УДК 517.977

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ДВУХУРОВНЕВОЙ ИГРОВОЙ ЗАДАЧИ ПЕРЕВОДА ТРАЕКТОРИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Маматов А.Р.

akmm1964@rambler.ru

Самаркандский государственный университет имени Ш. Рашидова,

140104, Узбекистан, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15.

Представлен алгоритм решения игровой задачи управления динамической системой с двумя игроками и противоположными целями. Задача включает перевод траектории из заданного множества в терминальное, а также, в случае успешного перевода, максимизацию/минимизацию выпуклого/линейного функционала. Алгоритм состоит из двух фаз: определение возможности достижения терминального множества и последующий поиск оптимальных управлений. Разработанный подход использует понятие опоры и предлагает конечное число итераций для определения оптимальной стратегии первого игрока. Приведен иллюстративный пример, демонстрирующий эффективность метода. Предложенный алгоритм значительно уменьшает количество математических операций по сравнению с предшествующими работами.

Ключевые слова: динамическая система, игровая задача, опора, алгоритм.

Цитирование: *Маматов А.Р.* Алгоритм решения двухуровневой игровой задачи перевода траектории динамической системы // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2025. – № 5(69). – С. 64-73.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.5_69.2025.05

1 Введение

Известно, что управляемые линейные системы разделяются на: непрерывную, дискретную и статическую [1]. Аналогично, управляемые двумя (и более) игроками (участниками) линейные системы также разделяются на: непрерывную, дискретную и статическую. Следовательно, можно рассмотреть задачи управления, в том числе игровые задачи управления линейными (непрерывной, дискретной и статической) системами [1]- [23].

Классы допустимых управлений в непрерывной системы также могут быть различные: измеримые, кусочно-непрерывные, кусочно-постоянные, импульсные и т.д. Из управляемой непрерывной системой путем дискретизации можно перейти к управляемую дискретную систему. А если классы управлений игроков являются кусочно-постоянные, с известными (возможными) точками разрыва, то управляемая непрерывная система является эквивалентной к некоторой управляемой дискретной системы. Если дискретную систему решить (найти траекторию дискретную систему) и поставить в критерию качества игровой задачи, то получается игровая задача со статической системой.

Аналогично, методы решения задач управления, в том числе игровых задач со статической системой в той или иной степени можно перенести/применять на (игровых) задач управления дискретными, непрерывными системами. Такой подход был осуществлен для вычисления оптимальных управлений в линейной задаче терминального управления непрерывной системой в работе [8].

В работе [8] новый подход для решения задач линейного программирования [9] был применен для вычисления оптимальных управлений в линейной задаче терминального управления непрерывной системой.

Игровые задачи с управляемыми линейными статическими системами – игровые задачи со связанными переменными с использованием понятие опоры [9], [10] и/или двойственной задачи [11] изучены в работах [13]- [17]. В работе [18] результаты работы [14] были применены для разработки алгоритма решения максиминной задачи уклонения–сближения – задача перевода траектории непрерывной (динамической) системы, управляемой двумя игроками, цели которых противоположны, из любой точки заданного множества (из множества) в терминальное множество.

В данной работе рассматривается обобщение задачи [18], когда удается перевести траекторию динамической системы в терминальное множество при любом управление первого игрока, путем требования определения максимина функционала, образованного линейной комбинацией координат траектории динамической системы.

Используя результаты [16], [18], [19], [23] предложен и обоснован алгоритм решения рассматриваемой задачи. Классы управлений игроков состоят: первого игрока – из совокупности класса кусочно-постоянных функций и вектор из параллелепипеда; второго игрока – из класса импульсных функций.

В отличие от работы [23], который является частным случаем рассматриваемой задачи, в предложенном алгоритме значительно уменьшалось число математических операций для решения рассматриваемой задачи. Отметим, что, аналогичные задачи с дискретной системой или непрерывной системой в классе дискретных функций изучены в работах [20]- [22]. В работе [5], приведен метод построения оптимального гарантирующего управления в линейной дифференциальной игры, когда управление игрока, имеющего привилегию выбираются из класса импульсных функций.

2 Постановка задачи

Рассмотрим динамическую систему, управляемой двумя игроками на фиксированном отрезке времени $T = [0, t^*]$ [2], [3], [18], [19], [21], [22]:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) + dv(t), t \in T, x(0) = D\eta. \tag{1}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$– состояние системы в момент t; $u(t) \in \mathbb{R}^1, v(t) \in \mathbb{R}^1$– значения управляющих воздействий первого и второго игроков соответственно в момент t; $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, D \in \mathbb{R}^{n\times r}, b, d \in \mathbb{R}^n, \eta \in \mathbb{R}^r$.

Пусть $f_*, f^* \in \mathbb{R}^1, \eta_*, \eta^* \in \mathbb{R}^r$ (сравнение векторов – покомпонентно).

Совокупность $z(\cdot) = (u(\cdot), \eta)$ из кусочно-постоянной функции $u(\cdot) = (u(t), t \in T)$, непрерывной справа, и вектора η, из множество

$$Z = \{z(\cdot)(u(\cdot), \eta) | u(\cdot) = (u(t), t \in T), f_* \leqslant u(t) \leqslant f^*, t \in T; \eta_* \leqslant \eta \leqslant \eta^*\}$$

называется управлением первого игрока.

Пусть $g_*(t), g^*(t), t \in T$, – заданные кусочно-постоянные функции, непрерывные справа с (возможными) точками разрыва (множеством квантования)

$$\tau = \{t_1, t_2, ..., t_l\}, 0 = t_1 < t_2 < ... < t_l < t_{l+1} = t^*.$$

Кусочно-постоянная функция $v(\cdot) = (v(t), t \in T)$, непрерывная справа с (возможными) точками разрыва (множеством квантования) τ, из множество

$$V=\{v(\cdot)|v(\cdot)=(v(t),t\in T),g_*(t)\leqslant v(t)\leqslant g^*(t),t\in T\},$$

называется управлением второго игрока.

Кусочно-постоянные функции с известными возможными точками разрыва (точками квантования) принято называть импульсными [10, Ч.2, с. 9].

Пусть $x(\cdot)=(x(t),t\in T)$ – непрерывное решение уравнения (1), соответствующей паре $\{z(\cdot),v(\cdot)\}$ – управлений игроков, $J_1(z(\cdot),v(\cdot))=c'x(t^*),c\in\mathbb{R}^n$, (штрих)$'$ - знак транспонирования, $H\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathrm{rang}H=m,g\in\mathbb{R}^m,M=\{x\in\mathbb{R}^n\mid Hx=g\}$ – терминальное множество,$rank(HA,HAb,HA^2b,...,HA^{n-1}b)=rankH.$

Рассмотрим задачу. Два игрока, выбирают управления $z(\cdot)$ и $v(\cdot)$ поочередно, сначала первый игрок выбирает $z(\cdot)$, затем, зная $z(\cdot)$, второй игрок выбирает $v(\cdot)$.

Цель первого игрока – выбрать управление $z^0(\cdot)$, так, чтобы не допустить попадания траектории системы (1) в момент t^* в множество M при любом управлении $v(\cdot)$. Если не получается не допустить попадание траекторию системы (1) в момент t^* в множество M, то целью первого игрока является максимизировать функционал

$$J(z(\cdot))=\min_{v(\cdot)\in\ V}J_1(z(\cdot),v(\cdot)).$$

Цель второго игрока – при известном $z(\cdot)$ выбором управление $v^0(\cdot)$, "перевести" траекторию системы (1) из множество

$$M_1=\{x\in R^n\mid x=D\eta,\eta_*\leqslant\eta\leqslant\eta^*\}$$

при $t=0$ в множество M при t^* и минимизировать функционал $J_1(z(\cdot),v(\cdot))$.

Положим

$$J(z(\cdot),v(\cdot))=\begin{cases}J_1(z(\cdot),v(\cdot)),\text{если } z(\cdot)\in Z,v(\cdot)\in V,x(t^*)\in M;\\ +\infty,\ \text{если } z(\cdot)\in Z,v(\cdot)\in V,x(t^*)\overline{\in}M.\end{cases}$$

Тогда имеем максиминную задачу управления

$$\begin{gathered}\min_{v(\cdot)\in\ V}J(z(\cdot),v(\cdot))\to\max_{z(\cdot)\in Z},\\ \dot{x}(t)=Ax(t)+bu(t)+dv(t),t\in T,\quad x(0)=D\eta,\\ Hx(t^*)=g.\end{gathered}\tag{2}$$

Определение 1. *Управление первого игрока $z^0(\cdot)$, при котором*

$$\min_{v(\cdot)\in V}J(z^0(\cdot),v(\cdot))=\max_{z(\cdot)\in Z}\min_{v(\cdot)\in V}J(z(\cdot),v(\cdot)),$$

называется оптимальным управлением первого игрока, а значение $\min\limits_{v(\cdot)\in V}J(z^0(\cdot),v(\cdot))$ – оптимальным значением критерия качества задачи (2).

Отметим, что задача (2) при $\eta_*=\eta^*$ исследовано в работе [23].

3 Теоретическая часть

Пусть $x(\cdot)=(x(t),t\in T)$ – непрерывное решение уравнения (1), соответствующей паре $\{z(\cdot),v(\cdot)\}$ – управлений игроков.

Рассмотрим максиминную задачу

$$\Gamma(z(\cdot))=\min_{v(\cdot)\in\ V}\sum_{i\in I}|h_i'x(t^*)-g_i|\to\max_{z(\cdot)\in U}\tag{3}$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) + dv(t), t \in T, x(0) = D\eta.$$

Здесь $I = \{1, 2, ..., m\}, h_i^{'} - i-$я строка матрицы H; $g_i - i$ -я - компонента вектора g.

В [18] доказаны утверждения:

1. Пусть $\Gamma(z^0(\cdot)) > 0$ значение критерия качества задачи (3) при управление первого игрока $z^0(\cdot)$. Тогда второму игроку, ни при каких управлениях $v(\cdot)$, траекторию системы (1), не удается перевести в множество M в момент t^*.

2. Пусть $\max\limits_{z(\cdot)\in Z} \Gamma(z(\cdot))=0$. Тогда для любого управления первого игрока $z(\cdot)$, второму игроку удается перевести траекторию системы (1) в момент t^* в множество M.

Рассмотрим задачу

$$\Gamma_1(z(\cdot)) = \min_{(v(\cdot),\zeta,\varsigma)\in\Omega(z(\cdot))} (e'\zeta + e'\varsigma) \to \max_{z(\cdot)\in U}, \tag{4}$$

$$\Omega(z(\cdot)) = \{(v(\cdot), \zeta, \varsigma), v(\cdot) \in V | \dot{x}(t) = Ax(t)+bu(t)+dv(t), t \in T; x(0) = D\eta, \eta_* \leqslant \eta \leqslant \eta^*,$$
$$Hx(t^*) = g + \zeta - \varsigma, \zeta \geqslant 0, \varsigma \geqslant 0\}, e' = (1, 1, ...1).$$

3. Оптимальные значение критериев качеств задач (3) и (4) совпадают.

4. Оптимальное значение критерия качества задачи (4) совпадает с оптимальным значением критерия качества задачи

$$\Gamma_2(y, s, \xi) = \min_{(\lambda(\cdot),\nu(\cdot),\lambda^1,\nu^1)} (g'y + \overline{g}_*'s - \overline{g}^{*'}\xi + \int_0^{t^*} f^*\lambda(t)dt - \int_0^{t^*} f_*\nu(t)dt+$$
$$+\eta^{*'}\lambda^1 - \eta_*'\nu^1) \to \max_{(y,s,\xi)},$$
$$\dot{\psi}(t) = -A'\psi(t), t \in T;$$
$$\psi(t^*) = -H'y,$$
$$-\int_{t_k}^{t_{k+1}} \psi'(t)ddt - \xi_k + s_k = 0; s_k \geqslant 0, \xi_k \geqslant 0, k \in K_1 = \{1, 2, ..., l\},$$
$$-e \leqslant y \leqslant e$$
$$-\psi'(0)b - \nu(t) + \lambda(t) = 0, \nu(t) \geqslant 0, \lambda(t) \geqslant 0, t \in T,$$
$$-\psi'(t)D - \nu^1 + \lambda^1 = 0, \nu^1 \geqslant 0, \lambda^1 \geqslant 0.$$
$$(\overline{g}_* = (\overline{g}_{*k}, k \in K_1), \overline{g}_{*k} = g_*(t_k), k \in K_1; \overline{g}^* = (\overline{g}_k^*, k \in K_1), \overline{g}_k^* = g^*(t_k), k \in K_1)$$

Основным инструментом исследования является понятия опоры. Исходя из этого, в дальнейшем, координаты векторов размерности $l + 2m$ (l) разделяются на два типа — опорные и неопорные. Вектор, составленный из опорных координат (в том же порядке) обозначим с нижним индексом op, а вектор, составленный из остальных координат обозначим с нижним индексом n. Эти обозначения используются и для подматриц, составленных из опорных столбцов и неопорных столбцов.

Пусть

$F(t), t \in T-$ решение системы: $\dot{F} = AF, F(0) = E$ (E — единичная матрица), $K_1 = \{1, 2, ..., l\}$, $K_2 = \{l + 1, l + 2, ..., l + m\}$, $K_3 = \{l + m + 1, l + m + 2, ..., l + 2 * m\}$, $\overline{K} = K_1 \cup K_2 \cup K_3, \varphi(t) = HF(t^*)F^{-1}(t)b, \varphi_1(t) = HF(t^*)F^{-1}(t)d, t \in T; D^1 = HF(t^*)D, B = (\int_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi_1(t)dt, k \in K_1), \overline{B} = (B \vdots - e_k, k \in K_2 \vdots e_k, k \in K_3)$.

Множество $K_{op} = K_{op}(z(\cdot)) = K_{op1} \cup K_{op2} \cup K_{op3} (K_{op1} \subset K_1, K_{op2} \subseteq K_2, K_{op3} \subseteq K_3,$ $\mid K_{op} \mid = m)$ называется опорой [10] задачи

$$e'\zeta + e'\varsigma \to \min_{(v(\cdot),\zeta,\varsigma)\in\Omega(z(\cdot))}, \tag{5}$$

если $det\overline{B}_{op} \neq 0$.

Используя утверждения 1-4 и понятие опоры в [18] был разработан алгоритм решения задач уклонения, сближения:

Задача уклонения. Выбрать управление $z^0(\cdot)$, так, чтобы не допустить попадания траектории системы (1) в момент t^* в множество M (уклонить траекторию от встречи с терминальным множеством в момент t^*) при любом управлении $v(\cdot)$.

Задача сближения. Выбрать управление $v^0(\cdot)$, так, чтобы "перевести" траекторию системы (1) из конкретного состояния $x(0) = D\eta$ (из множества

$$M_1 = \{x \in R^n \mid x = D\eta, \eta_* \leqslant \eta \leqslant \eta^*\}$$

при $t = 0$) в множество M при t^* (при известном $z(\cdot)$) .

В работе [19], когда для любого управления $z(\cdot)$ первого игрока второму игроку удается перевести траекторию систему (1) в момент времени t^* в множество M, был разработан алгоритм для решения задачи

$$\begin{gathered} \min_{v(\cdot)\in\ V} J_1(z(\cdot), v(\cdot)) \to \max_{z(\cdot)\in Z}, \\ \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) + dv(t), \quad x(0) = D\eta, \\ Hx(t^*) = g. \end{gathered} \tag{6}$$

Исходя из вышеизложенного, для решения задачи (2) сначала с использованием алгоритма из [18] можно решить задач уклонения, сближения. Если удается определить управление первого игрока $z^0(\cdot) \in Z$, при которой задача уклонения разрешимо, то положим $\min\limits_{v(\cdot)\in\ V} J(z^0(\cdot), v(\cdot)) = +\infty$.

Если для любой точки множества M_1 задача сближения разрешимо, то использую алгоритм [19] определяем управление первого игрока $z^0(\cdot) \in Z$ задачи (6), при которой

$$\min_{v(\cdot)\in V} J(z^0(\cdot), v(\cdot)) = \max_{z(\cdot)\in Z} \min_{v(\cdot)\in V} J(z(\cdot), v(\cdot)).$$

4 Алгоритм решения задачи (2)

4.1 Описание алгоритма

Приведем вычислительную схему алгоритма решения задачи (2).

Шаг 1. Решим систему $\dot{F} = AF$ с начальным условием $F(0) = E$. Положим $\varphi(t) = HF(t^*)F^{-1}(t)b, \varphi_1(t) = HF(t^*)F^{-1}(t)d, c(t) = c'F(t^*)F^{-1}(t)b, d(t) = c'F(t^*)F^{-1}(t)d, t \in T; D^1 = HF(t^*)D, I = \{1, 2, ..., m\}, J = \{1, 2, ..., r\}, K_1 = \{1, 2, ..., l\}, K_2 = \{l+1, l+2, \ldots, l+m\}, K_3 = \{l+m+1, l+m+2, \ldots, l+2*m\}, \overline{K} = K_1 \cup K_2 \cup K_3, \overline{g}_* = (\overline{g}_{*k}, k \in K_1), \overline{g}_{*k} = g_*(t_k), k \in K_1; \overline{g}^* = (\overline{g}^*_k, k \in K_1), \overline{g}^*_k = g^*(t_k), k \in K_1, B = (\int_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi_1(t)dt, k \in K_1), \overline{B} = (B \vdots - e_k, k \in K_2 \vdots e_k, k \in K_3)$. $\overline{d} = (\overline{d}_k, k \in \overline{K}), \overline{d}_k = 0, k \in K_1, \overline{d}_k = 1, k \in K_2 \cup K_3, q_1 := 1, K^1_{op} = \{1, 2, ..., m\}, q = C^m_{l+2m} = ((l+2m)!)/(m!(l+m)!), f := -\infty$. Переходим к шагу 2.

Шаг 2. Если все элементы множества K_{op}^{q1} из K_1 либо среди ее элементов имеются элементы k, q такие, что $k+m=q, k\in K_2, q\in K_3$, то переходим к шагу 6. В противном случае переходим к шагу 3.

Шаг 3. Вычислим $det\overline{B}_{op}$. Если $det\overline{B}_{op}=0$, то переходим к шагу 6. В противном случае переходим к шагу 4.

Шаг 4. При опоре K_{op}^{q1} построим вектор $\mu' = d'_{op}\overline{B}_{op}^{-1}$. Если $\exists i_* \in I, |\mu_{i^*}|>1$, то переходим к шагу 6. В противном случае переходим к шагу 5.

Шаг 5. При опоре K_{op}^{q1} построим $(\mu, s, \xi), (\lambda(\cdot), \nu(\cdot), \lambda^1, \nu^1)$:

$$\delta' = \mu' B, \omega(t) = \mu'\varphi(t), t\in T; \omega^{1'} = \mu' D^1. \tag{7}$$

$$\begin{gathered}
\xi_k=\delta_k, s_k=0, \quad \text{если} \quad \delta_k \geqslant 0;\\
\xi_k=0, s_k=-\delta_k, \quad \text{если} \quad \delta_k<0, k\in K_1;\\
\nu(t)=\omega(t), \lambda(t)=0, \quad \text{если} \quad \omega(t)\geqslant 0;\\
\nu(t)=0, \lambda(t)=-\omega(t), \quad \text{если} \quad \omega(t)<0, t\in T;\\
\nu_j^1=\nabla_j^1, \lambda_j^1=0, \quad \text{если} \quad \omega_j^1\geqslant 0;\\
\nu_j^1=0, \lambda_j^1=-\nabla_j^1, \quad \text{если} \quad \omega_j^1<0, j\in J,
\end{gathered} \tag{8}$$

и по ним вычислим значение:

$$F = g'y + \overline{g}'_* s - \overline{g}^{*'}\xi + \int_0^{t^*} f^*\lambda(t)dt - \int_0^{t^*} f_*\nu(t)dt + \eta^{*'}\lambda^1 - \eta'_*\nu^1. \tag{9}$$

Если $F>0$, то построим $\overline{z}(\cdot) = (\overline{u}(\cdot), \overline{\eta})$:

$$\begin{aligned}
&\overline{u}(t)=f_* \text{ при } \omega(t)\geqslant 0; \overline{u}(t)=f^* \text{ при } \omega(t)<0, t\in T;\\
&\overline{\eta}_j=\eta_j^* \quad \text{при} \quad \omega_j^1\geqslant 0; \overline{\eta}_j=\eta_{*j} \quad \text{при} \quad \omega_j^1<0, j\in J;
\end{aligned} \tag{10}$$

положим $f:=+\infty$ и переходим к шагу 11 (при $\overline{z}(\cdot)=(\overline{u}(\cdot),\overline{\eta})$ траектория системы (1) не попадает в множество M в момент t^*). Если же $F\leqslant 0$, то переходим к шагу 6.

Шаг 6. Если $q1<q$, то положив $q1:=q1+1$, определяем следующую опору K_{op}^{q1} в лексикографическом порядке [24] и переходим к шагу 2. В противном случае переходим к шагу 7.

Шаг 7. Положим $q=C_l^m, q_1:=1, K_{op}^1=\{1,2,...,m\}, f:=-\infty$. Переходим к шагу 8.

Шаг 8. Вычислим $detB_{op}$. Если $detB_{op}=0$, то переходим к шагу 10. В противном случае переходим к шагу 9.

Шаг 9. При опоре K_{op}^{q1} построим $(\mu, s, \xi), (\lambda(\cdot), \nu(\cdot), \lambda^1, \nu^1)$:

$$\mu' = (\int_{t_k}^{t_{k+1}} d(t)dt, k\in K_{op})B_{op}^{-1},$$

$$\delta' = \mu' B - (\int_{t_k}^{t_{k+1}} d(t)dt, k\in K_1), \omega(t)=\mu'\varphi(t)-c(t), t\in T; \omega^{1'} = (\mu' H - c')F(t^*)D. \tag{11}$$

$$\begin{gathered}
\xi_k=\delta_k, s_k=0, \quad \text{если} \quad \delta_k\geqslant 0;\\
\xi_k=0, s_k=-\delta_k, \quad \text{если} \quad \delta_k<0, k\in K_1;\\
\nu(t)=\omega(t), \lambda(t)=0, \quad \text{если} \quad \omega(t)\geqslant 0;
\end{gathered}$$

$$\nu(t)=0,\lambda(t)=-\omega(t),\quad \text{если}\quad \omega(t)<0,t\in T; \tag{12}$$
$$\nu_j^1=\nabla_j^1,\lambda_j^1=0,\quad \text{если}\quad \omega_j^1\geqslant 0;$$
$$\nu_j^1=0,\lambda_j^1=-\nabla_j^1,\quad \text{если}\quad \omega_j^1<0,j\in J,$$

и по ним вычислим значение:

$$F=g'y+\overline{g}'_*s-\overline{g}^{*'}\xi+\int_0^{t^*}f^*\lambda(t)dt-\int_0^{t^*}f_*\nu(t)dt+\eta^{*'}\lambda^1-\eta'_*\nu^1. \tag{13}$$

Если $F\leqslant f$, то переходим к шагу 10. В проитвном случае положим $f:=F$, построим $\overline{z}(\cdot)=(\overline{u}(\cdot),\overline{\eta})$:

$$\begin{array}{l}\overline{u}(t)=f_* \text{ при } \omega(t)\geqslant 0;\overline{u}(t)=f^* \text{ при } \omega(t)<0,t\in T;\\ \overline{\eta}_j=\eta_j^* \quad \text{при} \quad \omega_j^1\geqslant 0;\overline{\eta}_j=\eta_{*j} \quad \text{при} \quad \omega_j^1<0,j\in J;\end{array} \tag{14}$$

и переходим к шагу 10.

Шаг 10. Если $q1<q$, то положив $q1:=q1+1$, определяем следующую опору K_{op}^{q1} в лексикографическом порядке [24] и переходим к шагу 8. В противном случае переходим к шагу 11.

Шаг 11. $\overline{z}(\cdot)=(\overline{u}(\cdot),\overline{\eta})$– оптимальное управление первого игрока в задаче (2), f– оптимальное значение критерия качества задачи (2).

4.2 Обоснование алгоритма

Определение 2. *Переход от опоры K_{op}^{ii} к опоре $K_{op}^{jj}(ii,jj=\overline{1,C_{l+2m}^m}(C_l^m)$ с вычислением значения F по формулам (7)-(10) ((11)-(14)) назовем итерацией.*

Теорема 1. *Приведенный алгоритм за конечное число итерации строит оптимальное управление первого игрока задачи (2).*

Доказательство. Количество итерации на шагах 1-6 конечно. Действительно, вычисление значение F по формулам (7)-(10) осуществляется за количество итерации, который более чем C_{l+2m}^m. Аналогично, количество итерации на шагах (11)-(14) не более чем C_l^m, поскольку количество возможных опор задачи (6) в работе [19] не более чем C_l^m. Следовательно, через конечное число итерации алгоритм строит оптимальное управление первого игрока задачи (2).

4.3 Пример

Рассмотрим задачу (2) со следующими значениями параметров:

$$n=2,m=1,r=2,t^*=1,\tau=\{0,1/4,1/2\},$$
$$c'=(0;1),b'=(0;1),d'=(0;-1),H=(1;0),$$
$$f_*=-1,f^*=1,g=1/4,\eta'_*=(0,0),\eta^{*'}=(1,1),$$
$$g_*(t)=-2,t\in[0,1/4[,g_*(t)=-7,t\in[1/4,1/2[,g_*(t)=-2,t\in[1/2,1],$$
$$g^*(t)=1,t\in[0,1/4[,g^*(t)=20,t\in[1/4,1/2[,g^*(t)=1,t\in[1/2,1],$$
$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Применяем описанный алгоритм.

Шаг 1. $F(t)=\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix},\varphi_1(t)=t-1,\varphi(t)=1-t,c(t)=1,d(t)=-1,$ $t\in[0,1],D^1=(1,1),\overline{B}=(-7/32;-5/32;-1/8;-1;1),\overline{d}'=(0;0;0;1;1),$

$\overline{g}'_* = (-2; -7; -2), \overline{g}^{*'} = (1; 20; 1), I = \{1\}, J = \{1, 2\}, K_1 = \{1, 2, 3\}, K_2 = \{4\}$, $K_3 = \{5\}, \overline{K} = \{1, 2, 3, 4, 5\}, K^1_{op} = \{1\}, q1 = 1, f = -\infty$.

Шаг 2. $K^1_{op} \subset K_1$. Шаг 6. $q1 = 2, K^2_{op} = \{2\}$. Шаг 2. $K^2_{op} \subset K_1$. Шаг 6. $q1 = 3, K^3_{op} = \{3\}$. Шаг 2. $K^3_{op} \subset K_1$. Шаг 6. $q1 = 4, K^4_{op} = \{4\}$. Шаг 2. Шаг 3. $\det\overline{B}_{op} = -1$. Шаг 4. $\mu = -1, \delta' = (7/32; 5/32; 1/8), \omega(t) = t - 1, \nu(t) = 0, \lambda(t) = 1 - t, t \in T = [0, 1], \xi' = (7/32; 5/32; 1/8), s' = (0; 0; 0), \omega^{1'} = (-1; -1), \nu^{1'} = (0; 0)\lambda^{1'} = (1; 1); F = -39/32$. Шаг 6. $q1 = 5, K^4_{op} = \{5\}$. Шаг 2. Шаг 3. $\det\overline{B}_{op} = 1$. Шаг 4. $\mu = 1, \delta' = (-7/32; -5/32; -1/8), \omega(t) = t - 1, \nu(t) = 0, \lambda(t) = 1 - t, t \in T = [0, 1], s' = (7/32; 5/32; 1/8), \xi' = (0; 0; 0), \omega^{1'} = (1; 1), \nu^{1'} = (1; 1)\lambda^{1'} = (0; 0); F = -33/32$. Шаг 6. $q1 = 6$. Шаг 7. $q1 = 1, K^1_{op} = \{1\}$. Шаг 8. $\det B_{op} = -7/32$. Шаг 9. $\mu = 8/7, \xi' = (0; 1/14; 5/14), s' = (0; 0; 0), \nu^{1'} = (8/7; 0), \lambda^{1'} = (0; 0), \nu(t) = (1 - 8t)/7, \lambda(t) = 0, t \in [0, 1/8]; \nu(t) = 0, \lambda(t) = (8t - 1)/7, t \in [1/8, 1]; F = (-59)/56. f = -59/56$, $\overline{z}(\cdot) = (\overline{u}(\cdot), \overline{\eta}) : \overline{u}(t) = 1, t \in [0, 1/8[; \overline{u}(t) = -1, t \in [1/8, 1]; \overline{\eta}' = (1, 1)$. Шаг 10. $q1 = 2, K^2_{op} = \{2\}$. Шаг 8. $\det B_{op} = -5/32$. Шаг 9. $\mu = 8/5, \xi' = (0; 0; 9/10), s' = (8/5; 0; 0), \nu^{1'} = (8/5; 0), \lambda^{1'} = (0; 0), \nu(t) = (3 - 8t)/5, \lambda(t) = 0, t \in [0, 3/8]; \nu(t) = 0, \lambda(t) = (8t - 3)/5, t \in [3/8, 1]; F = -11/40. f = -11/40$, $\overline{z}(\cdot) = (\overline{u}(\cdot), \overline{\eta}) : \overline{u}(t) = -1$, $t \in [0, 3/8[; \overline{u}(t) = 1, t \in [3/8, 1]; \overline{\eta}' = (1, 1)$. Шаг 10. $q1 = 3, K^3_{op} = \{3\}$. Шаг 8. $\det B_{op} = -1/8$. Шаг 9. $\mu = 4, \xi' = (0; 0; 0), s' = (5/8; 3/8; 0), \nu^{1'} = (4; 0), \lambda^{1'} = (0; 0), \nu(t) = 3 - 4t, \lambda(t) = 0, t \in [0, 3/4]; \nu(t) = 0, \lambda(t) = 4t - 3, t \in [3/4, 1]; F = -13/8$. Шаг 11. $\overline{z}(\cdot) = (\overline{u}(\cdot), \overline{\eta}) : \overline{u}(t) = -1, t \in [0, 3/8[; \overline{u}(t) = 1, t \in [3/8, 1]; \overline{\eta}' = (1, 1), f = -11/40$.

5 Заключение

Рассматривается игровая задача, связанная с задачей переводом траектории динамической системы, управляемой двумя игроками из любой точки заданного множества в терминальное множества. Разработан и обоснован алгоритм решения рассматриваемой задачи, который состоит из двух частей. В первой части алгоритма определяется, удается ли перевести траекторию системы в терминальное множество. Если удается перевести траекторию системы в терминальное множество, то во второй части алгоритма, определяется максиминное значение функционала, образованного линейной комбинацией координат траектории динамической системы. В обоих частях алгоритма решение соответствующих задач определяются решением специальных максиминных задач управления на специальных классах управлений. Основным инструментом исследования задачи служит понятие опоры. Максимальные значение критерий качества специальных максиминных задач управления определяются с помощью конечного числа опор.

Литература

[1] *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Оптимизация линейных систем. – Минск: Изд. БГУ, 1973. – 248 с.

[2] *Понтрягин Л.С.* Линейные дифференциальные игры преследования // Матем. сб.. – 1980. – Т. 112, №3. – С. 307-330.

[3] *Сатимов Н.* К задаче преследования в линейных дифференциальных играх // Дифференц. уравнения. – 1973. – Т. 9, №11. – С. 2000-2009.

[4] *Азамов А.* Двойственность линейных дифференциальных игр преследования // Докл. АН СССР. – 1982. – Т. 263, №4. – С. 777-780.

[5] *Гневко С.В., Исраилов И.И.* Построение оптимального гарантирующего управления в линейной дифференциальной игре // Актуальные задачи теории динамических систем управления. – Мн.: Наука и техника, 1989. – С. 203-212.

[6] *Сатимов Н.Ю.* Методы решения задачи преследования в теории дифференциальных игр. – Ташкент: Национальная библиотека Узбекистана имени А. Навои, 2019. – 230 с.

[7] *Ibragimov G., Ferrara M., Ruziboev M. et al.* Linear evasion differential game of one evader and several pursuers with integral constraints // Int J Game Theory. – 2021. – Vol. 50. – P. 729-750. – doi: http://dx.doi.org/10.1007/s00182-021-00760-6.

[8] *Габасов Р., Даукшас В.З., Кириллова Ф.М.* Двойственный точный метод решения линейной задачи терминального управления // Автоматика и телемеханика. – 1984. – № 1. – С. 48-57.

[9] *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Методы линейного программирования. Ч. I—III. – Мн.: Изд. БГУ, 1977-1980. – 176 с., 238 с., 368 с.

[10] *Габасов Р., Кириллова Ф.М., Тятюшкин А.И.* Конструктивные методы оптимизации. Ч. 1-2. – Минск: Университетское, 1984. – 214 с., 207 с.

[11] *Иванилов Ю.П.* Двойственные полуигры // Известия АН СССР. Серия техническая кибернетика. – 1972. – № 4. – С. 3-9.

[12] *Федоров В.В.* Численные методы максимина. – М.: Наука, 1979. – 280 с.

[13] *Азизов И.* Алгоритм вычисления ε-оптимального решения линейной максиминной задачи со связанными переменными // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. – 1986. – № 1. – С. 14-18.

[14] *Маматов А.Р.* Алгоритм решения одной игры двух лиц с передачей информации // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2006. – Т. 46, № 10. – С. 1784-1789. – doi: http://dx.doi.org/10.1134/S0965542506100071.

[15] *Маматов А.Р.* Алгоритм решения одной игровой задачи со связанными переменными // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2023. – № 2(47). – С. 150-159.

[16] *Маматов А.Р.* Algorithm for Solving the Problem of the First Phase in a Game Problem with Arbitrary Situations // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. – 2024. – Т. 48. – С. 3-20. – doi: http://dx.doi.org/10.26516/1997-7670.2024.48.3.

[17] *Маматов А.Р.* Поиск локально-оптимальных стратегий в линейной игровой задаче с благоприятными ситуациями // Дискретный анализ и исследование операций. – 2024. – Т. 31, № 3. – С. 123-143.

[18] *Mamatov A.R.* Algorithm for solving the maximin evasion-approach problem // AIP Conference Proceedings. – 2024. – Vol. 3244. – 020027. – doi: http://dx.doi.org/10.1063/5.0241514.

[19] *Маматов А.Р.* О решении линейной максиминной задачи управления с подвижными краевыми условиями // Узбекский математический журнал. – 2017. – № 4. – С. 83-93.

[20] *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Управление динамическим объектом в реальном времени в условиях постоянно действующих возмущений // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 6. – С. 7-13.

[21] *Костюкевич Д.А., Дмитрук Н.М.* Метод построения оптимальной стратегии управления в линейной терминальной задаче // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2021. – № 2. – С. 38-50. – doi: http://dx.doi.org/10.33581/2520-6508-2021-2-38-50.

[22] *Дмитрук Н.М.* Многократно замыкаемая стратегия управления в линейной терминальной задаче оптимального гарантированного управления // Тр. ИММ УрО РАН. – 2022. – Т. 28, № 3. – С. 66-82. – doi: http://dx.doi.org/10.33581/2520-6508-2021-2-38-50.

[23] *Маматов А.Р.* Алгоритм решения одной игры двух лиц // Znanstvena misel journal. – 2023. – № 83. – С. 60-62. – doi: `http://dx.doi.org/10.5281/zenodo.10032736`.

[24] *Липский В.* Комбинаторика для программистов. – М.: Мир, 1988. – 200 с.

UDC 517.977

ALGORITHM FOR SOLVING A TWO-LEVEL GAME PROBLEM OF DYNAMIC SYSTEM TRAJECTORY TRANSFER

Mamatov A.R.

akmm1964@rambler.ru

Samarkand State University named after Sh. Rashidov,

15, University Blvd, Samarkand, 140104 Uzbekistan.

The game problem of transferring the trajectory of a dynamic system controlled by two players whose goals are opposite, from any point of a given set to a terminal set is considered. The given set is described by the control parameter of the first player. The first player chooses his control first, then, knowing the first player's control, the second player chooses his control. The goal of the first player is to choose a control to prevent the trajectory of the dynamic system from entering the terminal set under any control of the second player, and the goal of the second player is to choose a control to transfer the trajectory of the dynamic system to the terminal set under any control of the first player. If the second player manages to transfer the system trajectory to the terminal set, then the additional goal of the first player is to maximize the minimum functional for the second player's control, and the additional goal of the second player is to minimize the linear functional. An algorithm for solving the problem under consideration has been developed and substantiated. An illustrative example is given.

Keywords: dynamic system, game problem, support, algorithm.

Citation: Mamatov A.R. 2025. Algorithm for solving a two-level game problem of dynamic system trajectory transfer. *Problems of Computational and Applied Mathematics.* 5(69): 64-73.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.5_69.2025.05

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 5(69) 2025

Журнал основан в 2015 году.
Издается 6 раз в год.

Учредитель:
Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта.

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при Администрации Президента Республики Узбекистан.
Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Адрес редакции:
100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.
Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.
Э-почта: journals@airi.uz.
Веб-сайт: https://journals.airi.uz.

Дизайн и вёрстка:
Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.
Подписано в печать 29.10.2025 г.
Формат 60x84 1/8. Заказ №7. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 5(69) 2025

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:
Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.
The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Address:
100125, Tashkent, Buz-2, 17A.
Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.
E-mail: journals@airi.uz.
Web-site: https://journals.airi.uz.

Layout design:
Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.
Signed for print 29.10.2025
Format 60x84 1/8. Order No. 7. Print run of 100 copies.

Содержание

Contents

№ 5(69) 2025 ISSN 2181-8460

HISOBLASH VA AMALIY MATEMATIKA MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

RAQAMLI TEXNOLOGIYALAR VA
SUN'IY INTELLEKTNI RIVOJLANTIRISH
ILMIY-TADQIQOT INSTITUTI