

УДК 519.632.4

ВЫСОКОТОЧНЫЙ И ЭФФЕКТИВНЫЙ МЕТОД ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ИЗГИБА ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ ПЛИТЫ

*Нормуродов Ч.Б., Зиякулова Ш.А.

*ch.normurodov@gmail.com

Термезский государственный университет,
190111, Узбекистан, Термиз, ул. Баркамол авлод, дом 43.

Многие практические задачи, такие как солнечная панель, микропластин внутри электронного устройства, тонкий слой металла, который подвергается воздействию лазера, изгиб железобетонной плиты описываются различными краевыми задачами для бигармонического уравнения. Решение бигармонических уравнений итерационными методами крайне неудобна из-за требования выполнения большого количества арифметических операций, кроме того, число итераций в которых зачастую оказывается очень большим. Рассмотрение бигармонических уравнений с краевыми условиями Дирихле и Неймана ограничивают для их численного решения применять разностные методы. Поэтому разработка высокоточных и эффективных прямых численных методов для решения подобных уравнений представляют несомненный научный интерес. С этой целью в данной статье для численного решения краевых задач для бигармонического уравнения предлагается применить прямой численный метод-дискретный вариант метода предварительного интегрирования обладающий высокой точностью и эффективностью.

Ключевые слова: железобетонная плита, изгиб, нагрузка, бигармоническое уравнение, полиномы Чебышева, дискретный вариант метода предварительного интегрирования.

Цитирование: Нормуродов Ч.Б., Зиякулова Ш.А. Высокоточный и эффективный метод для численного моделирования изгиба железобетонной плиты // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2025. – № 5(69). – С. 5-16.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.5_69.2025.01

1 Введение

Бигармонические уравнения часто встречаются во многих областях техники и физики, описывая некоторые явления и имеют многочисленные приложения. Такая задача используется при проектировании железобетонных плит, например: полов зданий, мостовых пролётов, промышленных перекрытий. Это необходимо для обеспечения безопасности, экономии материалов и устойчивости конструкции. С этой целью приведем краткий обзор научных источников, иллюстрирующих важность бигармонических уравнений и о методах решения этих уравнений.

В статье [1] изучена система бигармонических уравнений, связанные граничными условиями различного типа содержащие некоторые комбинации значений, div , curl и grad решения. Целью данной статьи также является демонстрация применения аналитических методов Клиффорда, разработанных для эллиптических задач второго порядка, к решению краевых задач более высокого порядка. Результаты по специальной краевой задаче для бигармонического уравнения будут использованы для

исследования некоторых систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Представление спектрально элементного метода, основанного на приближении Лежандра-Галеркина для решения двумерных бигармонических уравнений изложено в [2]. Путем построения соответствующих базисных функций, удовлетворяющих граничным условиям дифференциальных уравнений, дискретная вариационная формулировка сводится к линейной системе с разреженными и симметричными матрицами, которая может быть эффективно решена с помощью быстрого метода Шура-дополнения. Для подтверждения скорости сходимости теоретических результатов проводится проверка точности. Предложенный метод применяется для расчёта перемещения упругой пластины при равномерной приложенной нагрузке и функции потока с нулевым числом Рейнольдса в приводимой в движение полости, и авторы данной статье утверждают, что результаты хорошо согласуются с установленными результатами. Идея дифференциальной квадратуры для построения нового алгоритма решения дифференциальных уравнений использована в [3]. В данной статье описывается применение предложенного метода для аппроксимации решения многомерных эллиптических уравнений в частных производных. В качестве тестовой задачи в 2D и 3D решаются некоторые примеры бигармонических уравнений и уравнений Пуассона. Результаты сравниваются с некоторыми существующими методами, чтобы показать эффективность и быстродействие предложенного алгоритма. Представление абстрактную настройку для смешанного метода конечных элементов для бигармонического уравнения является предметом исследования в [4]. Абстрактная настройка объединяет смешанный метод конечных элементов для первого и второго бигармонических уравнений в единую структуру. Приводятся оценки погрешности для обоих типов бигармонического уравнения. Целью статье [5] является повышение гидравлической эффективности без изменения габаритных размеров. Был изучен проект оптимизации профиля лопасти аэроцентробежного насоса на основе модели, заменяющей бигармоническое уравнение. Результаты показывают, что метод преобразования кодов параметров проектирования позволяет сократить количество параметров оптимизации с пяти до трех, превращает пространство проектирования в куб, и по сравнению с другими существующими моделями, предлагаемый авторами в данной статье модель имеет более высокую точность. Результаты оптимизации показывают, что предлагаемый метод позволяет значительно повысить гидравлическую эффективность.

В статье [6] расширяется ранее проведенные исследование авторов и выводятся формулы для вычисления коэффициентов интенсивности бигармонического уравнения в невыпуклых многоугольных областях, содержащих трещины или входящие углы, при различных граничных условиях (ГУ), таких как закрепленные (CC), просто поддерживаемые (SS), свободные (FF) или смешанные условия (CS, FS, SF). Для численного приближения решения предлагается как итерационный метод, так и прямой метод конечных элементов. Статья [7] посвящена получению локального варианта метода граничных узлов (ВКМ) для случаев течения Стокса и бигармонического уравнения. По сравнению с глобальным вариантом, локальный приводит к разреженной результирующей матрице системы уравнений и, таким образом, делает решение особенно крупномасштабных задач более эффективным. Для локализации была использована комбинация метода ВКМ и метода конечной коллокации. Согласно утверждениям, авторов статье [8] поле остаточных напряжений на поверхности конструкции, безопасности и оптимизации производственных процессов в машиностроении. Распространенные экспериментальные методы измеряют значения напря-

жений только в отдельных точках, не предоставляя информации об общем распределении поля напряжений. Непрерывность макроскопических напряжений позволяет реконструировать поля напряжений в виде непрерывных поверхностей напряжений с использованием точек отбора проб. В этой работе функция напряжений аппроксимируется с помощью двумерных полиномов Чебышева, а затем разрабатывается модель восстановления напряжений. В статье [9] представлен и изучен метод конечных элементов слабого Галеркина без стабилизатора для смешанной формы бигармонического уравнения на общих полигональных сетках. Далее, используя слабый функции образуются дискретные ограниченного порядка полиномов и выводятся скорости сходимости в некоторых функциональных пространствах.

Решение бигармонического уравнения в смешанной форме, дискретизированное гибридным уравнением высокого порядка методами рассматривается в [10]. Две результирующие эллиптические задачи второго порядка могут быть разделены путем введения нового неизвестного, соответствующего граничному значению решения первой задачи Лапласа. Этот метод позволяет получить глобальную линейную задачу, которая может быть решена итеративно с помощью метода Крылова. Точнее, на каждой итерации схемы необходимо решить две эллиптические задачи второго порядка и вычислить нормальную производную на границе. Разработан новый предобусловливатель, ускоряющий сходимость метода Крылова.

В статье [11] исследуется обратная задача обнаружения неизвестных препятствий методом ограждения, используя для измерений карту Дирихле–Неймана. Метод обосновывается для случая проницаемого препятствия, включающего бигармоническое уравнение. Исследование [12] сосредоточено на несвязанном методе конечных элементов низкого порядка для решения трехмерного бигармонического уравнения. Основной вклад заключается в дискретизации обобщенного уравнения Стокса с использованием несоответствующего элемента младшего порядка для пространства и граничного элемента младшего порядка для давления. Кроме того, в методе используется элемент Лагранжа для решения уравнения Пуассона.

Для решения дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка методом рандомизированных нейронных сетей (RNN) с общими функциями активации, такими как сигмовидная, касательная и гауссова функция изложено в статье [13]. В этой работе разрабатывается физический подход, основанный на использовании функции Фурье и метод однослойного (RNN). Этот подход направлен на аппроксимацию решения для класса бигармонических уравнений четвертого порядка с двумя граничными условиями как в унифицированной, так и в неединичной областях. Численные эксперименты и сравнительный анализ проведенные в этой работе показывают, что предложенный метод является стабильным, надежным, точным и эффективным, чем другие подходы, при решении бигармонических уравнений как для регулярных, так и для нерегулярных областей. В статье [14] предлагается численный алгоритм, который сочетает метод регуляризации затухания с методом фундаментальных решений для решения задачи Коши, связанной с бигармоническим уравнением. Авторы данной статьи вводят новый критерий остановки итеративного процесса и сравнивают его эффективность с предыдущими критериями. Численное моделирование с использованием введенного критерия остановки демонстрирует сходимость, стабильность и эффективность предложенного алгоритма, а также его способность устранять зашумленные данные.

В статье [15] обобщенное бигармоническое уравнение было численно решено с использованием метода двух хрупких точек. Рассматривается пробная функция в виде локальных, простых и разрывных многочленов.

Приведены некоторые численные примеры для оценки эффективности, точности и скорости вычислений. Простой смешанный метод конечных элементов Галеркина для бигармонического уравнения предложен в [16].

Уравнение четвертого порядка переписывается в виде двух связанных уравнений второго порядка путем введения вспомогательной переменной. Авторы данной статьи используют слабые элементы Галеркина одинакового порядка для аппроксимации основной переменной и вспомогательной переменной, а локальный дискретный оператор слабого градиента определяется в локальном пространстве конечных элементов. Затем создают слабую схему Галеркина на общих полигональных сетках без стабилизирующего члена первичной переменной. Кроме того, авторы доказывают корректность численной схемы и приводят анализ ошибок.

Статья [17] посвящена распространению одномерных многочленов Чебышева первого рода на многомерную настройку, где наилучшие аппроксимации для конкретных одночленов определяются многочленами меньшей степени относительно единой нормы. Применения полиномов Чебышева первого рода для численного моделирования проблемы устойчивости для двухфазных потоков изложена в статье [18]. В статье [19] предлагается эффективный численный метод, так называемый спектрально-сеточный метод для решения уравнения Оппа-Зоммерфельда, где в качестве базисных функций использованы полиномы Чебышева первого рода. Численное моделирование уравнений эллиптического типа дискретным вариантом метода предварительного интегрирования с полиномами Чебышева первого рода изложено в [20]. В статье [21] предлагается непрерывный вариант метода предварительного интегрирования с полиномами Чебышева первого рода для решения сингулярно возмущенного дифференциального уравнения. Численное моделирование краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной с использованием полиномов Чебышева второго рода изложена в [22]. Численное решение краевой задачи для бигармонического уравнения дискретным вариантом метода предварительного интегрирования изложена в статье [23]. В которой в качестве базисных функций использованы полиномы Чебышева первого рода.

2 Постановка задачи

Рассмотрим изгиб квадратной железо-бетонной плиты расположенной в области $\{-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ под воздействием равномерно распределенной нагрузке $f(x, y)$. Функция изгиба плиты $u(x, y)$ описывается следующим бигармоническим уравнением

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = -f(x, y), \quad -1 < x, y < 1. \quad (1)$$

Считается, что края плиты не изгибаются, остаются неподвижными, а также отсутствует поворот по краям. Эти условия записываются в виде следующих краевых условий:

$$\begin{aligned} u(-1, y) &= 0, \quad u(1, y) = 0, \\ u(x, -1) &= 0, \quad u(x, 1) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(-1, y) &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, -1) &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Для практической проверки сходимости и порядка точности дискретного варианта метода предварительного интегрирования применяем метод пробных функций. Суть данного метода заключается в следующем. Выбирается некоторая произвольная пробная функция (точное решение) $u_e(x, y) = u_{exact}(x, y)$ для задачи (1)-(2). Подставляя ее в уравнение (1), найдем правую часть

$$f(x, y) = -\left(\frac{\partial^4 u_e}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u_e}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u_e}{\partial y^4}\right) \quad (3)$$

и краевые значения (2). Затем полученная задача решается с помощью предлагаемого метода и найденное приближенное решение $u_a(x, y) = u_{approximate}(x, y)$ сравнивается с известной функцией $u_e(x, y)$ при различных значениях характерных параметров. В качестве пробной функции выбираем следующую функцию

$$u_e(x, y) = (1 - x^2)^2(1 - y^2)^2 \cos(\pi x) \cos(\pi y). \quad (4)$$

И подставляя ее в уравнению (3) находится правая часть $f(x, y)$. Затем задача (1)-(2) с известной функцией $f(x, y)$ приближенно решается предлагаемым дискретным вариантом метода предварительного интегрирования и полученное приближенное решение сравнивается с точным решением (4).

3 Метод решения

Для численного решения задачи (1) -(2) применяем дискретный вариант метода предварительного интегрирования. В этом случае все частные производные и правая часть уравнения (1) представляются в виде двойных конечных рядов по полиномам Чебышева первого рода. Для полиномов Чебышева имеются дискретные рекуррентные формулы интегрирования, поникающие порядок частных производных в дискретном виде. Границные условия (2) с помощью выбора соответствующих коэффициентов двойных рядов удовлетворяются точно. Затем подставляя введенные конечные двойные ряды в бигармоническое уравнение (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях полиномов Чебышева получается основное дискретное уравнение, которое четырехкратно интегрируется как по переменной "x", так и по переменной "y" с применением дискретных рекуррентных формул. Таким образом, получается основное алгебраическое уравнение. К этому уравнению присоединяются краевые условия (2) записанные в виде конечных двойных рядов. В результате получается система линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов разложения искомого приближенного решения.

Изложим алгоритм решения предлагаемого метода. Введем следующие конечные ряды по полиномам Чебышева:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 u_a}{\partial x^4} &= \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M {}' a_{ij}^{(4x)} T_i(x) T_j(y), \\ \frac{\partial^4 u_a}{\partial x^2 \partial y^2} &= \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M {}' a_{ij}^{(2x, 2y)} T_i(x) T_j(y), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{\partial^4 u_a}{\partial y^4} = \sum_{i=0}^N' \sum_{j=0}^M' a_{ij}^{(4y)} T_i(x) T_j(y),$$

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^N' \sum_{j=0}^M' g_{ij} T_i(x) T_j(y),$$

где штрихи над суммой означает, что коэффициент a_{ij} берется с множителем $\frac{1}{2}$, когда индекс i или j равно нулю, берется со множителем $\frac{1}{4}$, когда $i = j = 0$, одновременно, $T_i(x)$ – полином i – го порядка по переменной x , $T_j(y)$ – полином j – го порядка по переменной y . Теперь подставляя ряды (5) в уравнение (1), имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^N' \sum_{j=0}^M' a_{ij}^{(4x)} T_i(x) T_j(y) + 2 \sum_{i=0}^N' \sum_{j=0}^M' a_{ij}^{(2x, 2y)} T_i(x) T_j(y) + \\ & + \sum_{i=0}^N' \sum_{j=0}^M' a_{ij}^{(4y)} T_i(x) T_j(y) = - \sum_{i=0}^N' \sum_{j=0}^M' g_{ij} T_i(x) T_j(y). \end{aligned}$$

Затем приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях полиномов, имеем алгебраическую систему

$$a_{ij}^{(4x)} + 2a_{ij}^{(2x, 2y)} + a_{ij}^{(4y)} = -g_{ij}. \quad (6)$$

Порядок производных в системе (6) можно понизить используя следующие дискретные формулы интегрирования:

$$a_{ij}^{((k-1)x)} = \frac{a_{i-1,j}^{(kx)} - a_{i+1,j}^{(kx)}}{2i}, \quad a_{ij}^{((k-1)y)} = \frac{a_{i,j-1}^{(ky)} - a_{i,j+1}^{(ky)}}{2j}. \quad (7)$$

С помощью формул (7) система (6) четырехкратно “интегрируется” как по переменной “ x ”, так и по переменной “ y ”. Например, при первом шаге интегрирования по переменной “ x ” имеем:

$$a_{ij}^{(3x)} + 2a_{ij}^{(x, 2y)} + \frac{a_{i-1,j}^{(4y)} - a_{i+1,j}^{(4y)}}{2i} = - \left(\frac{g_{i-1,j} - g_{i+1,j}}{2i} \right).$$

После выполнения всех операций интегрирования и требования удовлетворения краевых условий (2) для приближенного решения

$$u_a(x, y) = \sum_{i=0}^N' \sum_{j=0}^M' a_{ij} T_i(x) T_j(y), \quad (8)$$

приводит к следующей системе линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов разложения a_{ij} ($i = 0, 1, 2, \dots, N, j = 0, 1, 2, \dots, M$):

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1(j^2 - 1)((j+1)(j+2)(j+3)a_{i,j-4} + (j-1)(j-2)(j-3)a_{i,j+4}) - (K_1(j^2 - 1) \cdot (j+1)(j+2)(j+3) + Z_1)a_{i,j-2} - (K_1(j^2 - 1)(j-1)(j-2)(j-3) + Z_2)a_{i,j+2} + \\ + (Z_1 + Z_2)a_{i,j} + K_2(j^2 - 9)(i+1)(j+1)a_{i-2,j-2} - 2K_2j(j^2 - 9)(i+1)a_{i-2,j} + \\ + K_2(j^2 - 9)(i+1)(j-1)a_{i-2,j+2} + K_2(j^2 - 9)(i-1)(j+1)a_{i+2,j-2} - 2K_2j \cdot \\ \cdot (j^2 - 9)(i-1)a_{i+2,j} + K_2(j^2 - 9)(i-1)(j-1)a_{i+2,j+2} + 16j^2(j^2 - 1)^2(j^2 - 4) \cdot \\ \cdot (j^2 - 9)(C_1T_1 - C_2T_2 + C_3T_3)) = G_{ij}, \quad i = 4, 5, \dots, N; \quad j = 4, 5, \dots, M, \\ \frac{1}{2}a_{i,0} + a_{i,2} + a_{i,4} + \dots + a_{i,2M} = 0, \\ a_{i,1} + a_{i,3} + a_{i,5} + \dots + a_{i,2M-1} = 0, \\ 4a_{i,2} + 16a_{i,4} + 36a_{i,6} + \dots + (2M)^2a_{i,2M} = 0, \\ a_{i,1} + 9a_{i,3} + 25a_{i,5} + \dots + (2M-1)^2a_{i,2M-1} = 0, \\ \frac{1}{2}a_{0,j} + a_{2,j} + a_{4,j} + \dots + a_{2N,j} = 0, \\ a_{1,j} + a_{3,j} + \dots + a_{2N-1,j} = 0, \\ 4a_{2,j} + 16a_{4,j} + 36a_{6,j} + \dots + (2N)^2a_{2N,j} = 0, \\ a_{1,j} + 9a_{3,j} + 25a_{5,j} + \dots + (2N-1)^2a_{2N-1,j} = 0, \end{array} \right. \begin{array}{l} (i = \overline{0, N}), \\ (j = \overline{4, M}), \end{array} \quad (9)$$

здесь

$$\begin{aligned} K_1 &= 16i^2j(i^2 - 1)^2(i^2 - 4)(i^2 - 9), \\ K_2 &= 32ij(i^2 - 1)(i^2 - 4)(i^2 - 9)(j^2 - 1)(j^2 - 4), \\ T_1 &= (i-1)a_{i-4,j} - 2(i-2)a_{i-2,j} + (i-3)a_{i,j}, \\ T_2 &= (i+1)a_{i-2,j} - 2ia_{i,j} + (i-1)a_{i+2,j}, \\ T_3 &= (i+3)a_{i,j} - 2(i+2)a_{i+2,j} + (i+1)a_{i+4,j}, \\ Z_1 &= (3K_1(j-1)(j+2) + 2K_2i)(j^2 - 9)(j+1), \\ Z_2 &= (3K_1(j-2)(j+1) + 2K_2i)(j^2 - 9)(j-1), \\ C_1 &= i(i+1)^2(i+2)(i+3), \\ C_2 &= 2i(i^2 - 4)(i^2 - 9), \\ C_3 &= i(i-1)^2(i-2)(i-3). \end{aligned}$$

G_{ij} – правая часть основного алгебраического уравнения полученная после выполнения всех операций интегрирования.

Для определения правой части g_{ij} в уравнение (5) по известной функции $f(x, y)$ в коллокационных узлах полиномов Чебышева $x_l = \cos \frac{\pi l}{N}$, ($l = 0, 1, \dots, N$) и $y_k = \cos \frac{\pi k}{M}$, ($k = 0, 1, \dots, M$) имеется дискретное обратное преобразование :

$$g_{ij} = \frac{4}{MNc_i c_j} \sum_{l=0}^N \sum_{k=0}^M \left(\frac{1}{c_l c_k} f(x_l, y_k) T_i(x_l) T_j(y_k) \right), \quad (10)$$

$$i = 0, 1, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, M,$$

где $c_0 = c_N = c_M = 2$, $c_m = 1$ при $m = 1, 2, \dots, N-1$, $c_t = 1$ при

Систему (9) удобно записать в матричном виде

$$Ax = b, \quad (11)$$

где A – квадратная матрица порядка $K \times K$, здесь $K = (N+1) \cdot (M+1)$ состоящая из коэффициентов системы (9), $x^T = (a_{00}, a_{10}, \dots, a_{N0}, a_{01}, a_{11}, \dots, a_{N1}, \dots, a_{0M}, a_{1M}, \dots, a_{NM})$

искомый вектор для неизвестных коэффициентов разложения, -правая часть системе (9), где верхний индекс над переменным означает знак транспонирована. Решая систему (11) определяются коэффициенты a_{ij} ($i = 0, 1, \dots, N; j = 0, 1, \dots, M$), затем по формулам (4) вычисляются значения точного решения, а по формуле (8) значения приближенного решения в коллокационных узлах полиномов Чебышева.

4 Результаты расчётов

Приведем результаты численных расчётов по решению краевой задачи для бигармонического уравнения (1) - (2), вышеизложенным дискретным вариантом метода предварительного интегрирования.

Таблица 1. Максимальные абсолютные погрешности

Результаты расчётов для точного решения $u_e(x, y)$						
N	M	x_l $l = \overline{0, N}$ при l	y_k $k = \overline{0, M}$ при k	Значения точного Решения	Значения приближенного решения	Максимальная абсолютная погрешность
10	10	5	5	1.0	0.9964499661645725	0.0035
20	20	10	10	1.0	1.00000000000069467	$6.95 \cdot 10^{-12}$
30	30	30	15	-0.0	$-3.26 \cdot 10^{-14}$	$3.26 \cdot 10^{-14}$
40	40	40	20	-0.0	$-1.19 \cdot 10^{-13}$	$1.19 \cdot 10^{-13}$
50	50	12	25	-0.1446832685520	-0.1446832685521	$1.21 \cdot 10^{-13}$
60	60	60	30	-0.0	$2.38 \cdot 10^{-10}$	$2.38 \cdot 10^{-10}$

Видно, что предлагаемым методом значения точного решения найдены с достаточно высокой точностью при сравнительно небольших с количествах полиномов.

Графики точного и приближенного решения для функции $u_e(x, y)$ при $N = M = 20$ изображены на рис.1.

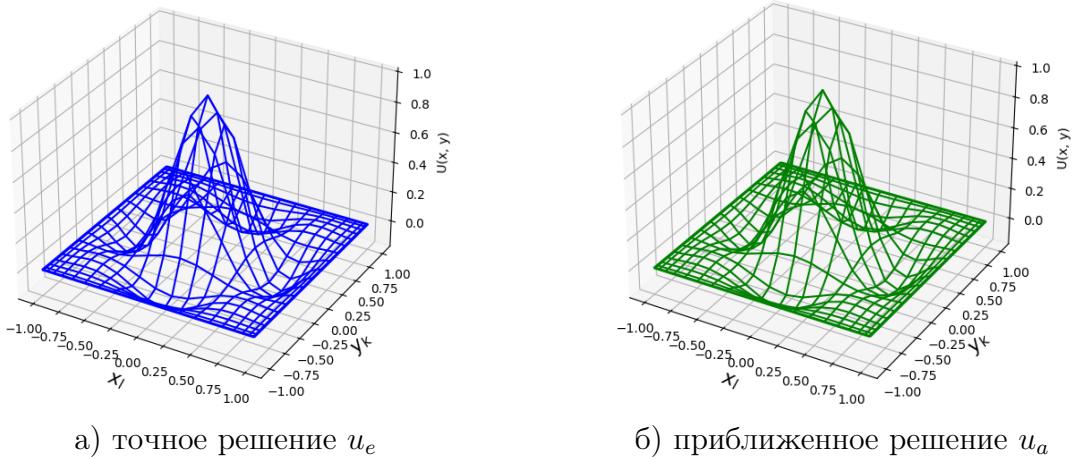
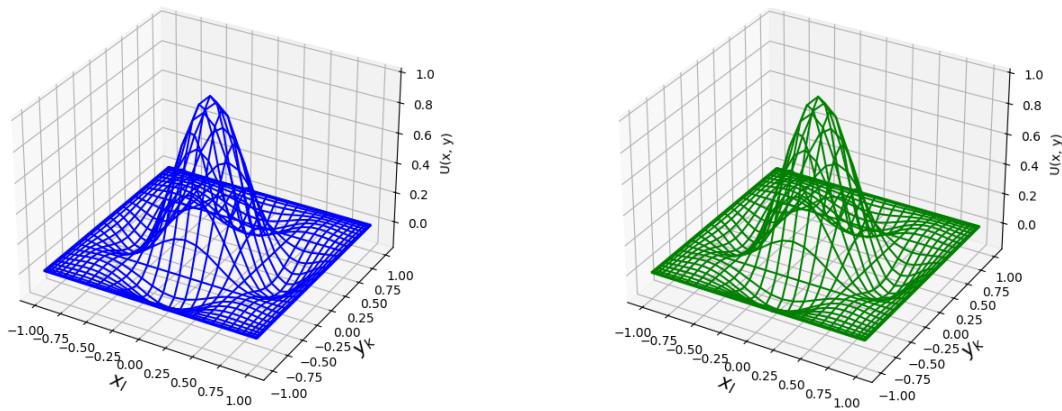
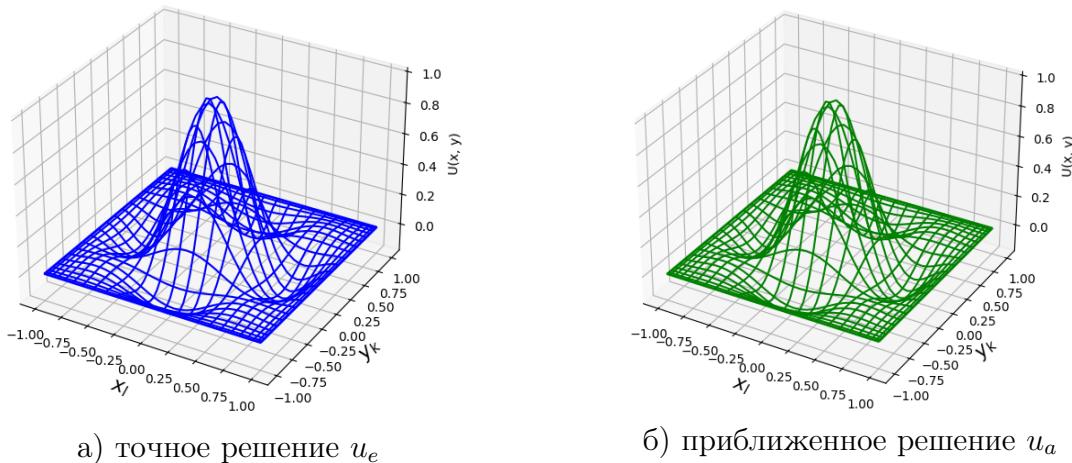


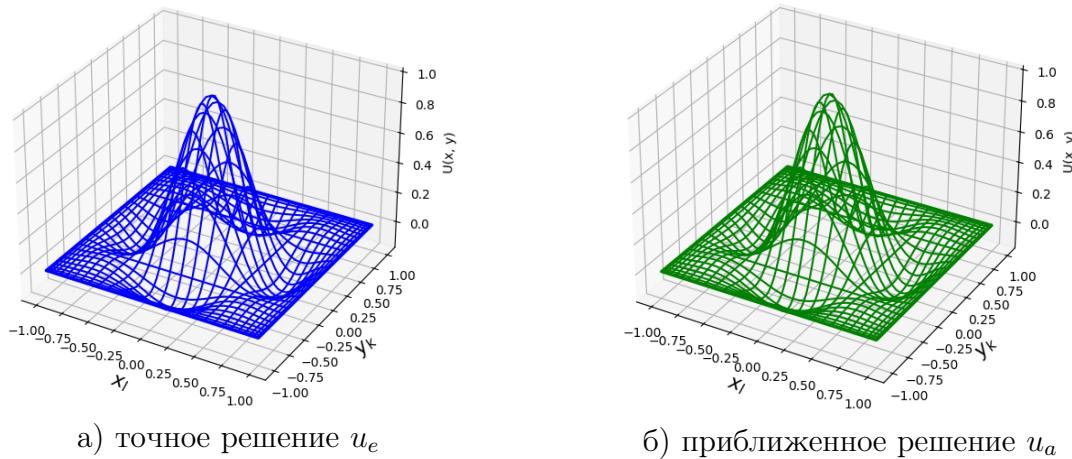
Рис. 1 Графики точного и приближенного решения для функции $u_e(x, y)$

Графики точного и приближенного решения для функции $u_e(x, y)$ при $N = M = 30$ изображены на рис.2.

Графики точного и приближенного решения для функции $u_e(x, y)$ при $N = M = 50$ изображены на рис.3.

а) точное решение u_e б) приближенное решение u_a Рис. 2 Графики точного и приближенного решения для функции $u_e(x, y)$ а) точное решение u_e б) приближенное решение u_a Рис. 3 Графики точного и приближенного решения для функции $u_e(x, y)$

Графики точного и приближенного решения для функции $u_e(x, y)$ при $N = M = 60$ изображены на рис.4.

а) точное решение u_e б) приближенное решение u_a Рис. 4 Графики точного и приближенного решения для функции $u_e(x, y)$

5 Заключение

1. Для численного решения краевой задачи для бигармонического уравнения предложен высокоточный и эффективный прямой метод-дискретный вариант метода предварительного интегрирования.
2. Разработан алгоритм решения предлагаемого метода. Проведен широкомасштабный вычислительный эксперимент при различных количествах полиномов Чебышева для выбранной пробной функции, которые показывает, что максимальные абсолютные погрешности уменьшаются со скоростью геометрической прогрессии при увеличении числа аппроксимирующих полиномов Чебышева.
3. Из приведенных табличных и графических численных результатов видно, что прогиб железобетонной плиты симметрично-максимальный прогиб плиты в центре, а на краях не имеются прогиб.

Литература

- [1] Gürlebeck K. On Some Applications of the Biharmonic Equation // Fundamental Theories of Physics. – 2011. – Vol. 94. – P. 109-128. – doi: http://dx.doi.org/10.1007/978-94-011-5036-1_10.
- [2] Zhuang Q., Chen L. Legendre-Galerkin spectral-element method for the biharmonic equations and its applications // Computers and Mathematics with Applications. – 2017. – Vol. 74, No. 12. – P. 1576-1592. – doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2017.07.039>.
- [3] Ghasemi M. Spline-based DQM for multi-dimensional PDEs: Application to biharmonic and Poisson equations in 2D and 3D // Computers and Mathematics with Applications. – 2017. – Vol. 73. – P. 1576-1592. – doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2017.02.006>.
- [4] Garnadi A.D. Mixed finite element formulation of the biharmonic equation // Journal of Mathematics and Its Applications. – 2018. – Vol. 4, No. 1. – P. 1-12. – doi: <http://dx.doi.org/10.29244/jmap.4.1.1-12>.
- [5] Liu X., Li H., Shi X., Fu J. Application of biharmonic equation in impeller profile optimization design of an aero-centrifugal pump // Engineering Computations. – 2019. – Vol. 36, No. 11. – P. 1764-1795. – doi: <http://dx.doi.org/10.1108/EC-08-2018-0378>.
- [6] Kim S., Palta B., Jeong J., Oh H.-S. Extraction of stress intensity factors of biharmonic equations with corner singularities corresponding to mixed boundary conditions of clamped, simply supported, and free (II) // Computers and Mathematics with Applications. – 2022. – Vol. 109. – P. 235-259. – doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2022.01.028>.
- [7] Kovářík K., Mužík J., Gago F., Sitányiová D. The local boundary knots method for solution of Stokes and the biharmonic equation // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2023. – Vol. 155. – P. 1149-1159. – doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.enganabound.2023.07.031>.
- [8] Tang J., Li Z., Gao Y., Mao K. Bivariate Chebyshev polynomial-based reconstruction of surface residual stress fields with adaptive sampling // Measurement. – 2025. – Vol. 256. – P. 1-19. – doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.measurement.2025.117992>.
- [9] Gu S., Huo F., Liu S. A stabilizer-free weak Galerkin mixed finite element method for the biharmonic equation // Computers and Mathematics with Applications. – 2024. – Vol. 176. – P. 109-121. – doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2024.09.011>.
- [10] Antonietti P.F., Matalon P., Verani M. Iterative solution to the biharmonic equation in mixed form discretized by the Hybrid High-Order method // Computers and Mathematics with Applications. – 2024. – Vol. 171. – P. 154-163. – doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2024.07.018>.

- [11] *Hwang G., Kar M.* Reconstructing unknown inclusions for the biharmonic equation // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2024. – Vol. 530. – doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2023.127745>.
- [12] *Cui X., Huang X.* A decoupled nonconforming finite element method for biharmonic equation in three dimensions // Applied Numerical Mathematics. – 2025. – Vol. 212. – P. 300-311. – doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.apnum.2025.02.012>.
- [13] *Li X., Wu J., Huang Y., Ding Z., Tai X., Liu L., Wang Y.-G.* Fourier-feature induced physics informed randomized neural network method to solve the biharmonic equation // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2025. – Vol. 468. – doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2025.116635>.
- [14] *Boukraa M.A., Caillé L., Delvare F.* Fading regularization method for an inverse boundary value problem associated with the biharmonic equation // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2025. – Vol. 457. – P. 1-19. – doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2024.116285>.
- [15] *Haghghi D., Abbasbandy S., Guan Y., Shivanian E.* Application of the fragile points method for two-dimensional generalized biharmonic equation on arbitrary domains // Computational and Applied Mathematics. – 2025. – Vol. 44. – P. 1-20. – doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s40314-025-03188-w>.
- [16] *Gu S., Huo F., Peng H., Wang X.* A new stabilizer-free weak Galerkin mixed finite element method for the biharmonic equation on polygonal meshes // Journal Pre-proof. – 2025. – doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cnsns.2025.109084>.
- [17] *Dressler M., Foucart S., Joldes M., de Klerk E., Lasserre J.B., Xu Y.* Optimization-aided construction of multivariate Chebyshev polynomials // Journal of Approximation Theory. – 2025. – Vol. 305. – P. 1-19. – doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jat.2024.106116>.
- [18] *Normurodov Ch.B.* Mathematical modeling of hydrodynamic problems for two-phase plane-parallel flows // Mathematical modeling. – 2007. – № 19(6). – P. 53-60.
- [19] Нормуродов Ч.Б. Об одном эффективном методе решения уравнения Орпа–Зоммерфельда // Математическое моделирование. – 2005. – № 9(17). – С. 35-42.
- [20] Нормуродов Ч.Б., Зиякулова Ш.А. Численное моделирование уравнений эллиптического типа дискретным вариантом метода предварительного интегрирования // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2024. – № 5(61). – С. 59-68.
- [21] *Normuradov Ch.B., Djurayeva N.T., Anuar M.S., Deraman F., Asi S.M.* One Effective Method for Solving Singularly Perturbed Equations // Malaysian Journal of Science. – 2025. – Vol. 44, No. 1. – P. 62-68. – doi: <http://dx.doi.org/10.22452/mjs.vol44no1.8>.
- [22] *Normurodov Ch.B., Tursunova B.A.* Numerical modeling of the boundary value problem of an ordinary differential equation with a small parameter at the highest derivative by Chebyshev polynomials of the second kind // Results in Applied Mathematics. – 2023. – P. 1-6. – doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.rinam.2023.100388>.
- [23] *Normurodov Ch.B., Ziyakulova Sh.A., Murodov S.K.* On one highly accurate and efficient method for solving the biharmonic equation // International Journal of Applied Mathematics. – 2025. – Vol. 38, No. 4. – P. 437-453. – doi: <http://dx.doi.org/10.12732/ijam.v38i4.1>.

UDC 519.632.4

A HIGHLY ACCURATE AND EFFICIENT METHOD FOR NUMERICAL SIMULATION OF REINFORCED CONCRETE SLAB BENDING

**Normurodov Ch.B., Ziyakulova Sh.A.*

*ch.normurodov@gmail.com

Termiz state university,
43 Barkamol Avlod Str., Termez, 190111 Uzbekistan.

Many practical problems, such as a solar panel, a microplate inside an electronic device, a thin layer of metal exposed to a laser, or the bending of a reinforced concrete slab, are described by various boundary value problems for the biharmonic equation. Solving biharmonic equations using iterative methods is extremely inconvenient due to the requirement to perform a large number of arithmetic operations, in addition, the number of iterations in which often turns out to be very large. The consideration of biharmonic equations with Dirichlet and Neumann boundary conditions limits the use of difference methods for their numerical solution. Therefore, the development of highly accurate and efficient direct numerical methods for solving such equations is of particular scientific interest. For this purpose, in this article, for the numerical solution of boundary value problems for the biharmonic equation, it is proposed to use a direct numerical method - a discrete version of the preliminary integration method with high accuracy and efficiency.

Keywords: reinforced concrete slab, bending, load, biharmonic equation, Chebyshev polynomials, discrete version of the pre-integration method.

Citation: Normurodov Ch.B., Ziyakulova Sh.A. 2025. A highly accurate and efficient method for numerical simulation of reinforced concrete slab bending. *Problems of Computational and Applied Mathematics.* 5(69): 5-16.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.5_69.2025.01

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 5(69) 2025

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Арипов М.М., Шадиметов Х.М., Ахмедов Д.Д.

Ответственный секретарь:

Убайдуллаев М.Ш.

Редакционный совет:

Азамов А.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Арушанов М.Л.,
Бурнашев В.Ф., Джумаёзов У.З., Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия),
Игнатьев Н.А., Ильин В.П. (Россия), Иманкулов Т.С. (Казахстан),
Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия), Карабчик В.В. (Россия),
Курбонов Н.М., Маматов Н.С., Мирзаев Н.М., Мухамадиев А.Ш., Назирова Э.Ш.,
Нормуродов Ч.Б., Нуралиев Ф.М., Опанасенко В.Н. (Украина),
Расулмухamedов М.М., Расулов А.С., Садуллаева Ш.А.,
Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халдzhигитов А., Хамдамов Р.Х.,
Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Чье Ен Ун (Россия), Шабозов М.Ш. (Таджикистан),
Dimov I. (Болгария), Li Y. (США), Mascagni M. (США), Min A. (Германия),
Singh D. (Южная Корея), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

Дизайн и вёрстка:

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 29.10.2025 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №7. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 5(69) 2025

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

Editor-in-Chief:

Ravshanov N.

Deputy Editors:

Aripov M.M., Shadimetov Kh.M., Akhmedov D.D.

Executive Secretary:

Ubaydullaev M.Sh.

Editorial Council:

Azamov A.A., Aloev R.D., Amirgaliev E.N. (Kazakhstan), Arushanov M.L., Burnashev V.F., Djumayozov U.Z., Zagrebina S.A. (Russia), Zadorin A.I. (Russia), Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia), Imankulov T.S. (Kazakhstan), Ismagilov I.I. (Russia), Kabanikhin S.I. (Russia), Karachik V.V. (Russia), Kurbonov N.M., Mamatov N.S., Mirzaev N.M., Mukhamadiev A.Sh., Nazirova E.Sh., Normurodov Ch.B., Nuraliev F.M., Opanasenko V.N. (Ukraine), Rasulov A.S., Sadullaeva Sh.A., Starovoitov V.V. (Belarus), Khayotov A.R., Khaldjigitov A., Khamdamov R.Kh., Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh., Chye En Un (Russia), Shabozov M.Sh. (Tajikistan), Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA), Mascagni M. (USA), Min A. (Germany), Singh D. (South Korea), Singh M. (South Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.

The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.

Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

Address:

100125, Tashkent, Buz-2, 17A.
Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.
E-mail: journals@airi.uz.
Web-site: <https://journals.airi.uz>.

Layout design:

Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.

Signed for print 29.10.2025

Format 60x84 1/8. Order No. 7. Print run of 100 copies.

Содержание

<i>Нормуродов Ч.Б., Зиякулова Ш.А.</i>	
Высокоточный и эффективный метод для численного моделирования изгиба железобетонной плиты	5
<i>Равшанов Н., Боборахимов Б.И., Джурабоева О.С., Рискулова С.У.</i>	
Математическое моделирование распространения примесей в турбулентных воздушных потоках пограничного слоя атмосферы	17
<i>Мадалиев М.Э., Ходжаев Я.Дж., Носирова Н.А., Мухаммадёкубов Х.Э.</i>	
Анализ эффективности OpenFOAM, COMSOL Multiphysics и Ansys Fluent при моделировании течения в 2D-канале с внезапным расширением	35
<i>Равшанов Н., Боборахимов Б.И., Бердиёрөв Ш.Ш.</i>	
Численное моделирование процесса фильтрования жидкого раствора в ци- линдрическом пористом фильтре	49
<i>Маматов А.Р.</i>	
Алгоритм решения двухуровневой игровой задачи перевода траектории ди- намической системы	64
<i>Хаётов А.Р., Шомаликова М.Ш.</i>	
Оптимальная квадратурная формула, точная для экспоненциальной функции	74
<i>Фаязов К.С., Абдуллаева З.Ш.</i>	
Внутренняя краевая задача для системы уравнений смешанного типа вто- рого порядка	86
<i>Хаётов А.Р., Хаитов Т.О.</i>	
Алгебро-тригонометрические оптимальные формулы численного интегриро- вания	102
<i>Рустамов Н., Амиртаев К., Тастанова С.</i>	
Метод семантического моделирования	114
<i>Боборахимов Б.И., Ахмеджанова Д.А., Шарипов Х.Д.</i>	
Корпусно-ориентированная модель среднетюркского языка на основе взве- щенного усреднения	123

Contents

<i>Normurodov Ch.B., Ziyakulova Sh.A.</i>	
A highly accurate and efficient method for numerical simulation of reinforced concrete slab bending	5
<i>Ravshanov N., Boborakhimov B.I., Juraboeva O.S., Riskulova S.U.</i>	
Mathematical modeling of pollutant dispersion in turbulent airflows of the atmospheric boundary layer	17
<i>Madaliev M.E., Khodjaev Ya.D., Nosirova N.A., Mukhammadayakubov Kh.E.</i>	
Performance analysis of OpenFOAM, COMSOL Multiphysics and Ansys Fluent in simulating 2D channel flow with sudden expansion	35
<i>Ravshanov N., Boborahimov B.I., Berdiyorov Sh.Sh.</i>	
Numerical modeling of liquid solution filtration in a cylindrical porous filter	49
<i>Mamatov A.R.</i>	
Algorithm for solving a two-level game problem of dynamic system trajectory transfer	64
<i>Hayotov A.R., Shomalikova M.Sh.</i>	
An optimal quadrature formula exact to the exponential function	74
<i>Fayazov K.S., Abdullayeva Z.Sh.</i>	
Interior boundary value problem for a system of second-order mixed-type equations	86
<i>Hayotov A.R., Khaitov T.O.</i>	
Algebraic-trigonometric optimal formulas for numerical integration	102
<i>Rustamov N., Amirtayev K., Tastanova S.</i>	
The method of semantic modeling	114
<i>Boborahimov B.I., Axmedjanova D.A., Sharipov Kh.D.</i>	
A corpus-based model of the Middle Turkic language using weighted averaging .	123

HISOBLASH VA AMALIY МАТЕМАТИКА MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
PROBLEMS OF COMPUTATIONAL
AND APPLIED MATHEMATICS

