \frac{sh\sqrt{\lambda_k^+}(1+x)}{sh\sqrt{\lambda_k^+}}, & -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ \frac{\sin\sqrt{\lambda_k^+}(1-x)}{\sin\sqrt{\lambda_k^+}}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \ \ k = 1, 2, ..., \end{cases}$$

$$X_k^-(x) = \begin{cases} \frac{\sin\sqrt{-\lambda_k^-}(1+x)}{\sin\sqrt{-\lambda_k^-}}, & -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ \frac{\mathrm{sh}\sqrt{-\lambda_k^-}(1-x)}{\mathrm{sh}\sqrt{-\lambda_k^-}}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \ \ k = 1, 2, ..., \end{cases}$$

где $\sqrt{|\lambda_k^{\pm}|}$ являются решениями трансцендентного уравнения $tg\sqrt{|\lambda_k^-|} + th\sqrt{|\lambda_k^-|} = 0$. Отметим, что $|\lambda_k^{\pm}| \approx -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k = 1, 2, 3, ...$.

Обозначим $(u, v) = \int\limits_{-1}^{1} uvdx$ скалярное произведение в $L_2(-1, 1)$, $\|u\|^2 = (u, u)$. Нормируем собственные функции

$$\left(sgnx X_k^+, X_j^-\right) = 0, \quad \forall k, j,$$
$$\left(sgnx X_k^{\pm}, X_j^{\pm}\right) = \pm\delta_{kj},$$

где $\pm\delta_{kj}$ – символ Кронекера. В [3] доказано, что собственные функции задачи (5) образуют базис Рисса в H_0. Тогда определим

$$\|u(x,t)\|_0^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left| \left(sgnx\, u(x,t), X_k^+\right) \right|^2 + \left| \left(sgnx\, u(x,t), X_k^-\right) \right|^2 \right\},$$

причем данная норма в пространстве $L_2(-1, 1)$ эквивалентна исходной.

$W_2^4(\Omega)$ – банахово пространство, состоящее из всех элементов $L_2(\Omega)$, имеющих обобщенные производные всех видов до порядка 4 включительно, суммируем по Ω со степенью 2. Норма в $W_2^4(\Omega)$ определяется равенством

$$\|u\|_{2,\Omega}^{(4)} = \left(\int\limits_{\Omega} \sum_{=0}^{4} \left| D^k u \right|^2 dx \right)^{1/2},$$

где суммирование производится по всевозможным значениям мульти индексов k при всех $\varkappa = 0, 1, 2, 3, 4$.

Используя вид решений и свойства собственных функций спектральной задачи (5) получим

$$\begin{cases} \left\{v_k^{\pm}(t)\right\}_{tt} - \lambda_k^{\pm} v_k^{\pm}(t) = f_k^{\pm}(t), \\ v_k^{\pm}(0) = \varphi_{0k}^{\pm}, \ v_k^{\pm}(t_1) = \varphi_{1k}^{\pm}, \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} \left\{u_k^{\pm}(t)\right\}_{tt} - \lambda_k^{\pm} u_k^{\pm}(t) = v_k^{\pm}(t), \\ u_k^{\pm}(0) = \psi_{0k}^{\pm}, \ u_k^{\pm}(t_1) = \psi_{1k}^{\pm}. \end{cases} \tag{7}$$

Если решение задачи (1)-(4) существует, (u,ν) м можно представить в виде

$$\nu(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\nu_k^{+}(t)X_k^{+}+\sum_{k=1}^{\infty}\nu_k^{-}(t)X_k^{-}, \tag{8}$$

$$u\left(x,t\right)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k^{+}(t)X_k^{+}+\sum_{k=1}^{\infty}u_k^{-}(t)X_k^{-}, \tag{9}$$

где

$$v_k^{-}(t)=\frac{\varphi_{0k}^{-}\sin\sqrt{-\lambda_k^{-}}\left(t_1-t\right)+\sin\sqrt{-\lambda_k^{-}}\,t\varphi_{1k}^{-}}{\sin\sqrt{-\lambda_k^{-}}\,t_1}+$$

$$+\frac{\sqrt{-\lambda_k^{-}}^{-1}\int\limits_0^t\sin\sqrt{-\lambda_k^{-}}\left(t-\tau\right)\,f_k^{-}(\tau)d\tau}{\sin\sqrt{-\lambda_k^{-}}\,t_1}\sin\sqrt{-\lambda_k^{-}}\,t-$$

$$-\frac{\sqrt{-\lambda_k^{-}}^{-1}\int\limits_0^{t_1}\sin\sqrt{-\lambda_k^{-}}\left(t_1-\tau\right)\,f_k^{-}(\tau)d\tau}{\sin\sqrt{-\lambda_k^{-}}\,t_1}\sin\sqrt{-\lambda_k^{-}}\,t,$$

$$v_k^{+}(t)=\frac{\varphi_{0k}^{+}\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_k^{+}}\left(t_1-t\right)+\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_k^{+}}\,t\varphi_{1k}^{+}}{\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_k^{+}}\,t_1}+$$

$$+\frac{\sqrt{\lambda_k^{+}}^{-1}\int\limits_0^t\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_k^{+}}\left(t-\tau\right)\,f_k^{+}(\tau)d\tau}{\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_k^{+}}t_1}\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_k^{+}}\,t-$$

$$-\frac{\sqrt{\lambda_k^{+}}^{-1}\int\limits_0^{t_1}\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_k^{+}}\left(t_1-\tau\right)\,f_k^{+}(\tau)d\tau}{\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_k^{+}}\,t_1}\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_k^{+}}\,t,$$

$$u_k^{-}(t)=\frac{\psi_{0k}^{-}\sin\sqrt{-\lambda_k^{-}}\left(t_1-t\right)+\sin\sqrt{-\lambda_k^{-}}\,t\psi_{1k}^{-}}{\sin\sqrt{-\lambda_k^{-}}\,t_1}+$$

$$+\frac{\sqrt{-\lambda_k^{-}}^{-1}\int\limits_0^t\sin\sqrt{-\lambda_k^{-}}\left(t-\tau\right)\,v_k^{-}(\tau)d\tau}{\sin\sqrt{-\lambda_k^{-}}\,t_1}\sin\sqrt{-\lambda_k^{-}}\,t-$$

$$-\frac{\sqrt{-\lambda_k^{-}}^{-1}\int\limits_0^{t_1}\sin\sqrt{-\lambda_k^{-}}\left(t_1-\tau\right)\,v_k^{-}(\tau)d\tau}{\sin\sqrt{-\lambda_k^{-}}\,t_1}\sin\sqrt{-\lambda_k^{-}}\,t,$$

$$u_k^+(t) = \frac{\psi_{0k}^+ \mathrm{sh}\sqrt{\lambda_k^+}\,(t_1 - t) + \mathrm{sh}\sqrt{\lambda_k^+}\,t\psi_{1k}^+}{\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_k^+}\,t_1} +$$

$$+\frac{\sqrt{\lambda_k^+}^{\,-1}\int\limits_0^t \mathrm{sh}\sqrt{\lambda_k^+}\,(t-\tau)\;v_k^+(\tau)d\tau}{\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_k^+}\,t_1}\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_k^+}\,t-$$

$$-\frac{\sqrt{\lambda_k^+}^{-1}\int\limits_0^{t_1} \mathrm{sh}\sqrt{\lambda_k^+}\,(t_1-\tau)\;v_k^+(\tau)d\tau}{\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_k^+}t_1}\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_k^+}t,$$

$$k = 1, 2, ..., \;\varphi_{i_k}^{\pm} = \pm\int\limits_{-1}^{1} sgn\,x\,\varphi_i(x)X_k^{\pm}(x)dx,$$

$$\psi_{i_k}^{\pm} = \pm\int\limits_{-1}^{1} sgn\,x\,\psi_i(x)X_k^{\pm}(x)dx,$$

$$f_{i_k}^{\pm} = \pm\int\limits_{-1}^{1} sgn\,x\,f_i(x,t)X_k^{\pm}(x)dx, i = 0, 1.$$

Лемма 1 (см. [2]). Пусть $\mu_k = \sqrt{\pm\lambda_k^{\pm}}$ иррациональное число ($k \in N$) – ограниченная последовательность положительных чисел. Тогда неравенство

$$\left|\mu_k - \frac{m}{q}a\right| < \frac{1}{k^{2+\varepsilon/4}},\ 0 < \varepsilon < 1, \tag{10}$$

для почти всех чисел $a > 0$ имеет не более чем конечное число решений в целых числах $q \neq 0$ и $m > 0$.
Доказательство Леммы 1 можно найти в работе [2].

Единственность решения задачи (1)-(4)

Теорема 1. Для единственности решения задачи необходимо и достаточно, чтобы уравнения

$$\sqrt{\left|\lambda_k^-\right|}\,t_1 = m\pi,$$

не имели решений в целых числах k, m, где λ_k^- отрицательные решения траццедентного уравнения $tg\sqrt{-\lambda_k^-} + th\sqrt{-\lambda_k^-} = 0$.

Доказательство. Пусть решение задачи (1)-(4) представлено в виде (8) и (9). Пусть $f(x,t) = 0$, и пусть

$$\begin{aligned} v|_{t=0} = 0, \quad v|_{t=t_1} = 0,\\ u|_{t=0} = 0, \quad u|_{t=t_1} = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Необходимость. Если для некоторого целого $k = k_0 \neq 0$ знаменатели $\left|\sin\sqrt{\pm\lambda_{k_0}^{\pm}}\,t_1\right|$ обращаются в нуль, то задача $\left\{v_k^{\pm}(t)\right\}_{tt} - \lambda_k^{\pm}v_k^{\pm}(t) = 0,\ \ v_k^{\pm}(0) = 0,\ v_k^{\pm}(t_1) = 0$, имеет нетривиальные решения вида

$$v_{k_0}^-(t) = C_{1k_0}^-\cos\sqrt{-\lambda_{k_0}^-}\,t + C_{2k_0}^-\sin\sqrt{-\lambda_{k_0}^-}t,$$

$$v_{k_0}^+(t) = C_{1k_0}^+ch\sqrt{\lambda_{k_0}^+}t + C_{2k_0}^+sh\sqrt{\lambda_{k_0}^+}t,$$

где $C^{\pm}_{1k_0}$ и $C^{\pm}_{2k_0}$ нетривиальное решение системы уравнений

$$v^-_k(0) = C^-_{1k_0}\cos\sqrt{-\lambda^-_{k_0}}0 + C^-_{2k_0}\sin\sqrt{-\lambda^-_{k_0}}0 = 0,$$
$$v^-_k(t_1) = C^-_{1k_0}\cos\sqrt{-\lambda^-_{k_0}}t_1 + C^-_{2k_0}\sin\sqrt{-\lambda^-_{k_0}}t_1 = 0,$$

$$v^+_k(0) = C^+_{1k_0}\mathrm{ch}\sqrt{\lambda^+_{k_0}}0 + C^+_{2k_0}\mathrm{sh}\sqrt{\lambda^+_{k_0}}0 = 0,$$
$$v^+_k(t_1) = C^+_{1k_0}\mathrm{ch}\sqrt{\lambda^+_{k_0}}t_1 + C^+_{2k_0}\mathrm{sh}\sqrt{\lambda^+_{k_0}}t_1 = 0,$$

$$C^-_{1k_0} = 0, \quad C^-_{2k_0}\sin\sqrt{-\lambda^-_{k_0}}t_1 = 0,$$
$$C^+_{1k} = 0, \quad C^+_{2k_0}\mathrm{sh}\sqrt{\lambda^+_{k_0}}t_1 = 0,$$
$$\exists\, k_0, \quad \sin\sqrt{-\lambda^-_{k_0}}t_1 = 0,$$
$$\forall k_0 \quad C^+_{2k_0} = 0, \quad \mathrm{sh}\sqrt{\lambda^+_{k_0}}t_1 > 0.$$

Тогда решения уравнения (6) с условиями (11) для фиксированного k_0 имеет нетривиальные решения вида

$$\widetilde{v}(x,t) = v^-_{k_0}(t)X^-_{k_0}, \tag{12}$$

и решение однородной задачи (1)-(4) не будет единственным.

Достаточность. Пусть пары функций $(u_1(x,t),\ v_1(x,t))$ и $(u_2(x,t),\ v_2(x,t))$ являются решениями задачи (1)-(4). Обозначим $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t),\ v(x,t) = v_1(x,t) - v_2(x,t)$. Тогда пара функций $(u(x,t),\ v(x,t))$ удовлетворяет уравнению (1) однородными условиями (11), $v^{\pm}_k(t)$ определяются из систем

$$\begin{cases} C^-_{1k}\cos\sqrt{-\lambda^-_k}\,t_1 + C^-_{2k}\sin\sqrt{-\lambda^-_k}t_1 = 0, \\ C^-_{1k} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} C^+_{1k}ch\sqrt{\lambda^+_k}t_1 + C^+_{2k}sh\sqrt{\lambda^+_k}\,t_1 = 0, \\ C^+_{1k} = 0, \end{cases} \tag{13}$$

однозначно так как, согласно условию теоремы $\sin\sqrt{-\lambda^-_k}t_1 \neq 0$.

Следовательно, из (13) следует, что $C^-_{2k} = 0,\ C^+_{2k} = 0$, и $v(x,t) \equiv 0$. Из формулы (9) легко следует что, $u^{\pm}_k(t)$ однозначно определяется через $v^{\pm}_k(t)$. И $u^{\pm}_k = 0$ или $u(x,t) \equiv 0$. Это означает, что решение задачи (1)-(4) единственно.

Теорема доказана.

Априорная оценка задачи (1)-(4).

Для системы уравнений (1) рассмотрим задачу: найти решение $(u(x,t), \nu(x,t))$ системы уравнений (1) удовлетворяющее условиям

$$\left.\begin{array}{ll} v(x,t)|_{t=0} = \varphi_0(x), & \{v(x,t)\}_t|_{t=0} = \eta(x), \\ u\,(x,t)|_{t=0} = \psi_0(x), & \{u(x,t)\}_t|_{t=0} = \omega(x), \end{array}\right\} \ -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{14}$$

а также граничным (3) и условиям склеивания (4).

Используя вид решений и свойства собственных функций спектральной задачи (5) получим

$$\begin{cases} \left\{v^{\pm}_k(t)\right\}_{tt} - \lambda^{\pm}_k v^{\pm}_k(t) = f^{\pm}_k(t), \\ v^{\pm}_k(0) = \varphi^{\pm}_{0k}, \ \left\{v^{\pm}_k\right\}_t\big|_{t=0} = \eta^{\pm}_k, \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} \left\{u_k^{\pm}(t)\right\}_{tt} - \lambda_k^{\pm} u_k^{\pm}(t) = v_k^{\pm}(t), \\ u_k^{\pm}(0) = \psi_{0k}^{\pm}, \ \left\{u_k^{\pm}\right\}_t \Big|_{t=0} = \omega_k^{\pm} \end{cases} \tag{16}$$

где $\eta_k^{\pm} = \pm \int\limits_{-1}^{1} sgn\,(x)\eta(x)X_k^{\pm}(x)dx, \ \ \omega_k^{\pm} = \pm \int\limits_{-1}^{1} sgn\,(x)\omega(x)X_k^{\pm}(x)dx \quad k = 1, 2, 3, ...$

Согласно результатом работы [5] для задачи (15), для $\forall k$ верна следующая априорная оценка

$$\int\limits_0^t v_k^{\pm^2}(\tau)d\tau \leqslant c(t)\Big(T\varphi_{0k}^{\pm^2} + \beta_k^{\pm}\Big)^{1-r(t)} \left(\int\limits_0^T v_k^{\pm^2}(\tau)d\tau + \beta_k^{\pm}\right)^{r(t)}, \tag{17}$$

$$\beta_k^{\pm} = \left(2T^2 + 3\right) \int\limits_0^T f_k^{\pm^2}(t)dt + 2\left|\lambda_k^{\pm}\varphi_{0k}^{\pm^2} - \eta_k^{\pm^2}\right| T + 2\left|\varphi_{0k}^{\pm}\,\eta_k^{\pm}\right|, \ \ r(t) = \frac{1 - e^{-t}}{1 - e^{-T}},$$

$$c(t) = \exp\left(\frac{(T+1)\left(1 - e^{-t}\right)T - \left(1 - e^{-T}\right)t}{1 - e^{-T}}\right).$$

При доказательство (17) используем следующую лемму 2.

Лемма 2. Пусть $V(t)$ решение уравнения

$$V''(t) - \lambda V(t) = f(t),$$

удовлетворяет условиям $V(0) = \varphi_0$, $V'(0) = \eta$, тогда для решения данного уравнения при $t \in (0, T)$ имеет место неравенство

$$\int\limits_0^t V^2(\tau)d\tau \leqslant c(t)\big(T\varphi_0^2 + \beta\big)^{1-r(t)} \left(\int\limits_0^T V^2(\tau)d\tau + \beta\right)^{r(t)},$$

где λ – некоторая константа, $f(t)$ – заданная функция

$$\beta = \left(2T^2 + 3\right) \int\limits_0^T f^2(t)dt + 2\left|\lambda\varphi_0^2 - \eta^2\right| T + 2\left|\varphi_0\,\eta\right|, \ r(t) = \frac{1 - e^{-t}}{1 - e^{-T}},$$

$$c(t) = \exp\left(\frac{(T+1)\left(1 - e^{-t}\right)T - \left(1 - e^{-T}\right)t}{1 - e^{-T}}\right).$$

Доказательство Леммы 2 можно найти в работе [3].

Теорема 3. Пусть решения задачи (1)-(4) существует и выполняется условия теоремы 1. Тогда для пары функций $(v(x,t), \ u(x,t))$ верны следующие оценки

$$\int\limits_0^t \|v(x,\tau)\|^2 d\tau \leqslant 2c(t)\big(T\left\|\varphi_0(x)\right\|_0^2 + \beta_1\big)^{1-r(t)} \left(\int\limits_0^T \|v(x,t)\|_0^2\,dt + \beta_1\right)^{r(t)}, \tag{18}$$

$$\int\limits_0^t \|u(x,\tau)\|^2 d\tau \leqslant 2c(t)\big(T\left\|\psi_0(x)\right\|_0^2 + \beta_2\big)^{1-r(t)} \left(\int\limits_0^T \|u(x,t)\|_0^2\,dt + \beta_2\right)^{r(t)}, \tag{19}$$

где

$$\beta_1 = \left(2T^2+3\right)\int\limits_0^T \|f(x,t)\|_0^2\,dt + 2T\,\|\varphi_0(x)\|_1^2 + 3(2T+1)\times$$
$$\times\left(C_7\,\|\varphi_1(x)\|_{2+\varepsilon}^2 + C_8\,\|\varphi_0(x)\|_{2+\varepsilon}^2 + C_9\int\limits_0^{t_1}\|f(x,\tau)\|_{1+\varepsilon}^2\,d\tau\right) + \|\varphi_0(x)\|_0^2,$$

$$\beta_2 = \left(2T^2+3\right)\int\limits_0^T \|v(x,t)\|_0^2\,dt + 2T\,\|\psi_0(x)\|_1^2 + 3(2T+1)\times$$
$$\times\left(\tilde{C}_7\,\|\psi_1(x)\|_{2+\varepsilon}^2 + \tilde{C}_8\,\|\psi_0(x)\|_{2+\varepsilon}^2 + \tilde{C}_9\int\limits_0^{t_1}\|v(x,\tau)\|_{1+\varepsilon}^2\,d\tau\right) + \|\psi_0(x)\|_0^2,$$

$$r(t) = \frac{1-e^{-t}}{1-e^{-T}},\, c(t) = \exp\left(\frac{(T+1)\left(1-e^{-t}\right)T - \left(1-e^{-T}\right)t}{1-e^{-T}}\right).$$

Доказательство. Нетрудно заметить, что

$$\eta(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\eta_k^+X_k^+ + \eta_k^-X_k^-\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{\lambda_k^+}\varphi_{1k}^+ - \sqrt{\lambda_k^+}\varphi_{0k}^+ ch\sqrt{\lambda_k^+}t_1 - \int\limits_0^{t_1}\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_k^+}\,(t_1-\tau)\;f_k^+(\tau)d\tau}{\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_k^+}t_1}X_k^+\right.$$
$$\left.+\frac{\sqrt{-\lambda_k^-}\varphi_{1k}^- - \sqrt{-\lambda_k^-}\varphi_{0k}^-\cos\sqrt{-\lambda_k^-}t_1 - \int\limits_0^{t_1}\sin\sqrt{-\lambda_k^-}\,(t_1-\tau)\;f_k^-(\tau)d\tau}{\sin\sqrt{-\lambda_k^-}t_1}X_k^-\right).$$

Оценим норму этих функций

$$\|\eta(x)\|_0^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left|\frac{\sqrt{\lambda_k^+}\varphi_{1k}^+ - \sqrt{\lambda_k^+}\varphi_{0k}^+ ch\sqrt{\lambda_k^+}t_1 - \int\limits_0^{t_1}\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_k^+}\,(t_1-\tau)\;f_k^+(\tau)d\tau}{\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_k^+}t_1}\right|^2+\right.$$
$$\left.+\left|\frac{\sqrt{-\lambda_k^-}\varphi_{1k}^- - \sqrt{-\lambda_k^-}\varphi_{0k}^-\cos\sqrt{-\lambda_k^-}t_1 - \int\limits_0^{t_1}\sin\sqrt{-\lambda_k^-}\,(t_1-\tau)\;f_k^-(\tau)d\tau}{\sin\sqrt{-\lambda_k^-}t_1}\right|^2\right)\leqslant$$

$$\leqslant 3\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left|\frac{\sqrt{\lambda_k^+}}{sh\sqrt{\lambda_k^+}t_1}\varphi_{1k}^+\right|^2+\left|\frac{\sqrt{\lambda_k^+}ch\sqrt{\lambda_k^+}t_1}{sh\sqrt{\lambda_k^+}t_1}\varphi_{0k}^+\right|^2+\left|\frac{\int\limits_0^{t_1} sh\sqrt{\lambda_k^+}(t_1-\tau)\,f_k^+(\tau)d\tau}{sh\sqrt{\lambda_k^+}t_1}\right|^2\right)+$$

$$+3\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left|\frac{\sqrt{-\lambda_k^-}}{\sin\sqrt{-\lambda_k^-}t_1}\varphi_{1k}^-\right|^2+\left|\frac{\sqrt{-\lambda_k^-}\cos\sqrt{-\lambda_k^-}t_1}{\sin\sqrt{-\lambda_k^-}t_1}\varphi_{0k}^-\right|^2+\left|\frac{\int\limits_0^{t_1}\sin\sqrt{-\lambda_k^-}(t_1-\tau)\,f_k^-(\tau)d\tau}{\sin\sqrt{-\lambda_k^-}t_1}\right|^2\right)\leqslant$$

$$\leqslant 3\sum_{k=1}^{\infty}\left(C_1\left|\varphi_{1k}^+\right|^2+C_2\lambda_k^+\left|\varphi_{0k}^+\right|^2+C_3\int\limits_0^{t_1}\left|f_k^+(\tau)\right|^2d\tau\right)+$$

$$+3\sum_{k=1}^{\infty}\left(C_4\left|-\lambda_k^-\right|^{2+\varepsilon}\left|\varphi_{1k}^-\right|^2+C_5\left|-\lambda_k^-\right|^{2+\varepsilon}\left|\varphi_{0k}^-\right|^2+C_6\left|-\lambda_k^-\right|^{1+\varepsilon}\int\limits_0^{t_1}\left|f_k^-(\tau)\right|^2d\tau\right),$$

где $C_1=\frac{\lambda_1^+}{\mathrm{sh}^2\sqrt{\lambda_1^+}t_1}$, $C_2=cth^2\sqrt{\lambda_1^+}t_1$,
$\left\{\max\limits_{0\leqslant\tau^*\leqslant t_1}\left(\mathrm{sh}^2\sqrt{\lambda_1^+}\,(t_1-\tau^*)\right)\int\limits_0^{t_1}\left|f_k^+(\tau)\right|^2d\tau\right\}\leqslant(t_1,\lambda_1^+)\int\limits_0^{t_1}\left|f_k^+(\tau)\right|^2d\tau$, k – целые числа, C_3, C_4, C_5, C_6 – постоянная. Используя выше полученные выводы для $\eta(x)$ имеем оценки

$$\|\eta(x)\|_0^2\leqslant{}_7\,\|\varphi_1(x)\|_{2+\varepsilon}^2+{}_8\,\|\varphi_0(x)\|_{2+\varepsilon}^2+{}_9\int\limits_0^{t_1}\|f(x,\tau)\|_{1+\varepsilon}^2d\tau,$$

где $C_7=\max\{C_1,\,C_4\}$, $C_8=\max\{C_2,\,C_5\}$, $C_9=\max\{C_3,\,C_6\}$.
Аналогичным образом для функцию $\omega(x)$ можно получит следующую оценку

$$\|\omega(x)\|_0^2\leqslant\tilde{C}_7\,\|\psi_1(x)\|_{2+\varepsilon}^2+\tilde{C}_8\,\|\psi_0(x)\|_{2+\varepsilon}^2+\tilde{C}_9\int\limits_0^{t_1}\|v(x,\tau)\|_{1+\varepsilon}^2d\tau,$$

где $\tilde{C}_7=\max\left\{\tilde{C}_1,\,\tilde{C}_4\right\}$, $C_8=\max\left\{\tilde{C}_2,\,\tilde{C}_5\right\}$, $\tilde{C}_9=\max\left\{\tilde{C}_3,\,\tilde{C}_6\right\}$.
Подставляя в неравенство (18)-(19), получаем требуемое неравенство.
Введем множество корректности M следующим образом

$$M=\left\{(v,u):\,\|v(x,t)\|^2+\|u(x,t)\|^2\leqslant m^2\right\}.$$

Устойчивость решения задачи

Для доказательства условной устойчивости искомой задачи воспользуемся следующим методом. Для системы уравнений (1) рассмотрим задачу: найти решение $(u(x,t),v(x,t))$ системы уравнений (1) удовлетворяющее условиям

$$\left.\begin{array}{l}v(x,0)=\varphi_0(x),\ v(x,t_1)=\varphi_1(x)\\ u(x,0)=\psi_0(x),\ u(x,t_1)=\psi_1(x)\end{array}\right\},\ 0<t_1<T,\ -1\leqslant x\leqslant 1, \tag{20}$$

а $(u_\varepsilon(x,t),v_\varepsilon(x,t))$ удовлетворяет уравнению (1) с условиями

$$\left.\begin{array}{l}v_\varepsilon(x,0)=\varphi_{0\varepsilon}(x),\ v_\varepsilon(x,t_1)=\varphi_{1\varepsilon}(x)\\ u_\varepsilon(x,0)=\psi_{0\varepsilon}(x),\ u_\varepsilon(x,t_1)=\psi_{1\varepsilon}(x)\end{array}\right\},\ 0<t_1<T,\ -1\leqslant x\leqslant 1, \tag{21}$$

и соответствующим граничным условиям и условиям склеивания.

Пусть $V(x,t)=v(x,t)-v_\varepsilon(x,t)$, $U(x,t)=u(x,t)-u_\varepsilon(x,t)$.

Теорема 4. Пусть $(u(x,t),v(x,t))\in M$, $(u_\varepsilon(x,t),v_\varepsilon(x,t))\in M$ и $\|\varphi_i(x)-\varphi_{i\varepsilon}(x)\|_{W_2^3}\leqslant\varepsilon$, $\|\psi_i(x)-\psi_{i\varepsilon}(x)\|_{W_2^3}\leqslant\varepsilon$, $\|f(x)-f_\varepsilon(x)\|_{W_2^3}\leqslant\varepsilon$, $i=0,1$. Тогда для решения задачи (1)-(4) верны следующие оценки, $t\in(0,T)$

$$\int\limits_0^t \|V(x,\tau)\|^2 d\tau \leqslant 2\,c(t)\big(T\varepsilon^2+\beta_{1\varepsilon}\big)^{1-r(t)}\big(4m^2+\beta_{1\varepsilon}\big)^{r(t)}, \tag{22}$$

$$\int\limits_0^t \|U(x,\tau)\|^2 d\tau \leqslant 2\,c(t)\big(T\varepsilon^2+\beta_{2\varepsilon}\big)^{1-r(t)}\big(4m^2+\beta_{2\varepsilon}\big)^{r(t)}, \tag{23}$$

где $\beta_{1\varepsilon}=(2T^2+3)\,\varepsilon^2 T+2T\varepsilon^2+3(2T+1)\times(C_7\varepsilon^2+C_8\varepsilon^2+C_9 t_1\varepsilon^2)+\varepsilon^2$,

$$\beta_{2\varepsilon}=2c(t)\left(2T^2+3\right)\left(T\varepsilon^2+\beta_{1\varepsilon}\right)^{1-r(t)}\big(4m^2+\beta_{1\varepsilon}\varepsilon^2\big)^{r(t)}+2T\varepsilon^2+3(2T+1)\times$$
$$\times\left(\tilde{C}_7\varepsilon^2+\tilde{C}_8\varepsilon^2+2\tilde{C}_9 c(t_1)\big(T\varepsilon^2+\beta_{1\varepsilon}\varepsilon^2\big)^{1-r(t_1)}\big(4m^2+\beta_{1\varepsilon}\varepsilon^2\big)^{r(t_1)}\right)+\varepsilon^2,$$
$$r(t)=\frac{1-e^{-t}}{1-e^{-T}},\, c(t)=\exp\left(\frac{(T+1)\,(1-e^{-t})\,T-\left(1-e^{-T}\right)t}{1-e^{-T}}\right).$$

Доказательство. Пусть $(u(x,t),v(x,t))$ решение задачи (1)-(4) с точными данными, а $(u_\varepsilon(x,t),v_\varepsilon(x,t))$ решение задачи (1)-(4) с приближенными данными $\varphi_{0\varepsilon},\ \varphi_{1\varepsilon},\ \psi_{0\varepsilon},\psi_{1\varepsilon}$. Тогда $U=u-u_\varepsilon,\ V=v-v_\varepsilon$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{gathered}\begin{cases}V_{tt}+\mathrm{sgn}V_{xx}=f-f_\varepsilon,\\ U_{tt}+\mathrm{sgn}U_{xx}=V,\end{cases}\\ V(x,0)=\varphi_0-\varphi_{0\varepsilon},\quad V(x,t_1)=\varphi_1-\varphi_{1\varepsilon},\\ U(x,0)=\psi_0-\psi_{0\varepsilon},\quad U(x,t_1)=\psi_1-\psi_{1\varepsilon}.\end{gathered} \tag{24}$$

Применяя к задаче (24) результаты теоремы 3, имеем

$$\int\limits_0^t \|U(x,\tau)\|^2 d\tau=\int\limits_0^t \|u(x,\tau)-u_\varepsilon(x,\tau)\|^2 d\tau\leqslant$$
$$\leqslant\ 2c(t)\big(T\,\|U(x,0)\|_0^2+\beta_2\big)^{1-r(t)}\left(\int\limits_0^T \|u(x,t)-u_\varepsilon(x,t)\|_0^2\,dt+\beta_2\right)^{r(t)}.$$

Согласно (18) оценим следующее

$$\begin{gathered}\int\limits_0^t \|V(x,\tau)\|^2 d\tau=\int\limits_0^t \|v(x,\tau)-v_\varepsilon(x,\tau)\|^2 d\tau\leqslant\\ \leqslant 2c(t)\big(T\,\|\varphi_0(x)-\varphi_{0\varepsilon}(x)\|_0^2+\beta_1\big)^{1-r(t)}\left(\int\limits_0^T \|v(x,t)-v_\varepsilon(x,t)\|_0^2\,dt+\beta_1\right)^{r(t)},\end{gathered} \tag{25}$$

где

$$\beta_1 = \left(2T^2+3\right)\int\limits_0^T \|f(x,t)-f_\varepsilon(x,t)\|_0^2\,dt + 2T\,\|\varphi_0(x)-\varphi_{0\varepsilon}(x)\|_1^2 + 3(2T+1)\times$$
$$\times\left(C_7\,\|\varphi_1(x)-\varphi_{1\varepsilon}(x)\|_{2+\varepsilon}^2 + C_8\,\|\varphi_0(x)-\varphi_{0\varepsilon}(x)\|_{2+\varepsilon}^2 + C_9\int\limits_0^{t_1}\|f(x,\tau)-f_\varepsilon(x,\tau)\|_{1+\varepsilon}^2\,d\tau\right)+$$
$$+\,\|\varphi_0(x)-\varphi_{0\varepsilon}(x)\|_0^2\,,$$

откуда

$$\beta_{1\varepsilon} = \left(2T^2+3\right)\varepsilon^2 T + 2T\varepsilon^2 + 3(2T+1)\times\left(C_7\varepsilon^2 + C_8\varepsilon^2 + C_9 t_1\varepsilon^2\right) + \varepsilon^2.$$

Доказательство $\|U(x,t)\|$ аналогично доказательству (25). Заметим, что $\varphi_i,\ \psi_i \in W_2^3\,(-1,1),\ f\in W_2^3\,(-1,1),\ i=0,1,$ поэтому верны оценки (22), (23).

Приближенное решение

Пусть в задаче (1)-(4) $\varphi_0(x)=\varphi_1(x)=0,\ \ \psi_0(x)=\psi_1(x)=0,\ f(x,t)=f(x).$ Тогда решение задачи (1)-(4) можно представить в виде

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k^+(t)X_k^+ + \sum_{k=1}^{\infty} v_k^-(t)X_k^-, \tag{26}$$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^+(t)X_k^+ + \sum_{k=1}^{\infty} u_k^-(t)X_k^-,$$

где

$$v_k^-(t) = \frac{\left(1-\cos\sqrt{-\lambda_k^-}(t-t_1)\right)f_k^-\sin\sqrt{-\lambda_k^-}\,t}{\left(-\lambda_k^-\right)\,\sin\sqrt{-\lambda_k^-}\,t_1},$$
$$v_k^+(t) = \frac{\left(1-ch\sqrt{\lambda_k^+}(t-t_1)\right)f_k^+ sh\sqrt{\lambda_k^+}\,t}{\lambda_k^+ sh\sqrt{\lambda_k^+}\,t_1},$$
$$u_k^-(t) = \frac{\int\limits_{t_1}^{t}\sin\sqrt{-\lambda_k^-}(t-\tau)v_k^-(\tau)d\tau\sin\sqrt{-\lambda_k^-}\,t}{\sqrt{-\lambda_k^-}\ \sin\sqrt{-\lambda_k^-}\,t_1},$$
$$u_k^+(t) = \frac{\int\limits_{t_1}^{t} sh\sqrt{\lambda_k^+}(t-\tau)\,v_k^+(\tau)d\tau sh\sqrt{\lambda_k^+}\,t}{\sqrt{\lambda_k^+}sh\sqrt{\lambda_k^+}\,t_1}.$$

Пусть решение задачи (1)-(4) существует, $\|f-f_\varepsilon\|_{W_2^3}\leqslant\varepsilon$ и $(u(x,t),\ v(x,t))\in M.$ В качестве приближенной функции рассмотрим

$$v_N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} v_k^+(t)X_k^+ + \sum_{k=1}^{N} v_k^-(t)X_k^-,\ u_N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} u_k^+(t)X_k^+ + \sum_{k=1}^{N} u_k^-(t)X_k^-,$$

где N – параметр регуляризации, а $v_k^\pm(t),\ u_k^\pm(t)$ определены выше.

В качестве приближенного решения задачи по приближенными данными можно рассмотреть функцию

$$v_{N\varepsilon}(x,t)=\sum_{k=1}^{N} v_{k\varepsilon}^{+}(t)X_k^{+}+\sum_{k=1}^{N} v_{k\varepsilon}^{-}(t)X_k^{-}, \tag{27}$$

$$u_{N\varepsilon}(x,t)=\sum_{k=1}^{N} u_{k\varepsilon}^{+}(t)X_k^{+}+\sum_{k=1}^{N} u_{k\varepsilon}^{-}(t)X_k^{-},$$

где

$$v_{k\varepsilon}^{-}(t)=\frac{\left(1-\cos\sqrt{-\lambda_k^{-}}(t-t_1)\right)f_{k\varepsilon}^{-}\sin\sqrt{-\lambda_k^{-}}\,t}{\left(-\lambda_k^{-}\right)\,\sin\sqrt{-\lambda_k^{-}}\,t_1},$$

$$v_{k\varepsilon}^{+}(t)=\frac{\left(1-\mathrm{ch}\sqrt{\lambda_k^{+}}(t-t_1)\right)f_{k\varepsilon}^{+}\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_k^{+}}\,t}{\lambda_k^{+}\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_k^{+}}\,t_1},$$

$$u_{k\varepsilon}^{-}(t)=\frac{\int\limits_{t_1}^{t}\sin\sqrt{-\lambda_k^{-}}(t-\tau)v_{k\varepsilon}^{-}(\tau)d\tau\sin\sqrt{-\lambda_k^{-}}\,t}{\sqrt{-\lambda_k^{-}}\,\sin\sqrt{-\lambda_k^{-}}\,t_1},$$

$$u_{k\varepsilon}^{+}(t)=\frac{\int\limits_{t_1}^{t}\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_k^{+}}(t-\tau)\,v_{k\varepsilon}^{+}(\tau)d\tau\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_k^{+}}\,t}{\sqrt{\lambda_k^{+}}\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_k^{+}}\,t_1}.$$

Оценим разность нормы $v(x,t)-v_{N\varepsilon}(x,t)$

$$\begin{aligned}\|v(x,t)-v_{N\varepsilon}(x,t)\|^2&=\|v(x,t)-v_N(x,t)+v_N(x,t)-v_{N\varepsilon}(x,t)\|^2\leqslant\\&\leqslant\|v(x,t)-v_N(x,t)\|^2+\|v_N(x,t)-v_{N\varepsilon}(x,t)\|^2.\end{aligned} \tag{28}$$

Оценив первый член в правой часть неравенства (28) имеем

$$\begin{aligned}\|v(x,t)-v_N(x,t)\|^2\leqslant\sum_{k=N+1}^{\infty}\left(\frac{\left(1-\mathrm{ch}\sqrt{\lambda_k^{+}}(t-t_1)\right)f_k^{+}\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_k^{+}}\,t}{\lambda_k^{+}\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_k^{+}}\,t_1}\right)^2+\\+\sum_{k=N+1}^{\infty}\left(\frac{\left(1-\cos\sqrt{\lambda_k^{-}}(t-t_1)\right)f_k^{-}\sin\sqrt{-\lambda_k^{-}}\,t}{\left(-\lambda_k^{-}\right)\,\sin\sqrt{-\lambda_k^{-}}\,t_1}\right)^2,\end{aligned}$$

при условии $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\left(1-ch\sqrt{\lambda_k^{+}}(T-t_1)\right)sh\sqrt{\lambda_k^{+}}\,T}{\lambda_k^{+}sh\sqrt{\lambda_k^{+}}\,t_1}\right)^2\left(f_k^{+}\right)^2\leqslant m^2$. Построим функцию Лагранжа

$$f_k^+=\begin{cases} \frac{m\,\lambda_k^+ sh\sqrt{\lambda_k^+}\,t_1}{\left(1-ch\sqrt{\lambda_k^+}(T-t_1)\right)sh\sqrt{\lambda_k^+}\,T}, & k=N+1,\\ 0, \qquad k\neq N+1, \end{cases}$$

$$\sum_{k=N+1}^{\infty}\left(v_k^+(t)\right)^2\leqslant\frac{m^2\left(1-ch\sqrt{\lambda_k^+}(t-t_1)\right)^2 sh^2\sqrt{\lambda_{N+1}^+}\,t}{\left(1-ch\sqrt{\lambda_k^+}(T-t_1)\right)^2 sh^2\sqrt{\lambda_{N+1}^+}\,T}\leqslant m^2\,\frac{sh^2\sqrt{\lambda_{N+1}^+}\,t}{sh^2\sqrt{\lambda_{N+1}^+}\,T}\leqslant$$

$$\leqslant m^2\,\frac{e^{2\sqrt{\lambda_{N+1}^+}t}-e^{-2\sqrt{\lambda_{N+1}^+}t}}{e^{2\sqrt{\lambda_{N+1}^+}T}-e^{-2\sqrt{\lambda_{N+1}^+}T}}=$$

$$=m^2\,e^{-2\sqrt{\lambda_{N+1}^+}(T-t)}\frac{\left(1-e^{-4\sqrt{\lambda_{N+1}^+}t}\right)}{\left(1-e^{-4\sqrt{\lambda_{N+1}^+}T}\right)}\leqslant C_1(t)\,m^2e^{-2\sqrt{\lambda_{N+1}^+}(T-t)},$$

где $C_1(t)=\frac{\left(1-e^{-4\sqrt{\lambda_{N+1}^+}\,t}\right)}{\left(1-e^{-4\sqrt{\lambda_{N+1}^+}\,T}\right)}$, следовательно имеем

$$\sum_{k=N+1}^{\infty}\left(v_k^-(t)\right)^2=\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{\left(1-\cos\sqrt{\lambda_k^-}(t-t_1)\right)^2\left(f_k^-\right)^2\sin^2\sqrt{-\lambda_k^-}\,t}{\left(\lambda_k^-\right)^2\sin^2\sqrt{-\lambda_k^-}\,t_1}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=N+1}^{\infty}4\left(\lambda_1^-\right)^{-2}\delta_1^{-2}\,k^{4+\varepsilon}\left(f_k^-\right)^2=\gamma(N),$$

$\gamma(N)\to 0$ при $N\to\infty$. Из этих неравенств следует, что

$$\|v(x,t)-v_N(x,t)\|^2\leqslant C_1(t)\,m^2e^{-2\sqrt{\lambda_{N+1}^+}(T-t)}+\gamma(N),$$

где $C_1(t)$ постоянная зависящая от t. Теперь оценим второй член в правой части неравенства (28)

$$\|v_N(x,t)-v_{N\varepsilon}(x,t)\|^2=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\left(\lambda_k^+\right)^2}\left(1-ch\sqrt{\lambda_k^+}(t-t_1)\right)^2\left(f_k^+-f_{k\varepsilon}^+\right)^2\frac{sh^2\sqrt{\lambda_k^+}t}{sh^2\sqrt{\lambda_k^+}\,t_1}+$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\left(\lambda_k^-\right)^2}\left(1-\cos\sqrt{\lambda_k^-}(t-t_1)\right)^2\left(f_k^--f_{k\varepsilon}^-\right)^2\frac{\sin^2\sqrt{-\lambda_k^-}\,t}{\sin^2\sqrt{-\lambda_k^-}\,t_1}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\lambda_1^+\right)^{-2}\varepsilon^2C_3(t)\,C_2(t)+N^\varepsilon\varepsilon,\ \ 0<t<t_1,$$

$$\left(\lambda_1^+\right)^{-2}\varepsilon^2e^{4\sqrt{\lambda_N^+}(t-t_1)}C_2(t)+N^\varepsilon\varepsilon,\ \ t_1<t<T,$$

где $C_2(t)=\frac{\left(1-e^{-4\sqrt{\lambda_N^+}\,t}\right)}{\left(1-e^{-4\sqrt{\lambda_N^+}\,t_1}\right)}$, ${}_3(t)=\left(1-ch\sqrt{\lambda_N^+}(t-t_1)\right)^2e^{2\sqrt{\lambda_N^+}(t_1-t)}$.

Окончательно имеем

$$\|v(x,t)-v_{N\varepsilon}(x,t)\|^2\leqslant$$

$$\leqslant\begin{cases} C_1(t)\,m^2e^{-2\sqrt{\lambda_{N+1}^+}(T-t)}+\gamma(N)+\left(\lambda_1^+\right)^{-2}\varepsilon^2C_3(t)\,C_2(t)+N^\varepsilon\varepsilon,\ 0<t<t_1,\\ C_1(t)\,m^2e^{-2\sqrt{\lambda_{N+1}^+}(T-t)}+\gamma(N)+\left(\lambda_1^+\right)^{-2}\varepsilon^2e^{4\sqrt{\lambda_N^+}(t-t_1)}C_2(t)+N^\varepsilon\varepsilon,\ t_1<t<T. \end{cases}$$

где $V_1(t)$, $V_2(t)$, $V_3(t)$ постоянная зависящая от t, t_1 и T.

Оценим норму разности $u(x,t)-u_{N\varepsilon}(x,t)$

$$\begin{gathered}\|u(x,t)-u_{N\varepsilon}(x,t)\|=\|u(x,t)-u_N(x,t)+u_N(x,t)-u_{N\varepsilon}(x,t)\|\leqslant\\ \leqslant\|u(x,t)-u_N(x,t)\|+\|u_N(x,t)-u_{N\varepsilon}(x,t)\|.\end{gathered}\tag{29}$$

Оценив первый член в правой часть неравенства (29) имеем

$$\|u(x,t)-u_N(x,t)\|^2=\sum_{k=N+1}^{\infty}\left(\left(u_k^-\right)^2+\left(u_k^+\right)^2\right)=$$

$$=\sum_{k=N+1}^{\infty}\left(\frac{\int\limits_{t_1}^{t}\sin\sqrt{-\lambda_k^-}(t-\tau)v_k^-(\tau)d\tau\sin\sqrt{-\lambda_k^-}\,t}{\sqrt{-\lambda_k^-}\,\sin\sqrt{-\lambda_k^-}\,t_1}\right)^2+$$

$$+\sum_{k=N+1}^{\infty}\left(\frac{\int\limits_{t_1}^{t}\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_k^+}(t-\tau)\,v_k^+(\tau)d\tau\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_k^+}\,t}{\sqrt{\lambda_k^+}\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_k^+}\,t_1}\right)^2=$$

$$=\frac{7}{16}\delta^{-2}\gamma(N)+e^{2\sqrt{\lambda_{N+1}^+}\,(t-T)}C^2(t,t_1,T),$$

$\gamma(N)\to 0,\ \ N\to\infty$, C^2 постоянная зависящая от $(t,\,t_1,T)$.

Теперь оценим второй член в правой части неравенства (29)

$$\|u_N(x,t)-u_{N\varepsilon}(x,t)\|^2\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\int\limits_{t_1}^{t}\sin\sqrt{-\lambda_k^-}(t-\tau)\left(v_k^-(\tau)-v_{k\varepsilon}^-(\tau)\right)d\tau\sin\sqrt{-\lambda_k^-}\,t}{\sqrt{-\lambda_k^-}\,\sin\sqrt{-\lambda_k^-}\,t_1}\right)^2+$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\int\limits_{t_1}^{t}\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_k^+}(t-\tau)\,\left(v_k^-(\tau)-v_{k\varepsilon}^-(\tau)\right)d\tau\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_k^+}\,t}{\sqrt{\lambda_k^+}\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_k^+}\,t_1}\right)^2\leqslant$$

$$\leqslant 2\frac{C_5T}{\delta^4}\int\limits_0^T\sum_{k=1}^{\infty}k^6\left|f_k^--f_{k\varepsilon}^-\right|^2d\tau+$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\frac{C_6}{\left(\lambda_1^+\right)^2}e^{2\lambda_k^+T}\int\limits_{t_1}^{t}\left|f_k^--f_{k\varepsilon}^-\right|^2d\tau\ \leqslant\ 2\frac{C_5T}{\delta^4}\varepsilon^2+\frac{e^{2\lambda_N^+T}}{\left(\lambda_1^+\right)^2}C_6\,\varepsilon^2,$$

где $C_5(t)$, $C_6(t)$ постоянная зависящая от $t,\ t_1$.

Окончательно имеем

$$\|u(x,t)-u_{N\varepsilon}(x,t)\|^2\leqslant\frac{7}{16}\delta^{-2}\gamma(N)+e^{2\sqrt{\lambda_{N+1}^+}\,(t-T)}C^2(t,t_1,T)+$$

$$+2\frac{C_1T}{\delta^4}\varepsilon^2+\frac{e^{2\lambda_N^+T}}{\left(\lambda_1^+\right)^2}C\,\varepsilon^2,\ \ 0<t<T,$$

или

$$\|u(x,t) - u_{N\varepsilon}(x,t)\|^2 \leqslant C_7\gamma_1(N) + C_8\varepsilon^2,\ 0 < t < T,$$

где $C_7\gamma_1(N) = \frac{7}{16}\delta^{-2}\gamma(N) + e^{2\sqrt{\lambda_{N+1}^{+}}(t-T)}C^2(t,t_1,T)$, $C_8 = 2\frac{C_5T}{\delta^4} + \frac{e^{2\lambda_N^{+}T}}{\left(\lambda_1^{+}\right)^2}C_6$, $\gamma_1(N) \to 0$ при $N \to \infty$, C_7, C_8 – постоянная зависящая от $t,\ t_1$. При $\varepsilon \to 0$ существует такое изменение N, что $C_7\gamma_1(N) + C_8\varepsilon^2$ стремится к нулю. В самом деле, если обозначить $\omega(\varepsilon,m) = \inf\limits_{N>0} C_7\gamma_1(N) + C_8\varepsilon^2$ то можно показать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\omega(\varepsilon,m) = 0. \tag{30}$$

Предположим, что δ – достаточно малое число. Из $\lim\limits_{N\to\infty} C_7\gamma_1(N) = 0$ следует существование такого $N(\delta)$, что для всех $N \geqslant N(\delta)$ выполняется неравенство $C_7\gamma_1(N) \leqslant \frac{\delta}{2}$. Обозначим $\eta(\delta) = \inf\limits_{N\geqslant N(\delta)} C_8\varepsilon^2$. Если $\varepsilon \leqslant \frac{1}{2}\frac{\delta}{\eta(\delta)}$, то функция $\omega(\varepsilon,m)$ удовлетворяет неравенству $\omega(\varepsilon,m) \leqslant \delta$. Это доказывает (30).

3 Заключение

Одной из важных задач математического моделирования является нахождение решения или построение приближённого решения системы уравнений смешанного типа. Особую трудность представляет приближённое решение некорректных внутренне-краевых задач для таких уравнений. Для построения приближённого решения применяется метод регуляризации. При этом для получения хорошего численного результата необходимо привести исследование этих задач к условной корректности. Такие исследования проведены для ряда дифференциальных уравнений смешанного типа в математической физике. Эти результаты дают возможность численного решения задач на множестве корректности при оптимальном выборе параметров регуляризации.

Литература

[1] *Fayazov K.S., Abdullayeva Z.Sh.* An interior boundary value problem for a system of partial differential equations of mixed type // Problems of Computational and Applied Mathematics. – 2021. – No. 6/1(37). – P. 29-43.

[2] *Fayazov K.S., Abdullayeva Z.Sh.* Conditional Correctness of the Internal Boundary Value Problem of the Pseudoparabolic Equation with a Changing Time Direction // Missouri J. Math. Sci. – 2020. – No. 32. – P. 49-60. – doi: `http://dx.doi.org/10.35834/2020/3201049`.

[3] *Pyatkov S.G.* Properties of eigen functions of a spectral problem and some of their applications // Some Applications of Functional Analysis to Problems of Mathematical Physics. – Novosibirsk, 1986. – P. 65-84.

[4] *Ptashnik B.I.* Ill-posed boundary value problems for differential equations with partial derivatives. – Kiev: Naukova dumka, 1984. – 264 p.

[5] *Фаязов К.С., Хажиев И.О.* Условная устойчивость краевой задачи для системы абстрактных дифференциальных уравнений второго порядка с операторными коэффициентами // Uzbek Mathematical Journal. – 2017. – No. 2. – С. 145-155.

[6] *Fayazov K.S.* The incorrect Cauchy problem for a first order and second-order differential equation with operator coefficients // Siberian Mathematical Journal. – 1994. – Vol. 35, No. 3. – P. 702-706.

[7] *Сабитов К.Б., Сафин Э.М.* Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Математические заметки. – No. 6. – 2010. – С. 907-918.

[8] *Сабитов К.Б., Сафин Э.М.* Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Известия вузов. Математика. – 2010. – No. 4. – C. 55-62.

[9] *Фаязов К.С., Абдуллаева З.Ш.* Задача с внутренними и граничными данными для дифференциально-операторного уравнения n-го порядка // Узбекский математический журнал. – 2014. – No. 2/1. – C. 55-62.

[10] *Фаязов К.С., Абдуллаева З.Ш.* Многоточечная задача для дифференциального уравнения смешанного типа четвертого порядка // Узбекский математический журнал. – No. 3. – C. 125-135.

[11] *Фаязов К.С., Абдуллаева З.Ш.* Внутренняя краевая задача для уравнения в частных производных третьего порядка составного типа // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2017. – No. 4. – C. 68-75.

UDC 519.6

INTERIOR BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SYSTEM OF SECOND-ORDER MIXED-TYPE EQUATIONS

[1*]***Fayazov K.S.***, [2]***Abdullayeva Z.Sh.***

[*]kudratillo52@mail.ru

[1]Turin Polytechnic University in Tashkent,
17, Kichik Khalka Yuli Str., Tashkent, 100095 Uzbekistan;

[2]Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi,
108, Amir Temur str., Tashkent, 100200 Uzbekistan.

Mathematical models of many applied problems lead to the need to solve interior-boundary value problems for partial differential equations. The problem under study belongs to the class of ill-posed problems in mathematical physics. The issue of small denominators arises; the existence and uniqueness of the solution depend on the numerical properties of the problem data. Theorems on the uniqueness of the solution and its conditional stability on the well-posedness set are proven, a priori estimates for the solution are obtained, and approximate solutions are constructed using the regularization method. The development of approximate methods for their solution is based on the construction and analysis of numerical methods for solving problems with interior and boundary data for the basic (fundamental, model) equations of mathematical physics.

Keywords: ill-posed problem, mixed type, inverse problem, uniqueness, system of equations.

Citation: Fayazov K.S., Abdullayeva Z.Sh. 2025. Interior boundary value problem for a system of second-order mixed-type equations. *Problems of Computational and Applied Mathematics.* 5(69): 86-101.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.5_69.2025.07

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 5(69) 2025

Журнал основан в 2015 году.
Издается 6 раз в год.

Учредитель:
Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта.

Главный редактор:
Равшанов Н.

Заместители главного редактора:
Арипов М.М., Шадиметов Х.М., Ахмедов Д.Д.

Ответственный секретарь:
Убайдуллаев М.Ш.

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при Администрации Президента Республики Узбекистан.
Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Адрес редакции:
100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.
Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.
Э-почта: `journals@airi.uz`.
Веб-сайт: `https://journals.airi.uz`.

Дизайн и вёрстка:
Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.
Подписано в печать 29.10.2025 г.
Формат 60x84 1/8. Заказ №7. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 5(69) 2025

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:
Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.
The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Address:
100125, Tashkent, Buz-2, 17A.
Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.
E-mail: journals@airi.uz.
Web-site: https://journals.airi.uz.

Layout design:
Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.
Signed for print 29.10.2025
Format 60x84 1/8. Order No. 7. Print run of 100 copies.

Содержание

Нормуродов Ч.Б., Зиякулова Ш.А.
Высокоточный и эффективный метод для численного моделирования изгиба железобетонной плиты . . . 5

Равшанов Н., Боборахимов Б.И., Джурабоева О.С., Рискулова С.У.
Математическое моделирование распространения примесей в турбулентных воздушных потоках пограничного слоя атмосферы . . . 17

Мадалиев М.Э., Ходжаев Я.Дж., Носирова Н.А., Мухаммадёкубов Х.Э.
Анализ эффективности OpenFOAM, COMSOL Multiphysics и Ansys Fluent при моделировании течения в 2D-канале с внезапным расширением . . . 35

Равшанов Н., Боборахимов Б.И., Бердиёров Ш.Ш.
Численное моделирование процесса фильтрования жидкого раствора в цилиндрическом пористом фильтре . . . 49

Маматов А.Р.
Алгоритм решения двухуровневой игровой задачи перевода траектории динамической системы . . . 64

Хаётов А.Р., Шомаликова М.Ш.
Оптимальная квадратурная формула, точная для экспоненциальной функции 74

Фаязов К.С., Абдуллаева З.Ш.
Внутренняя краевая задача для системы уравнений смешанного типа второго порядка . . . 86

Хаётов А.Р., Хаитов Т.О.
Алгебро-тригонометрические оптимальные формулы численного интегрирования . . . 102

Рустамов Н., Амиртаев К., Тастанова С.
Метод семантического моделирования . . . 114

Боборахимов Б.И., Ахмеджанова Д.А., Шарипов Х.Д.
Корпусно-ориентированная модель среднетюркского языка на основе взвешенного усреднения . . . 123

Contents

Normurodov Ch.B., Ziyakulova Sh.A.
A highly accurate and efficient method for numerical simulation of reinforced concrete slab bending . . . 5

Ravshanov N., Boborakhimov B.I., Juraboeva O.S., Riskulova S.U.
Mathematical modeling of pollutant dispersion in turbulent airflows of the atmospheric boundary layer . . . 17

Madaliev M.E., Khodjaev Ya.D., Nosirova N.A., Mukhammadyakubov Kh.E.
Performance analysis of OpenFOAM, COMSOL Multiphysics and Ansys Fluent in simulating 2D channel flow with sudden expansion . . . 35

Ravshanov N., Boborahimov B.I., Berdiyorov Sh.Sh.
Numerical modeling of liquid solution filtration in a cylindrical porous filter . . . 49

Mamatov A.R.
Algorithm for solving a two-level game problem of dynamic system trajectory transfer . . . 64

Hayotov A.R., Shomalikova M.Sh.
An optimal quadrature formula exact to the exponential function . . . 74

Fayazov K.S., Abdullayeva Z.Sh.
Interior boundary value problem for a system of second-order mixed-type equations 86

Hayotov A.R., Khaitov T.O.
Algebraic-trigonometric optimal formulas for numerical integration . . . 102

Rustamov N., Amirtayev K., Tastanova S.
The method of semantic modeling . . . 114

Boborahimov B.I., Axmedjanova D.A., Sharipov Kh.D.
A corpus-based model of the Middle Turkic language using weighted averaging . 123

№ 5(69) 2025

ISSN 2181-8460

HISOBLASH VA AMALIY MATEMATIKA MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

RAQAMLI TEXNOLOGIYALAR VA
SUN'IY INTELLEKTNI RIVOJLANTIRISH
ILMIY-TADQIQOT INSTITUTI