

УДК 519.652

## ОПТИМАЛЬНЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ БЫСТРООСЦИЛЛИРУЮЩИХ ИНТЕГРАЛОВ

<sup>1,2</sup>Шадиметов Х.М., <sup>1,2,3</sup>Нуралиев Ф.А., <sup>1\*</sup>Миркомиллов Д.М.

\*seouldoniyor@gmail.com

<sup>1</sup>Ташкентский Государственный Транспортный Университет, 100167, Узбекистан, г. Ташкент, ул.Темирйулчилар, дом 1;

<sup>2</sup>Институт математики им. В.И. Романовского АН РУз, 100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская, д. 9;

<sup>3</sup>Ташкентский международный университет, Узбекистан, г.Ташкент 100084, Узбекистан, Ташкент, ул. Кичик халка йўли, 7.

В статье исследуются оптимальные квадратурные формулы, предназначенные для приближённого вычисления быстроосциллирующих интегралов, которые встречаются во многих прикладных задачах математической физики, теории сигналов и вычислительной математики. Работа основана на постановке и решении задачи Сарда в пространстве Соболева, где квадратурные формулы строятся с учётом не только значений подинтегральной функции, но и её производных в узловых точках. Такой подход позволяет существенно повысить точность аппроксимации. Для нахождения оптимальных коэффициентов квадратурной формулы применяется метод Соболева, что даёт возможность вывести аналитическое выражение для нормы функционала погрешности. На основе использования экстремальной функции и теоремы Рисса построена краевая задача, решение которой позволяет получить явный вид оптимальных коэффициентов и точную оценку погрешности. Представленные результаты обладают строгим теоретическим обоснованием и подтверждают эффективность предложенного метода. Полученные оптимальные квадратурные формулы обеспечивают высокую точность при вычислении интегралов с быстроосциллирующими ядрами, что открывает перспективы для их применения в численных методах решения дифференциальных уравнений, моделировании физических процессов и других областях вычислительной математики.

**Ключевые слова:** пространство Соболева, оптимальные коэффициенты, функционал погрешности, экстремальная функция.

**Цитирование:** Шадиметов Х.М. Нуралиев Ф.А, Миркомиллов Д.М. Оптимальные квадратурные формулы для приближенного вычисления быстроосциллирующих интегралов // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2025. – № 4(68). – С. 110-121.

**DOI:** [https://doi.org/10.71310/psam.4\\_68.2025.08](https://doi.org/10.71310/psam.4_68.2025.08).

### 1 Введение и постановка задач

Квадратура высококолеблющихся интегралов воспринималась как сложная задача. Традиционно приходилось решать колебания, беря несколько подинтервалов для каждого периода, в результате чего получалась схема, сложность которой возрастала бы линейно с частотой колебаний. Более тщательный анализ, покажет, что, используя структуру определенных классов колебаний для интегралов могут быть разработаны лучшие схемы дискретизации, где погрешность фактически уменьшается при увеличении частоты колебаний. Это хорошо известно в асимптотическом

анализе, например, методом осевых точек и методом стационарной фазовой аппроксимации [R. Wong, *Asymptotic Approximations of Integrals*, SIAM, Philadelphia, PA, 2001., F. W. J. Olver, *Asymptotics and Special Functions*, Academic Press Inc, New York, 1974.]. В последнее время обращено внимание на численные методы со схожими свойствами. Примерами таких методов являются методы типа Филона [A. Iserles, On the numerical quadrature of highly-oscillating integrals. I: Fourier transforms, *IMA J. Numer. Anal.*, 24(3) (2004), pp. 365–391.], методы типа Левина [D. Levin, Fast integration of rapidly oscillatory functions, *J. Comput. Appl. Math.*, 67 (1996), pp. 95–101.] и численный крутой спуск [6]. Квадратура высококолеблющихся интегралов играет важную роль во многих областях исследований, таких как численный анализ, электромагнитный анализ, акустическое рассеяние и квантовая химия. Исторически это рассматривалось как серьёзное испытание, требующее большого количества функциональных оценок (шкалируемых примерно так же, как частота), но предмет претерпел значительную революцию за последние пятнадцать лет. Используя асимптотические разложения в качестве основного аналитического инструмента, разработано значительное количество эффективных численных методов для высококолеблющихся интегралов: асимптотическое расширение и методы Филона [Iserles, A.: On the numerical quadrature of highly-oscillating integrals. I. Fourier transforms. *IMA J. Numer. Anal.* 24(3), 365–391 (2004), Iserles, A., Nørsett, S.P.: Efficient quadrature of highly oscillatory integrals using derivatives. *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* 461(2057), 1383–1399 (2005)], численное крутое спускание [Huybrechs, D., Vandewalle, S.: On the evaluation of highly oscillatory integrals by analytic continuation. *SIAM J. Numer. Anal.* 44(3), 1026–1048 (2006)], метод Левина [Levin, D.: Fast integration of rapidly oscillatory functions. *J. Comput. Appl. Math.* 67(1), 95–101 (1996)], комплексная гауссова квадратура [Asheim, A., Huybrechs, D.: Complex Gaussian quadrature for oscillatory integral transforms. *IMA J. Numer. Anal.* 33(4), 1322–1341 (2013)] и их разнообразные комбинация. Среди этих методов метод типа Филона имеет ряд важных преимуществ: он легко реализуется и обобщается до многомерной настройки, а также демонстрирует высокие показатели точности по сравнению с методом асимптотического расширения. В частности, он дает хорошее приближение сильноколеблющегося интеграла для всех  $\omega \geq 0$ . Прежде чем определить метод, мы сначала определим предмет нашего анализа и опишем его асимптотическое расширение. В настоящей работе мы будем заниматься построением оптимальных квадратурных формул с производными для приближенного вычисления быстроосциллирующих интегралов.

Рассмотрим квадратурную формулу с производными следующего вида.

$$\int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \varphi(x) dx \cong \sum_{\beta=0}^N d_0[\beta] \varphi(h\beta) + \sum_{\beta=0}^N d_1[\beta] \varphi'(h\beta), \quad (1)$$

с функционала погрешности

$$l(x) = E_{[0,1]}(x) e^{2\pi i \omega x} - \sum_{\beta=0}^N d_0[\beta] \delta(x - h\beta) + \sum_{\beta=0}^N d_1[\beta] \delta'(x - h\beta). \quad (2)$$

Здесь

$$d_0[\beta] = \begin{cases} h \left( \frac{K_{\omega,1} e^{2\pi i \omega h}}{e^{2\pi i \omega h} - 1} - \frac{1}{2\pi i \omega h} \right), & \beta = 0, \\ h K_{\omega,1} e^{2\pi i \omega h}, & \beta = \overline{1, N-1}, \\ h \left( \frac{K_{\omega,1} e^{2\pi i \omega h}}{1 - e^{2\pi i \omega h}} + \frac{e^{2\pi i \omega}}{2\pi i \omega h} \right), & \beta = N, \end{cases} \quad (3)$$

$$K_{\omega,1} = \left( \frac{\sin \pi \omega h}{\pi \omega h} \right)^2.$$

Оптимальные коэффициенты квадратурной формулы вида

$$\int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \varphi(x) dx \approx \sum_{\beta=0}^N d_0[\beta] \varphi(\beta),$$

в пространстве  $L_2^{(m)}(0, 1)$ ,  $h = 1/N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ ,  $i^2 = -1$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ ,  $d_1$  – коэффициенты квадратных формул (1),  $E_{[0,1]}(x)$  – характеристическая функция отрезка  $[0, 1]$ ,  $\delta(x)$  – дельта функция Дирака. Функция  $\varphi(x)$  принадлежит пространству  $L_2^{(m)}(0, 1)$ , где  $L_2^{(m)}(0, 1) = \{\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \mid \varphi^{(m-1)}\}$  абсолютно непрерывно и  $\varphi^{(m)} \in L_2^{(m)}(0, 1)$  пространство Соболева комплекснозначных функций со скалярным произведением определённое равенством:

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^1 \varphi^{(m)}(x) \cdot \overline{\psi^{(m)}(x)} dx, \quad (4)$$

здесь  $\overline{\psi}$  – сопряжённая функция к функции  $\psi$  и норма функции  $\varphi$  соответственно определяется формулой

$$\|\varphi\| = \langle \varphi, \varphi \rangle^{1/2} = \left\{ \int_0^1 \varphi^{(m)}(x) \cdot \overline{\varphi^{(m)}(x)} dx \right\}^{1/2}.$$

Разность

$$(l, \varphi) = \int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \varphi(x) dx - \sum_{\beta=0}^N d_0[\beta] \varphi(h\beta) - \sum_{\beta=0}^N d_1[\beta] \varphi'(h\beta), \quad (5)$$

называется погрешностью квадратурной формулы (1).

Погрешность квадратурной формулы (1) является линейным функционалом в пространстве  $L_2^{(m)}(0, 1)$ .

Согласно неравенству Коши-Шварца имеем

$$|(l, \varphi)| \leq \|\varphi\|_{L_2^{(m)}(0, 1)} \cdot \|L_2^{(m)*}(0, 1)\|.$$

Таким образом, погрешность (5) квадратурной формулы (1) оценивается нормой

$$\|l\|_{L_2^{(m)*}(0, 1)} = \sup_{\varphi \|\varphi\| \neq 0} \frac{|(l, \varphi)|}{\|\varphi\|},$$

функционала погрешности (2).

Ясно, что норма функционала погрешности  $l$  зависит от коэффициентов  $d_1[\beta]$ . Задача нахождения минимума нормы функционала погрешности  $l$  по коэффициентам при фиксированных узлах называется задачей Сарда и полученная формула называется оптимальной квадратурной формулой в смысле Сарда.

Основной целью настоящей работы является решение задачи Сарда для квадратурной формулы вида (1) в пространстве  $L_2^{(m)}(0, 1)$  используя метод Соболева при  $N + 1 \geq m$ , т.е. найти коэффициенты  $d_1[\beta]$  удовлетворяющие следующему равенству:

$$\left\| \int_0^1 l(x) \prod_{i=1}^m (x - \xi_i) dx \right\|_{L_2^{(m)*}} = \inf_{d_1[\beta]} \left| \int_0^1 l(x) \prod_{i=1}^m (x - \xi_i) dx \right|_{L_2^{(m)*}}. \quad (6)$$

Коэффициенты  $d_1[\beta]$  удовлетворяющие равенству (6) называются оптимальными коэффициентами.

Задача 1. Найти норму функционала погрешности  $\|l\|$ .

Задача 2. Найти  $d_1[\beta]$  удовлетворяющие равенству (6).

Для решения этих задач будем использовать экстремальную функцию и представление нормы функционала погрешности.

Чтобы решить задачу 1 мы используем экстремальную функцию.

Функция  $\psi_e(x)$  называется экстремальной функцией если имеет место

$$(l, \psi_e) = \|l\| \cdot \|\psi_e\|. \quad (7)$$

Так как  $L_2^{(m)}$  является Гильбертовым, то экстремальная функция находится с помощью теоремы Рисса.

Тогда для функционала  $l$  и для любой  $\varphi \in L_2^{(m)}$  существует функция  $\psi_e \in L_2^{(m)}$  для которой справедлива следующее равенство

$$[(l, \varphi) = \langle \psi_e, \varphi \rangle, \quad (8)$$

где

$$\langle \psi_e, \varphi \rangle = \int_0^1 \psi_e^{-(m)} \cdot \varphi^{(m)}(x) dx, \quad (9)$$

скалярное произведение определённое в пространстве  $L_2^{(m)}(0, 1)$ .

Из (7) учитывая (8) для экстремальной функции  $\psi_e(x)$  получим следующую краевую задачу

$$\psi_e^{(2m)}(x) = (-1)^m \bar{l}(x), \quad (10)$$

$$\psi_e^{(m+\alpha)} \Big|_{x=1}^{x=0} = 0, \alpha = \overline{0, m-1}, \quad (11)$$

где  $\bar{l}$  — сопряжённый функционал к  $l$ .

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.** Решение краевой задачи (10)–(11) является экстремальной функцией функционала погрешности, где  $l$  это  $l$ – Соболева

$$\psi_e(x) = (-1)^m \bar{l}(x)^* G_m(x) + P_{m-1}(x),$$

где

$$G_m(x) = \frac{|x|^{2m-1}}{2(2m-1)!}, \quad (12)$$

и  $P_{m-1}(x)$  — многочлен степени  $m-1$ .

Для функции потерь (2) определённой на пространстве  $L_2^m(0, 1)$  налагается следующее условие

$$(l, x^\alpha) = 0, \alpha = \overline{0, m-1}, \quad (13)$$

отсюда, ясно что для существующих квадратурных формул (1) должны выполняться условия  $N+1 \geq m$ .

Равенства (13) означают, что норма оптимальной квадратурной формулы будет точной для полиномов степени  $\leq m-1$ .

Теперь используя теорему 1 мы найдём выражение для нормы функционала потерь. Учитывая определение свёртки и равенство (2) мы вычислим свёртку  $\bar{l}(x) * G_m(x)$ , т.е.

$$\begin{aligned} \bar{l}(x) * G_m(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{l}(x) \cdot G_m(x-y) dy = \int_0^1 e^{-2\pi i \omega x} \frac{(y-x)^{2m-1}}{2(2m-1)!} \text{sign}(y-x) dy - \\ &- \sum_{\beta=0}^N \bar{d}_0[\beta] \frac{(h\beta-x)^{2m-1}}{2(2m-1)!} \text{sign}(h\beta-x) - \sum_{\beta=0}^N \bar{d}_1[\beta] \frac{(h\beta-x)^{2m-2}}{2(2m-1)!} \text{sign}(h\beta-x), \end{aligned}$$

где  $\bar{l}$ ,  $\bar{d}_0[\beta]$  и  $\bar{d}_1[\beta]$  — сопряжённые к  $l$ ,  $d_0$  и  $d_1[\beta]$  соответственно.

Тогда учитывая (8), (9) и Теорему 1, имеем

$$\begin{aligned} \|l\|^2 &= (-1)^{m+1} \left[ \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N d_1[\beta] \bar{d}_1[\beta] \frac{(h\beta-h\gamma)^{2m-3}}{2(2m-3)!} \text{sign}(h\beta-h\gamma) + \right. \\ &+ \sum_{\beta=0}^N \int_0^1 (\bar{d}_0[\beta] e^{2\pi i \omega x} + d_0[\beta] e^{-2\pi i \omega x}) \frac{(x-h\beta)^{2m-1}}{2(2m-1)!} \text{sign}(x-h\beta) dx - \\ &- \sum_{\beta=0}^N \int_0^1 (d_1[\beta] e^{2\pi i \omega x} + \bar{d}_1[\beta] e^{-2\pi i \omega x}) \frac{(x-h\beta)^{2m-2}}{2(2m-2)!} \text{sign}(x-h\beta) dx - \\ &- \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N (d_0[\gamma] \bar{d}_1[\beta] + d_1[\beta] \bar{d}_0[\gamma]) \frac{(h\beta-h\gamma)^{2m-2}}{2(2m-2)!} - \\ &- \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N d_0[\beta] \bar{d}_0[\gamma] \frac{(h\beta-h\gamma)^{2m-1}}{2(2m-1)!} \text{sign}(h\beta-h\gamma) - \\ &\left. - \int_0^1 \int_0^1 e^{2\pi i \omega x} e^{-2\pi i \omega x} \frac{(x-y)^{2m-1}}{2(2m-1)!} \text{sign}(x-y) dx dy \right]. \quad (14) \end{aligned}$$

Таким образом, задача 1 решена.

Далее, займёмся решением задачи 2.

Из формулы (14) видно что квадратурная формула функционала погрешности  $l(x)$  многомерная функция коэффициентов  $d_1[\beta]$  ( $\beta = \overline{0, N}$ ). Для нахождения точки

локального минимума квадрата нормы функционала потерь (2) при условии (13) применим метод неопределённых множителей Лагранжа.

Для этого рассмотрим вспомогательную функцию:

$$\psi(\mathbb{C}, \lambda) = \|\mathit{l}\|^2 - 2(-1)^{m+1} \sum_{\alpha=0}^{m-1} \lambda_{\alpha}(l, x^{\alpha}),$$

где  $d = (d_0, d_1, \dots, d_m)$ ,  $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-1})$ . Приравняв к нулю частные производные от функции  $\psi(\mathbb{C}, \lambda)$  по  $d_1[\beta]$  и по  $\lambda_{\alpha}(\alpha = \overline{0, m-1})$ , получим следующую линейную систему

$$\sum_{\gamma=0}^N d_1[\gamma] \frac{(h\beta - h\gamma)^{2m-3}}{2(2m-3)!} \text{sign}(h\beta - h\gamma) + P_{m-2} = f_m(h\beta), \quad \beta = \overline{0, N}, \quad (15)$$

$$\sum_{\beta=0}^N d_1[\beta](h\beta)^{\alpha} = \frac{1}{\alpha+1} \int_0^1 e^{2\pi i \omega x} x^{\alpha+1} dx - \frac{1}{\alpha+1} \sum_{\beta=0}^N \overline{d_0}[\beta](h\beta)^{\alpha+1}, \quad \alpha = \overline{0, m-2}, \quad (16)$$

где

$$f_m(h\beta) = \int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \frac{(x - h\beta)^{2m-2}}{2(2m-2)!} \text{sign}(x - h\beta) dx + \sum_{\gamma=0}^N \overline{d_0}[\gamma] \frac{(h\beta - h\gamma)^{2m-2}}{2(2m-2)!} \text{sign}(h\beta - h\gamma), \quad (17)$$

$d_0$  функция определенная формулой (3).

Отметим что система имеет единственное решение при  $N + 1 \geq m$  и это решение даёт минимум  $K\|\mathit{l}\|^2$  при условиях (16).

Используя коэффициенты оптимальных квадратурных формул (1)  $d_1[\beta] = 0$  при  $\beta < 0$  и  $\beta > N$ , перепишем систему (15)–(16) в свёрточном виде:

$$G_m''(h\beta) * d_1[\beta] + P_{m-2}(x) = f_m(h\beta), \quad \beta = \overline{0, N}, \quad (18)$$

$$\sum_{\beta=0}^N d_1[\beta](h\beta)^{\alpha} = g_{\alpha}, \quad \alpha = \overline{0, m-2}, \quad (19)$$

здесь

$$g_{\alpha} = \int_0^1 \frac{e^{2\pi i \omega x} x^{\alpha+1}}{\alpha+1} dx - \frac{1}{\alpha+1} \sum_{\beta=0}^N \overline{d_0}[\beta](h\beta)^{\alpha+1}, \quad (20)$$

$$G_m(x) = \frac{x^{2m-1}}{2(2m-1)!} \text{sign}(x). \quad (21)$$

Рассмотрим следующую задачу.

**Задача 3.** Найти дискретную функцию  $d_1[\beta]$  и многочлен  $P_{m-2}(h\beta)$  степени  $m-2$ , удовлетворяющие системе (18)–(19) при заданных  $f_m(h\beta)$ .

Далее, мы исследуем задачу 3 и вместо  $d_1[\beta]$  введём следующие функции:

$$g(h\beta) = G_m''(h\beta) * d_1(h\beta), \quad (22)$$

и

$$g(h\beta) = g(h\beta) + P_{m-2}(h\beta). \quad (23)$$

В такой постановке невозможно коэффициенты  $d_1[\beta]$  выразить с помощью функции  $g(h\beta)$ . Для этого нам нужен такой оператор  $D_m(h\beta)$  который удовлетворяет следующему равенству

$$hD_m(h\beta) * G_m''(h\beta) = \delta_d(h\beta), \quad (24)$$

где  $\delta_d(h\beta)$  — дискретная дельта функция.

Следует отметить, что оператор  $D_m(h\beta)$  впервые был введён и исследован С.И.Соболевым. В работе Шадиметова дискретный аналог  $D_m(h\beta)$  дифференциального оператора  $d^{2m}/dx^{2m}$  построен и доказан в следующем виде:

**Теорема 2.** Дискретный аналог дифференциального оператора  $d^{2m}/dx^{2m}$  имеет вид:

$$D_m(h\beta) = P \begin{cases} \sum_{k=1}^{m-1} A_k q_k^{|\beta-1|}, & |\beta| \geq 2, \\ 1 + \sum_{k=1}^{m-1} A_k, & |\beta| = 2, \\ C + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{A_k}{q_k}, & |\beta| = 0, \end{cases}$$

где

$$P = \frac{(2m-1)!}{h^{2m}}, \quad A_k = \frac{(1-q_k)^{2m+1}}{E_{2m-1}(q_k)}, \quad C = -2^{2m-1}, \quad (25)$$

$E_{2m-1}(q_k)$  — полином Эйлера — Фробениуса степени  $2m-1$ ,  $q_k$  — корни множителя Эйлера — Фробениуса степени  $2m-2$ ,  $|q_k| < 1$ .

Кроме того, изучены свойства  $D_m(h\beta)$ . Здесь мы приведём следующие свойства функции  $D_m(h\beta)$  дискретного аргумента которые нам нужны при наших вычислениях.

**Теорема 3.** Функция  $D_m(h\beta)$  дискретного аргумента и полином  $(h\beta)^K$  связаны друг с другом следующим образом:

$$\sum_{\beta=-\infty}^{\infty} D_m(h\beta) \cdot (h\beta)^K = \begin{cases} 0, & 0 \leq K \leq 2m-1, \\ (2m)!, & K = 2m, \end{cases}$$

тогда для оптимальных коэффициентов имеем:

$$d_1[\beta] = hD_m(h\beta) * U(h\beta). \quad (26)$$

Таким образом, если мы найдём функцию  $U(h\beta)$ , тогда оптимальные коэффициенты найдутся из (27).

Чтобы вычислить свёртку (27) требуется найти функцию  $U(h\beta)$  для всех целых значений  $\beta$ .

Из равенства (18) мы получим  $U(h\beta) = f_m(h\beta)$  при  $\beta = \overline{0, N}$ . Теперь нам нужно найти решение функции  $U(h\beta)$  при  $\beta < 0$  и  $\beta > N$ .

Так как  $d_1[\beta] = 0$  при  $h\beta \in [0, 1]$ , тогда  $d_1[\beta] = hD_m(h\beta) * U(h\beta) = 0$ ,  $h\beta \notin [0, 1]$ .

Теперь мы вычислим свёртку  $g(h\beta) = G_m(h\beta) * d_1[\beta]$  при  $h\beta \notin [0, 1]$ .

Пусть  $\beta < 0$ , тогда

$$\begin{aligned} g(h\beta) &= G_m''(h\beta) * d_1[\beta] = \sum_{\gamma=-\infty}^N d_1[\gamma] \frac{(h\beta - h\gamma)^{2m-3}}{2(2m-3)!} \text{sign}(h\beta - h\gamma) = \\ &= -\frac{1}{2(2m-3)!} \sum_{\gamma=0}^N d_1[\gamma] (h\beta - h\gamma)^{2m-3} = -R_{m-3}(h\beta) - Q_{m-2}(h\beta), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} R_{m-3}(h\beta) &= \sum_{\alpha=0}^{m-2} \frac{(h\beta)^{2m-3} (-1)^\alpha}{2\alpha! (2m-3-\alpha)!}, \\ Q_{m-2}(h\beta) &= \sum_{\alpha=m-1}^{2m-3} \frac{(h\beta)^{2m-3-\alpha} (-1)^\alpha}{2\alpha! (2m-3-\alpha)!} \sum_{\gamma=0}^N d_1[\gamma] (h\gamma)^\alpha. \end{aligned}$$

Тогда при  $\beta < 0$

$$v(h\beta) = -R_{2m-3}(h\beta) - Q_{m-2}(h\beta), \quad (27)$$

и при  $\beta > N$  соответственно имеем:

$$v(h\beta) = R_{m-3}(h\beta) + Q_{m-2}(h\beta). \quad (28)$$

Тогда из (23) учитывая последние (27)-(28) два равенства имеем:

$$U(h\beta) = \begin{cases} -R_{2m-3}(h\beta) - Q_{m-2}(h\beta) + P_{m-2}(h\beta), & \beta < 0 \\ f_m(h\beta), & 0 \leq \beta \leq N \\ R_{2m-3}(h\beta) + Q_{m-2}(h\beta) + P_{m-2}(h\beta), & \beta > N. \end{cases} \quad (29)$$

Обозначим

$$P_{m-2}^-(h\beta) = P_{m-2}(h\beta) - Q_{m-2}(h\beta), \quad (30)$$

$$P_{m-2}^+(h\beta) = P_{m-2}(h\beta) + Q_{m-2}(h\beta). \quad (31)$$

Тогда мы получили следующую задачу:

**Задача 4.** Найти решение уравнения

$$D_{m-1}(h\beta) * U(h\beta) = 0, \quad h\beta \in [0, 1], \quad (32)$$

имеющего вид:

$$U(h\beta) = \begin{cases} -R_{2m-3}(h\beta) + P_{m-2}^-(h\beta), & \beta < 0 \\ f_m(h\beta), & 0 \leq \beta \leq N \\ R_{2m-3}(h\beta) + P_{m-2}^+(h\beta), & \beta > N. \end{cases} \quad (33)$$

Где  $P_{m-2}^-(h\beta)$  и  $P_{m-2}^+(h\beta)$  – известные многочлены степени  $m-2$ . Здесь имеет место следующая теорема.

**Теорема 4.** Коэффициенты оптимальных квадратурных формул вида (1) в пространстве  $L_2^{(m)}(0, 1)$  имеют следующий вид:

$$d_1[\beta] = h \left( D_{m-1}(h\beta) * f_m(h\beta) + \sum_{k=1}^{m-2} \left( a_k q_k + b_k q_k^{N-\beta} \right) \right), \quad \beta = 1, 2, \dots, N-1. \quad (34)$$

где  $a_K$  и  $b_K$  известны.

**Доказательство**

Из (27) и (34) имеем

$$\begin{aligned} d_1[\beta] &= h (D_{m-1}(h\beta) * U(h\beta)) = h \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} D_{m-1}(h\beta - h\gamma) \cdot U(h\gamma) = \\ &= h \left( \sum_{\gamma=-\infty}^{-1} D_{m-1}(h\beta - h\gamma) \cdot U(h\gamma) + \sum_{\gamma=0}^N D_{m-1}(h\beta - h\gamma) \cdot U(h\gamma) + \right. \\ &+ \left. \sum_{\gamma=N+1}^{\infty} D_{m-1}(h\beta - h\gamma) \cdot U(h\gamma) \right) = h \left( \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} D_{m-1}(h\beta - h\gamma) \cdot f_m(h\gamma) + \right. \\ &+ \sum_{\gamma=-\infty}^{-1} D_{m-1}(h\beta - h\gamma) [-R_{2m-3}(h\gamma) + P_{m-2}^-(h\gamma) - f_m(h\gamma)] + \\ &+ \left. \sum_{\gamma=N+1}^{\infty} D_{m-1}(h\beta - h\gamma) [R_{2m-3}(h\gamma) + P_{m-2}^+(h\gamma) - f_m(h\gamma)] \right) = \\ &= h \left( D_{m-1}(h\beta) * f_m(h\beta) + \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_{m-1}(h\beta + h\gamma) \times \right. \\ &\times [-R_{2m-3}(-h\gamma) + P_{m-2}^-(-h\gamma) - f_m(-h\gamma)] + \\ &+ \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_{m-1}(h\beta - h(N + \gamma)) [R_{2m-3}(h(N + \gamma)) + \\ &+ P_{m-2}^+(h(N + \gamma)) - f_m(h(N + \gamma))] \left. \right). \end{aligned}$$

Теперь пусть  $\beta = 1, 2, \dots, N-1$ ,

тогда

$$\begin{aligned} d_1[\beta] &= h \left( (D_{m-1}(h\beta) * f_m(h\beta) + \sum_{k=1}^{m-2} P_A q_k^{\beta-1} \cdot \right. \\ &\cdot \sum_{\gamma=1}^{\infty} q_k^\gamma [-R_{2m-3}(-h\gamma) + P_{m-2}^-(-h\gamma) - f_m(-h\gamma)] + \\ &+ \sum_{k=1}^{m-2} P_A q_k^{N-\beta-1} \sum_{\gamma=1}^{\infty} q_k^\gamma [R_{2m-3}(h(N+1)) + \end{aligned}$$

$$+P^+_{m-2}(h(N+1)) - f_m(h(N+1))] \Big). \quad (35)$$

Обозначим

$$a_k = \frac{P_A}{q_k} \sum_{\gamma=1}^{\infty} q_k^\gamma (-R_{2m-3}(-h\gamma) + P^-_{m-2}(-h\gamma) - f_m(-h\gamma)),$$

$$b_k = \frac{P_A}{q_k} \sum_{\gamma=1}^{\infty} q_k^\gamma (R_{2m-3}(h(N+1)) + P^+_{m-2}(h(N+1)) - f_m(h(N+1))).$$

Из (35) учитывая последние два равенства имеем

$$d_1[\beta] = h(D_{m-1}(h\beta) * f_m(h\beta)) + \sum_{k=1}^{m-2} (a_k q_k^\beta + b_k q_k^{N-\beta}), \quad \beta = \overline{1, N-1},$$

теорема доказана.

## 2 Заключение

В статье рассмотрена задача построения оптимальных квадратурных формул для приближённого вычисления быстроосциллирующих интегралов в пространстве Соболева  $L_2^{(m)}(0, 1)$ . Путём решения задачи Сарда получено выражение для нормы функционала погрешности и определены оптимальные коэффициенты. На основе метода экстремальной функции Соболева и теоремы Рисса построена краевая задача, позволяющая минимизировать норму погрешности. Полученные результаты теоретически обоснованы и обеспечивают высокую точность для полиномов. Эти формулы могут быть эффективно использованы в практических задачах, связанных с быстроосциллирующими функциями. В дальнейшем планируется расширение данных методов на другие функциональные пространства и их тестирование в практических приложениях.

## Литература

- [1] *Iserles A., Nørsett S.P.* On quadrature methods for highly oscillatory integrals and their implementation BIT Numerical Mathematics, – 2004. Т. 44. – № 4. – P. 755–772. doi: <http://dx.doi.org/10.1023/B:BITN.0000046819.28529.f3>.
- [2] *Iserles A., Nørsett S.P.* Efficient quadrature of highly oscillatory integrals using derivatives Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci., – 2005. Т. 461. – № 2060. – P. 1383–1399. doi: <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2004.1420>.
- [3] *Novak E., Zhang S.* Optimal quadrature formulas for the Sobolev space  $H^1$  J. Sci. Comput., – 2019. Т. 78. – № 1. – P. 274–289. doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s10915-018-0792-1>.
- [4] *Shadimetov Kh.M., Gulomov O.Kh.* Optimal quadrature formulas for calculating integrals of rapidly oscillating functions J. Math. Sci., – 2023. Т. 277. – № 4. – P. 446–457. doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s10958-023-06765-5>.
- [5] *Hayotov A.R., Khayriev U.N.* Construction of an optimal quadrature formula in the Hilbert space of periodic functions Lobachevskii J. Math., – 2022. Т. 43. – № 11. – P. 3151–3160. doi: <http://dx.doi.org/10.1134/S1995080222110149>.
- [6] *Boltaev N.D., Hayotov A.R., Shadimetov Kh.M.* Construction of optimal quadrature formulas for Fourier coefficients in Sobolev space  $L_2^{(m)}(0, 1)$  Numer. Algorithms, – 2017. Т. 74. – № 2. – P. 307–336. doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s11075-016-0177-7>.

- [7] *Hayotov A.R., Jeon S., Shadimetov Kh.M.* Optimal quadrature formulas for non-periodic functions in Sobolev space and its application to CT image reconstruction *Filomat*, – 2021. Т. 35. – No 12. – P. 4177–4195. doi: <http://dx.doi.org/10.2298/FIL2112177H>.
- [8] *Huybrechs D., Vandewalle S.* On the evaluation of highly oscillatory integrals by analytic continuation *SIAM J. Numer. Anal.*, – 2006. Т. 44. – No 3. – P. 1026–1048. doi: <http://dx.doi.org/10.1137/050633027>.
- [9] *Wang Y., Xiang S.* Levin methods for highly oscillatory integrals with singularities *Sci. China Math.*, – 2022. Т. 65. – No 3. – P. 603–622. doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s11425-020-1829-0>.
- [10] *He G., Liu Y.* Efficient numerical quadrature for highly oscillatory integrals with Bessel function kernels *Mathematics*, – 2025. Т. 13. – No 9. – Article 1508. doi: <http://dx.doi.org/10.3390/math13091508>.
- [11] *Iserles A., Maierhofer G.* An accelerated Levin–Clenshaw–Curtis method for the evaluation of highly oscillatory integrals *BIT Numerical Mathematics*, – 2025. Т. 65. doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s10543-025-01079-4>
- [12] *Ledoux V., Van Daele M.* Interpolatory quadrature rules for oscillatory integrals *J. Sci. Comput.*, – 2012. Т. 53. – №3. – P. 586–607. doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s10915-012-9624-1>.
- [13] *Wu M., Wang H.* Gaussian quadrature rules for composite highly oscillatory integrals Preprint (arXiv), – 2021. – arXiv:2106.04567. doi: <http://dx.doi.org/10.48550/arXiv.2106.04567>.
- [14] *Anand A., Dhiman D.* Computation of highly oscillatory integrals using a Fourier extension approximation Preprint (arXiv), – 2024. – arXiv:2404.06789. doi: <http://dx.doi.org/10.48550/arXiv.2404.06789>.
- [15] *Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R., Nuraliev F.A.* Optimal quadrature formulas with derivatives in Sobolev space Preprint (arXiv), – 2014. – arXiv:1410.8423 (submitted 30 Oct 2014) doi: <http://dx.doi.org/10.48550/arXiv.1410.8423>
- [16] *Levin D.* Fast integration of rapidly oscillatory functions *J. Comput. Appl. Math.*, – 1996. – Т. 67. – № 1. – P. 95–101. doi: [http://dx.doi.org/10.1016/0377-0427\(95\)00115-8](http://dx.doi.org/10.1016/0377-0427(95)00115-8).
- [17] *Levin D.* Procedures for computing one- and two-dimensional integrals of functions with rapid irregular oscillations *Math. Comp.*, – 1982. – Т. 38. – № 157. – P. 531–538. doi: <http://dx.doi.org/10.1090/S0025-5718-1982-0645660-5>.
- [18] *Huybrechs D., Edwin R.A.S.* Highly oscillatory quadrature In: *Highly Oscillatory Problems*, Cambridge Univ. Press, – 2009. – P. 25–50. doi: <http://dx.doi.org/10.1017/CB09780511611413.003>.
- [19] *Iserles A., Nørsett S.P.* Quadrature methods for multivariate highly oscillatory integrals using derivatives *Math. Comp.*, – 2006. Т. 75. – № 255. – P. 1233–1258. doi: <http://dx.doi.org/10.1090/S0025-5718-06-01841-4>.
- [20] *Luke R.* On the computation of oscillatory integrals *Proc. Camb. Phil. Soc.*, – 1954. Т. 50. – № 2. – P. 269–277. doi: <http://dx.doi.org/10.1017/S0305004100029492>.

UDC 519.652

## OPTIMAL QUADRATURE FORMULAS FOR APPROXIMATE CALCULATION OF FAST OSCILLATING INTEGRAL

<sup>1,2</sup>*Shadimetov X.M.*, <sup>1,2,3</sup>*Nuraliyev F.A.*, <sup>1\*</sup>*Mirkomilov D.M.*

\*seouldoniyor@gmail.com

<sup>1</sup>Tashkent State Transport University, 100167, 1 Temiryulchilar str, Tashkent, Uzbekistan;

<sup>2</sup> V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences,  
9 University str., 100174, Tashkent, Uzbekistan;

<sup>3</sup>Tashkent International University, 100084, st. Kichik halka yuli, 7, Tashkent, Uzbekistan.

The article investigates optimal quadrature formulas designed for the approximate evaluation of highly oscillatory integrals, which frequently arise in many applied problems of mathematical physics, signal theory, and computational mathematics. The work is based on the formulation and solution of Sard's problem in a Sobolev space, where quadrature formulas are constructed taking into account not only the values of the integrand but also its derivatives at the nodal points. This approach makes it possible to significantly improve the accuracy of approximation.

To determine the optimal coefficients of the quadrature formula, the Sobolev method is applied, which allows one to derive an analytical expression for the norm of the error functional. Based on the use of the extremal function and the Riesz representation theorem, a boundary value problem is constructed, the solution of which yields the explicit form of the optimal coefficients and an exact estimate of the error.

The presented results have a solid theoretical foundation and confirm the effectiveness of the proposed method. The obtained optimal quadrature formulas provide high accuracy in computing integrals with highly oscillatory kernels, opening up prospects for their application in numerical methods for solving differential equations, modeling physical processes, and other areas of computational mathematics.

**Keywords:** Sobolev space, optimal coefficients, error functional, extremal function.

**Citation:** Shadimetov X.M., Nuraliyev F.A., Mirkomilov D.M. 2025. Optimal quadrature formulas for approximate calculation of fast oscillating integral. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 4(68): 110-121.

**DOI:** [https://doi.org/10.71310/pcam.4\\_68.2025.08](https://doi.org/10.71310/pcam.4_68.2025.08).

# HISOBLASH VA AMALIY MATEMATIKA MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ  
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
PROBLEMS OF COMPUTATIONAL  
AND APPLIED MATHEMATICS



# ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 4(68) 2025

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

**Учредитель:**

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и  
искусственного интеллекта.

**Главный редактор:**

Равшанов Н.

**Заместители главного редактора:**

Арипов М.М., Шадиметов Х.М., Ахмедов Д.Д.

**Ответственный секретарь:**

Убайдуллаев М.Ш.

**Редакционный совет:**

Азамов А.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Арушанов М.Л.,  
Бурнашев В.Ф., Джумаёзов У.З., Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия),  
Игнатъев Н.А., Ильин В.П. (Россия), Иманкулов Т.С. (Казахстан),  
Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия), Карачик В.В. (Россия),  
Курбонов Н.М., Маматов Н.С., Мирзаев Н.М., Мухамадиев А.Ш., Назирова Э.Ш.,  
Нормуродов Ч.Б., Нуралиев Ф.М., Опанасенко В.Н. (Украина),  
Расулмухамедов М.М., Расулов А.С., Садуллаева Ш.А.,  
Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А., Хамдамов Р.Х.,  
Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Чье Ен Ун (Россия), Шабозов М.Ш. (Таджикистан),  
Dimov I. (Болгария), Li Y. (США), Mascagni M. (США), Min A. (Германия),  
Singh D. (Южная Корея), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при  
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

**ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X**

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

**Адрес редакции:**

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

**Дизайн и вёрстка:**

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 29.08.2025 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №6. Тираж 100 экз.

# PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

**No. 4(68) 2025**

The journal was established in 2015.  
6 issues are published per year.

**Founder:**

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

**Editor-in-Chief:**

Ravshanov N.

**Deputy Editors:**

Aripov M.M., Shadimetov Kh.M., Akhmedov D.D.

**Executive Secretary:**

Ubaydullaev M.Sh.

**Editorial Council:**

Azamov A.A., Alov R.D., Amirgaliev E.N. (Kazakhstan), Arushanov M.L.,  
Burnashev V.F., Djumayozov U.Z., Zagrebina S.A. (Russia), Zadorin A.I. (Russia),  
Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia), Imankulov T.S. (Kazakhstan), Ismagilov I.I. (Russia),  
Kabanikhin S.I. (Russia), Karachik V.V. (Russia), Kurbonov N.M., Mamatov N.S.,  
Mirzaev N.M., Mukhamadiev A.Sh., Nazirova E.Sh., Normurodov Ch.B., Nuraliev F.M.,  
Opanasenko V.N. (Ukraine), Rasulov A.S., Sadullaeva Sh.A., Starovoitov V.V. (Belarus),  
Khayotov A.R., Khaldjigitov A., Khamdamov R.Kh., Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh.,  
Chye En Un (Russia), Shabozov M.Sh. (Tajikistan), Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA),  
Mascagni M. (USA), Min A. (Germany), Singh D. (South Korea), Singh M. (South  
Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the  
Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.

The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

**ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X**

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.

Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

**Address:**

100125, Tashkent, Buz-2, 17A.

Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

E-mail: [journals@airi.uz](mailto:journals@airi.uz).

Web-site: <https://journals.airi.uz>.

**Layout design:**

Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.

Signed for print 29.08.2025

Format 60x84 1/8. Order No. 6. Print run of 100 copies.

## Содержание

<i>Халдэсигитов А., Адамбаев У., Тилозов О., Рахмонова Р., Махмадиерова М.</i> Сравнительный анализ численных методов решения задач теории упругости в напряжениях . . . . .	8
<i>Нуралиев Ф.М., Тохиров Б.Н.</i> Комплексное математическое моделирование термо-электро-магнито-упругих процессов в анизотропных тонких пластинах сложной формы на основе ме- тода RFM . . . . .	17
<i>Нормуродов Ч.Б., Зиякулова Ш.А.</i> Численное моделирование изгиба тонкой пластины с применением дискрет- ного варианта метода предварительного интегрирования . . . . .	26
<i>Равшанов Н., Журабоева О., Боборахимов Б., Шарипов Х.</i> Моделирование распространения загрязняющих веществ в атмосфере с уче- том рельефа и метеорологических условий . . . . .	38
<i>Саидов У., Жураев И., Туракулов Ж.</i> Моделирование процесса фильтрования малоконцентрированного раствора через пористую среду . . . . .	47
<i>Муминов С.Ю.</i> Построение автомодельного решения системы нелинейных дифференциаль- ных уравнений, представляющих задачи взаимной диффузии. . . . .	56
<i>Ахмедов Д.М., Буваширов Д.С.</i> Оптимальная квадратурная формула для гиперсингулярных интегралов ти- па Адамара с высокой осцилляцией в пространстве Соболева . . . . .	65
<i>Алоев Р.Д., Алимова В.</i> Исследование экспоненциальной устойчивости численного решения гипербо- лической системы с отрицательными нелокальными характеристическими скоростями . . . . .	75
<i>Шадиметов Х.М., Нуралиев Ф.А., Едилбекова Р.М.</i> Система для нахождения оптимальных коэффициентов квадратурных фор- мул типа Эрмита с производными третьего порядка . . . . .	88
<i>Нормуродов Ч.Б., Джураева Н.Т., Норматова М.М.</i> Исследование динамики производных дифференциального уравнения чет- вертого порядка с малым параметром при старшей производной . . . . .	97
<i>Шадиметов Х.М., Нуралиев Ф.А., Миркомиллов Д.М.</i> Оптимальные квадратурные формулы для приближенного вычисления быст- роосциллирующих интегралов . . . . .	110
<i>Игнатъев Н.А., Рамазонов Ш.Ш.</i> Отношение связанности в метрических алгоритмах классификации и анализ его свойств . . . . .	122

# Contents

<i>Khaldjigitov A., Adambaev U., Tilovov O., Rakhmonova R., Makhmadiygorova M.</i> Numerical solution of plane problems of the theory of elasticity directly in stresses	8
<i>Nuraliyev F.M., Tokhirov B.N.</i> Comprehensive mathematical modeling of thermo-electro-magneto-elastic processes in anisotropic thin plates of complex shape based on the RFM method	17
<i>Normurodov Ch.B., Ziyakulova Sh.A.</i> Numerical modeling of thin plate bending using a discrete version of the pre-integration method	26
<i>Ravshanov N., Juraboeva O., Boborakhimov B., Sharipov Kh.</i> Modeling the dispersion of pollutants in the atmosphere, accounting for terrain and meteorological conditions	38
<i>Saidov U., Juraev I., Turakulov J.</i> Modeling the process of filtering a low-concentration solution through a porous medium	47
<i>Muminov S.Y.</i> Construction of a self-similar solution to mutual diffusion problems.	56
<i>Akhmedov D.M., Buvashero D.S.</i> An optimal quadrature formula for Hadamard-type hypersingular integrals with high oscillation in the Sobolev space	65
<i>Aloev R.D., Alimova V.</i> Investigation of the exponential stability of the numerical solution of a hyperbolic system with negative nonlocal characteristic velocities	75
<i>Shadimetov Kh.M., Nuraliev F.A., Edilbekova R.M.</i> System for finding optimal coefficients of Hermite-type quadrature formulas with third-order derivatives	88
<i>Normurodov Ch.B., Juraeva N.T., Normatova M.M.</i> Study of the dynamics of derivatives of a fourth-order differential equation with a small parameter at the highest derivative	97
<i>Shadimetov X.M., Nuraliyev F.A., Mirkomilov D.M.</i> Optimal quadrature formulas for approximate calculation of fast oscillating integrals	110
<i>Ignatiev N.A., Ramazonov Sh.Sh.</i> Relationship in metric classification algorithms and analysis of its properties	122