УДК 519.652

ОПТИМАЛЬНЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ БЫСТРООСЦИЛЛИРУЮЩИХ ИНТЕГРАЛОВ

[1,2]***Шадиметов Х.М,*** [1,2,3]***Нуралиев Ф.А,*** [1*]***Миркомилов Д.М.***

*seouldoniyor@gmail.com

[1]Ташкентский Государственный Транспортный Университет, 100167, Узбекистан, г. Ташкент, ул.Темирйулчилар, дом 1;

[2]Институт математики им. В.И. Романовского АН РУз, 100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская, д. 9;

[3]Ташкентский международный университет, Узбекистан, г.Ташкент 100084, Узбекистан, Ташкент, ул. Кичик халка йўли, 7.

В статье исследуются оптимальные квадратурные формулы, предназначенные для приближённого вычисления быстроосциллирующих интегралов, которые встречаются во многих прикладных задачах математической физики, теории сигналов и вычислительной математики. Работа основана на постановке и решении задачи Сарда в пространстве Соболева, где квадратурные формулы строятся с учётом не только значений подынтегральной функции, но и её производных в узловых точках. Такой подход позволяет существенно повысить точность аппроксимации. Для нахождения оптимальных коэффициентов квадратурной формулы применяется метод Соболева, что даёт возможность вывести аналитическое выражение для нормы функционала погрешности. На основе использования экстремальной функции и теоремы Рисса построена краевая задача, решение которой позволяет получить явный вид оптимальных коэффициентов и точную оценку погрешности. Представленные результаты обладают строгим теоретическим обоснованием и подтверждают эффективность предложенного метода. Полученные оптимальные квадратурные формулы обеспечивают высокую точность при вычислении интегралов с быстроосциллирующими ядрами, что открывает перспективы для их применения в численных методах решения дифференциальных уравнений, моделировании физических процессов и других областях вычислительной математики.

Ключевые слова: пространство Соболева, оптимальные коэффициенты, функционал погрешности, экстремальная функция.

Цитирование: *Шадиметов Х.М. Нуралиев Ф.А, Миркомилов Д.М.* Оптимальные квадратурные формулы для приближенного вычисления быстроосциллирующих интегралов // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2025. – № 4(68). – С. 110-121.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.4_68.2025.08.

1 Введение и постановка задач

Квадратура высококолеблющихся интегралов воспринималась как сложная задача. Традиционно приходилось решать колебания, беря несколько подинтервалов для каждого периода, в результате чего получалась схема, сложность которой возрастала бы линейно с частотой колебаний. Более тщательный анализ, покажет, что, используя структуру определенных классов колебаний для интегралов могут быть разработаны лучшие схемы дискретизации, где погрешность фактически уменьшается при увеличении частоты колебаний. Это хорошо известно в асимптотическом анализе, например, методом осевых точек и методом стационарной фазовой аппроксимации [R. Wong, Asymptotic Approximations of Integrals, SIAM, Philadelphia, PA, 2001., F. W. J. Olver, Asymptotics and Special Functions, Academic Press Inc, New York, 1974.]. В последнее время обращено внимание на численные методы со схожими свойствами. Примерами таких методов являются методы типа Филона [A. Iserles, On the numerical quadrature of highly-oscillating integrals. I: Fourier transforms, IMA J. Numer. Anal., 24(3) (2004), pp. 365–391.], методы типа Левина [D. Levin, Fast integration of rapidly oscillatory functions, J. Comput. Appl. Math., 67 (1996), pp. 95–101.] и численный крутой спуск [6]. Квадратура высококолеблющихся интегралов играет важную роль во многих областях исследований, таких как численный анализ, электромагнитный анализ, акустическое рассеяние и квантовая химия. Исторически это рассматривалось как серьёзное испытание, требующее большого количества функциональных оценок (шкалируемых примерно так же, как частота), но предмет претерпел значительную революцию за последние пятнадцать лет. Используя асимптотические разложения в качестве основного аналитического инструмента, разработано значительное количество эффективных численных методов для высококолеблющихся интегралов: асимптотическое расширение и методы Филона [Iserles, A.: On the numerical quadrature of highly-oscillating integrals. I. Fourier transforms. IMA J. Numer. Anal. 24(3), 365–391 (2004), Iserles, A., Nшrsett, S.P.: Efficient quadrature of highly oscillatory integrals using derivatives. Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 461(2057), 1383–1399 (2005)], численное крутое спускание [Huybrechs, D., Vandewalle, S.: On the evaluation of highly oscillatory integrals by analytic continuation. SIAM J. Numer. Anal. 44(3), 1026–1048 (2006)], метод Левина [Levin, D.: Fast integration of rapidly oscillatory functions. J. Comput. Appl. Math. 67(1), 95–101 (1996)], комплексная гауссова квадратура [Asheim, A., Huybrechs, D.: Complex Gaussian quadrature for oscillatory integral transforms. IMA J. Numer. Anal. 33(4), 1322–1341 (2013)] и их разнообразные комбинация. Среди этих методов метод типа Филона имеет ряд важных преимуществ: он легко реализуется и обобщается до многомерной настройки, а также демонстрирует высокие показатели точности по сравнению с методом асимптотического расширения. В частности, он дает хорошее приближение сильноколеблющегося интеграла для всех $\omega \geqslant 0$. Прежде чем определить метод, мы сначала определим предмет нашего анализа и опишем его асимптотическое расширение. В настоящей работе мы будем заниматься построением оптимальных квадратурных формул с производными для приближенного вычисления быстроосцилирующих интегралов.

Рассмотрим квадратурную формулу с производными следующего вида.

$$\int_0^1 e^{2\pi i\omega x}\,\varphi(x)\,dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} d_0[\beta]\,\varphi(h\beta) + \sum_{\beta=0}^{N} d_1[\beta]\,\varphi'(h\beta), \tag{1}$$

с функционала погрешности

$$l(x) = E_{[0,1]}(x)e^{2\pi i\omega x} - \sum_{\beta=0}^{N} d_0[\beta]\,\delta(x-h\beta) + \sum_{\beta=0}^{N} d_1[\beta]\,\delta'(x-h\beta). \tag{2}$$

Здесь

$$d_0[\beta]=\begin{cases} h\left(\dfrac{K_{\omega,1}e^{2\pi i\omega h}}{e^{2\pi i\omega h}-1}-\dfrac{1}{2\pi i\omega h}\right), & \beta=0,\\ hK_{\omega,1}e^{2\pi i\omega h}, & \beta=\overline{1,N-1},\\ h\left(\dfrac{K_{\omega,1}e^{2\pi i\omega h}}{1-e^{2\pi i\omega h}}+\dfrac{e^{2\pi i\omega}}{2\pi i\omega h}\right), & \beta=N, \end{cases} \tag{3}$$

$$K_{\omega,1}=\left(\frac{sin\pi\omega h}{\pi\omega h}\right)^2.$$

Оптимальные коэффициенты квадратурной формулы вида

$$\int_0^1 e^{2\pi i\omega x}\varphi(x)\,dx\approx\sum_{\beta=0}^{N}d_0[\beta]\varphi(\beta),$$

в пространстве $L_2^{(m)}(0,1), h=1/N, \quad N=1,2,\ldots,i^2=-1,\omega\in\mathbb{R},d_1$ – коэффициенты квадратных формул (1), $E_{[0,1]}(x)$—характеристическая функция отрезка $[0,1],\delta(x)$ – дельта функция Дирака. Функция $\varphi(x)$ принадлежит пространству $L_2^{(m)}(0,1)$, где $L_2^{(m)}(0,1)=\left\{\varphi:[0,1]\to\mathbb{C}\mid\varphi^{(m-1)}\right\}$ абсолютно непрерывно и $\varphi^{(m)}\in L_2^{(m)}(0,1)$ пространство Соболева комплекснозначных функций со скалярным произведением определённое равенством:

$$\langle\varphi,\psi\rangle=\int_0^1\varphi^{(m)}(x)\cdot\overline{\psi^{(m)}(x)}\,dx, \tag{4}$$

здесь $\overline{\psi}$ – сопряжённая функция к функции ψ и норма функции φ соответственно определяется формулой

$$\|\varphi\|=\langle\varphi,\varphi\rangle^{1/2}=\left\{\int_0^1\varphi^{(m)}(x)\cdot\overline{\varphi}^{(m)}(x)\,dx\right\}^{1/2}.$$

Разность

$$(l,\varphi)=\int_0^1 e^{2\pi i\omega x}\varphi(x)\,dx-\sum_{\beta=0}^{N}d_0[\beta]\varphi(h\beta)-\sum_{\beta=0}^{N}d_1[\beta]\varphi'(h\beta), \tag{5}$$

называется погрешностью квадратурной формулы (1).

Погрешность квадратурной формулы (1) является линейным функционалом в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$.

Согласно неравенству Коши-Шварца имеем

$$|(l,\varphi)|\leqslant\|\varphi\|L_2^{(m)}(0,1)\|\cdot\|L_2^{(m)*}(0,1)|.$$

Таким образом, погрешность (5) квадратурной формулы (1) оценивается нормой

$$\|l\|L_2^{(m)*}(0,1)=\underset{\varphi\|\varphi\|\neq0}{sup}\frac{|(l,\varphi)|}{\|\varphi\|},$$

функционала погрешности (2).

Ясно, что норма функционала погрешности l зависит от коэффициентов $d_1[\beta]$. Задача нахождения минимума нормы функционала погрешности l по коэффициентам при фиксированных узлах называется задачей Сарда и полученная формула называется оптимальной квадратурной формулой в смысле Сарда.

Основной целью настоящей работы является решение задачи Сарда для квадратурной формулы вида (1) в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ используя метод Соболева при $N+1 \geqslant m$, т.е. найти коэффициенты $\overset{0}{d}_1[\beta]$ удовлетворяющие следующему равенству:

$$\left\| \overset{0}{l} \right\| L_2^{(m)*} = \inf_{d_1[\beta]} \|l\| \, L_2^{(m)*}|. \tag{6}$$

Коэффициенты $\overset{0}{d}_1[\beta]$ удовлетворяющие равенству (6) называются оптимальными коэффициентами.

Задача 1. Найти норму функционала погрешности $\|l\|$.

Задача 2. Найти $\overset{0}{d}_1[\beta]$ удовлетворяющие равенству (6).

Для решения этих задач будем использовать экстремальную функцию и представление нормы функционала погрешности.

Чтобы решить задачу 1 мы используем экстремальную функцию.

Функция $\psi_e(x)$ называется экстремальной функцией если имеет место

$$(l, \psi_e) = \|l\| \cdot \|\psi_e\|. \tag{7}$$

Так как $L_2^{(m)}$ является Гильбертовым, то экстремальная функция находится с помощью теоремы Рисса.

Тогда для функционала l и для любой $\varphi \in L_2^{(m)}$ существует функция $\psi_e \in L_2^{(m)}$ для которой справедлива следующее равенство

$$[(l, \varphi) = \langle \psi_e, \varphi \rangle, \tag{8}$$

где

$$\langle \psi_e, \varphi \rangle = \int_0^1 \psi^{-(m)} \cdot \varphi^{(m)}(x)\, dx, \tag{9}$$

скалярное произведение определёное в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$.

Из (7) учитывая (8) для экстремальной функции $\psi_e(x)$ получим следующую краевую задачу

$$\psi_e^{(2m)}(x) = (-1)^m \bar{l}(x), \tag{10}$$

$$\psi_e^{(m+\alpha)}\Big|_{x=1}^{x=0} = 0, \alpha = \overline{0, m-1}, \tag{11}$$

где $\bar{l}$ — сопряжённый функционал к l.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Решение краевой задачи (10)–(11) является экстремальной функцией функционала погрещности, где l это $l-$ *Соболева*

$$\psi_e(x) = (-1)^m \bar{l}(x)^* G_m(x) + P_{m-1}(x),$$

где

$$G_m(x) = \frac{|x|^{2m-1}}{2(2m-1)!}, \tag{12}$$

и $P_{m-1}(x)$ — многочлен степени $m-1$.

Для функции потерь (2) определённой на пространстве $L_2^m(0,1)$ налагается следующее условие

$$(l, x^\alpha) = 0, \alpha = \overline{0, m-1}, \tag{13}$$

отсюда, ясно что для существующих квадратурных формул (1) должны выполняться условия $N+1 \geqslant m$.

Равенства (13) означают, что норма оптимальной квадратурной формулы будет точной для полиномов степени $\leqslant m-1$.

Теперь используя теорему 1 мы найдём выражение для нормы функционала потерь. Учитывая определение свёртки и равенство (2) мы вычислим свёртку $\bar{l}(x) * G_m(x)$, т.е.

$$\bar{l}(x) * G_m(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{l}(x) \cdot G_m(x-y)\, dy = \int_0^1 e^{-2\pi i\omega x} \frac{(y-x)^{2m-1}}{2(2m-1)!} \mathrm{sign}(y-x)\, dy -$$

$$- \sum_{\beta=0}^{N} \overline{d_0}[\beta] \frac{(h\beta - x)^{2m-1}}{2(2m-1)!} \mathrm{sign}(h\beta - x) - \sum_{\beta=0}^{N} \overline{d_1}[\beta] \frac{(h\beta - x)^{2m-2}}{2(2m-1)!} \mathrm{sign}(h\beta - x),$$

где $\bar{l}, \overline{d_0}[\beta]$ и $\overline{d_1}[\beta]$ — сопряжённые к l, d_0 и $d_1[\beta]$ соответственно.

Тогда учитывая (8), (9) и Теорему 1, имеем

$$\|l\|^2 = (-1)^{m+1} \left[\sum_{\beta=0}^{N} \sum_{\gamma=0}^{N} d_1[\beta] \overline{d_1}[\beta] \frac{(h\beta - h\gamma)^{2m-3}}{2(2m-3)!} \mathrm{sign}(h\beta - h\gamma) + \right.$$

$$+ \sum_{\beta=0}^{N} \int_0^1 \overline{d_0}[\beta] e^{2\pi i\omega x} + d_0[\beta] e^{-2\pi i\omega x}) \frac{(x - h\beta)^{2m-1}}{2(2m-1)!} \mathrm{sign}(x - h\beta)\, dx -$$

$$- \sum_{\beta=0}^{N} \int_0^1 (d_1[\beta] e^{2\pi i\omega x} + d_1[\beta] e^{-2\pi i\omega x}) \frac{(x - h\beta)^{2m-2}}{2(2m-2)!} \mathrm{sign}(x - h\beta)\, dx -$$

$$- \sum_{\beta=0}^{N} \sum_{\gamma=0}^{N} (d_0[\gamma] \overline{d_1}[\beta] + d_1[\beta] \overline{d_0}[\gamma]) \frac{(h\beta - h\gamma)^{2m-2}}{2(2m-2)!} -$$

$$- \sum_{\beta=0}^{N} \sum_{\gamma=0}^{N} d_0[\beta] \overline{d_0}[\gamma] \frac{(h\beta - h\gamma)^{2m-1}}{2(2m-1)!} \mathrm{sign}(h\beta - h\gamma) -$$

$$\left. - \int_0^1 \int_0^1 e^{2\pi i\omega x} e^{-2\pi i\omega x} \frac{(x-y)^{2m-1}}{2(2m-1)!} \mathrm{sign}(x-y)\, dx\, dy \right]. \tag{14}$$

Таким образом, задача 1 решена.

Далее, займёмся решением задачи 2.

Из формулы (14) видно что квадратурная формула функционала погрешности $l(x)$ многомерная функция коэффициентов $d_1[\beta] (\beta = \overline{0, N})$. Для нахождения точки локального минимума квадрата нормы функционала потерь (2) при условии (13) применим метод неопределённых множителей Лагранжа.

Для этого рассмотрим вспомогательную функцию:

$$\psi(\mathbb{C},\lambda)=\|l\|^2-2(-1)^{m+1}\sum_{\alpha=0}^{m-1}\lambda_\alpha(l,x^\alpha),$$

где $d=(d_0,d_1,\ldots,d_m),\lambda=(\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_{m-1})$. Приравняв к нулю частные производные от функции $\psi(\mathbb{C},\lambda)$ по $d_1[\beta]$ и по $\lambda_\alpha(\alpha=\overline{0,m-1})$, получим следующую линейную систему

$$\sum_{\gamma=0}^{N}d_1[\gamma]\frac{(h\beta-h\gamma)^{2m-3}}{2(2m-3)!}\mathrm{sign}(h\beta-h\gamma)+P_{m-2}=f_m(h\beta),\ \beta=\overline{0,N}, \tag{15}$$

$$\sum_{\beta=0}^{N}d_1[\beta](h\beta)^\alpha=\frac{1}{\alpha+1}\int_0^1 e^{2\pi i\omega x}x^{\alpha+1}dx-\frac{1}{\alpha+1}\sum_{\beta=0}^{N}\overline{d_0}[\beta](h\beta)^{\alpha+1},\ \alpha=\overline{0,m-2}, \tag{16}$$

где

$$f_m(h\beta)=\int_0^1 e^{2\pi i\omega x}\frac{(x-h\beta)^{2m-2}}{2(2m-2)!}\mathrm{sign}(x-h\beta)\,dx+$$

$$+\sum_{\gamma=0}^{N}\overline{d_0}[\gamma]\frac{(h\beta-h\gamma)^{2m-2}}{2(2m-2)!}\mathrm{sign}(h\beta-h\gamma), \tag{17}$$

d_0 функция определенная формулой (3).

Отметим что система имеет единственное решение при $N+1\geqslant m$ и это решение даёт минимум $K\|l\|^2$ при условиях (16).

Используя коэффициенты оптимальных квадратурных формул (1) $d_1[\beta]=0$ при $\beta<0$ и $\beta>N$, перепишем систему (15)–(16) в свёрточном виде:

$$G''_m(h\beta)*d_1[\beta]+P_{m-2}(x)=f_m(h\beta),\beta=\overline{0,N}, \tag{18}$$

$$\sum_{\beta=0}^{N}d_1[\beta](h\beta)^\alpha=g_\alpha,\quad \alpha=\overline{0,m-2}, \tag{19}$$

здесь

$$g_\alpha=\int_0^1\frac{e^{2\pi i\omega x}x^{\alpha+1}}{\alpha+1}dx-\frac{1}{\alpha+1}\sum_{\beta=0}^{N}\overline{d_0}[\beta](h\beta)^{\alpha+1}, \tag{20}$$

$$G_m(x)=\frac{x^{2m-1}}{2(2m-1)!}\mathrm{sign}(x). \tag{21}$$

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 3. Найти дискретную функцию $d_1[\beta]$ и многочлен $P_{m-2}(h\beta)$ степени $m-2$, удовлетворяющие системе (18)–(19) при заданных $f_m(h\beta)$.

Далее, мы исследуем задачу 3 и вместо $d_1[\beta]$ введём следующие функции:

$$g(h\beta) = G''_m(h\beta) * d_1(h\beta), \tag{22}$$

и

$$g(h\beta) = g(h\beta) + P_{m-2}(h\beta). \tag{23}$$

В такой постановке невозможно коэффициенты $d_1[\beta]$ выразить с помощью функции $g(h\beta)$. Для этого нам нужен такой оператор $D_m(h\beta)$ который удовлетворяет следующему равенству

$$hD_m(h\beta) * G''_m(h\beta) = \delta_d(h\beta), \tag{24}$$

где $\delta_d(h\beta)$ — дискретная дельта функция.

Следует отметить, что оператор $D_m(h\beta)$ впервые был введён и исследован С.И.Соболевым. В работе Шадиметова дискретный аналог $D_m(h\beta)$ дифференциального оператора d^{2m}/dx^{2m} построен и доказан в следующем виде:

Теорема 2. Дискретный аналог дифференциального оператора d^{2m}/dx^{2m} имеет вид:

$$D_m(h\beta) = P\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{m-1} A_k q_k^{|\beta-1|}, & |\beta| \geqslant 2, \\ 1 + \sum\limits_{k=1}^{m-1} A_k, & |\beta| = 2, \\ C + \sum\limits_{k=1}^{m-1} \frac{A_k}{q_k}, & |\beta| = 0, \end{cases}$$

где

$$P = \frac{(2m-1)!}{h^{2m}}, \quad A_k = \frac{(1-q_k)^{2m+1}}{E_{2m-1}(q_k)}, \quad \mathbb{C} = -2^{2m-1}, \tag{25}$$

$E_{2m-1}(q_k)$ — полином Эйлера — Фробениуса степени $2m-1$, q_k — корни множителя Эйлера — Фробениуса степени $2m-2$, $|q_k| < 1$.

Кроме того, изучены свойства $D_m(h\beta)$. Здесь мы приведём следующие свойства функции $D_m(h\beta)$ дискретного аргумента которые нам нужны при наших вычислениях.

Теорема 3. Функция $D_m(h\beta)$ дискретного аргумента и полином $(h\beta)^K$ связаны друг с другом следующим образом:

$$\sum_{\beta=-\infty}^{\infty} D_m(h\beta)\cdot(h\beta)^K = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant K \leqslant 2m-1, \\ (2m)! & K = 2m, \end{cases}$$

тогда для оптимальных коэффициентов имеем:

$$d_1[\beta] = hD_m(h\beta) * U(h\beta). \tag{26}$$

Таким образом, если мы найдём функцию $U(h\beta)$, тогда оптимальные коэффициенты найдутся из (27).

Чтобы вычислить свёртку (27) требуется найти функцию $U(h\beta)$ для всех целых значений β.

Из равенства (18) мы получим $U(h\beta) = f_m(h\beta)$ при $\beta = \overline{0, N}$.
Теперь нам нужно найти решение функции $U(h\beta)$ при $\beta < 0$ и $\beta > N$.

Так как $d_1[\beta]=0$ при $h\beta\in[0,1]$, тогда $d_1[\beta]=hD_m(h\beta)*U(h\beta)=0, h\beta\notin[0,1]$.
Теперь мы вычислим свёртку $g(h\beta)=G_m(h\beta)*d_1[\beta]$ при $h\beta\notin[0,1]$.
Пусть $\beta<0$, тогда

$$g(h\beta)=G''_m(h\beta)*d_1[\beta]=\sum_{\gamma=-\infty}^{N}d_1[\gamma]\frac{(h\beta-h\gamma)^{2m-3}}{2(2m-3)!}\mathrm{sign}(h\beta-h\gamma)=$$

$$=-\frac{1}{2(2m-3)!}\sum_{\gamma=0}^{N}d_1[\gamma](h\beta-h\gamma)^{2m-3}=-R_{m-3}(h\beta)-Q_{m-2}(h\beta),$$

где

$$R_{m-3}(h\beta)=\sum_{\alpha=0}^{m-2}\frac{(h\beta)^{2m-3}(-1)^{\alpha}}{2\alpha!(2m-3-\alpha)},$$

$$Q_{m-2}(h\beta)=\sum_{\alpha=m-1}^{2m-3}\frac{(h\beta)^{2m-3-\alpha}(-1)^{\alpha}}{2\alpha!(2m-3-\alpha)}\sum_{\gamma=0}^{N}d_1[\gamma](h\gamma)^{\alpha}.$$

Тогда при $\beta<0$

$$\upsilon(h\beta)=-R_{2m-3}(h\beta)-Q_{m-2}(h\beta), \tag{27}$$

и при $\beta>N$ соответственно имеем:

$$\upsilon(h\beta)=R_{m-3}(h\beta)+Q_{m-2}(h\beta). \tag{28}$$

Тогда из (23) учитывая последние (27)-(28) два равенства имеем:

$$U(h\beta)=\begin{cases}-R_{2m-3}(h\beta)-Q_{m-2}(h\beta)+P_{m-2}(h\beta), & \beta<0\\ f_m(h\beta), & 0\leqslant\beta\leqslant N\\ R_{2m-3}(h\beta)+Q_{m-2}(h\beta)+P_{m-2}(h\beta), & \beta>N.\end{cases} \tag{29}$$

Обозначим

$$P^{-}{}_{m-2}(h\beta)=P_{m-2}(h\beta)-Q_{m-2}(h\beta), \tag{30}$$

$$P^{+}{}_{m-2}(h\beta)=P_{m-2}(h\beta)+Q_{m-2}(h\beta). \tag{31}$$

Тогда мы получили следующую задачу:
Задача 4. Найти решение уравнения

$$D_{m-1}(h\beta)*U(h\beta)=0, \quad h\beta\in[0,1], \tag{32}$$

имеющего вид:

$$U(h\beta)=\begin{cases}-R_{2m-3}(h\beta)+P^{-}{}_{m-2}(h\beta), & \beta<0\\ f_m(h\beta), & 0\leqslant\beta\leqslant N\\ R_{2m-3}(h\beta)+P^{+}{}_{m-2}(h\beta), & \beta>N.\end{cases} \tag{33}$$

Где $P^{-}{}_{m-2}(h\beta)$ и $P^{+}{}_{m-2}(h\beta)$ – известные многочлены степени $m-2$. Здесь имеет место следующая теорема.

Теорема 4. Коэффициенты оптимальных квадратурных формул вида (1) в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ имеют следующий вид:

$$d_1[\beta] = h\left(D_{m-1}(h\beta) * f_m(h\beta) + \sum_{k=1}^{m-2}\left(a_k q_k + b_k q_k^{N-\beta}\right)\right), \quad \beta = 1,2,\dots,N-1. \quad (34)$$

где a_K и b_K известны.

Доказательство

Из (27) и (34) имеем

$$d_1[\beta] = h\left(D_{m-1}(h\beta) * U(h\beta)\right) = h\sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} D_{m-1}(h\beta - h\gamma)\cdot U(h\gamma) =$$

$$= h\Bigg(\sum_{\gamma=-\infty}^{-1} D_{m-1}(h\beta - h\gamma)\cdot U(h\gamma) + \sum_{\gamma=0}^{N} D_{m-1}(h\beta - h\gamma)\cdot U(h\gamma) +$$

$$+ \sum_{\gamma=N+1}^{\infty} D_{m-1}(h\beta - h\gamma)\cdot U(h\gamma)\Bigg) = h\Bigg(\sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} D_{m-1}(h\beta - h\gamma)\cdot f_m(h\gamma) +$$

$$+ \sum_{\gamma=-\infty}^{-1} D_{m-1}(h\beta - h\gamma)\left[-R_{2m-3}(h\gamma) + P^{-}{}_{m-2}(h\gamma) - f_m(h\gamma)\right] +$$

$$+ \sum_{\gamma=N+1}^{\infty} D_{m-1}(h\beta - h\gamma)\left[R_{2m-3}(h\gamma) + P^{+}{}_{m-2}(h\gamma) - f_m(h\gamma)\right]\Bigg) =$$

$$= h\Bigg(D_{m-1}(h\beta) * f_m(h\beta) + \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_{m-1}(h\beta + h\gamma)\times$$

$$\times\left[-R_{2m-3}(-h\gamma) + \; + P^{-}{}_{m-2}(-h\gamma) - f_m(-h\gamma)\right] +$$

$$+ \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_{m-1}(h\beta - h(N+\gamma))\left[R_{2m-3}(h(N+\gamma)) +\right.$$

$$\left. + P^{+}{}_{m-2}(h(N+\gamma)) - f_m(h(N+\gamma))\right]\Bigg).$$

Теперь пусть $\beta = 1,2,\dots,N-1$,
тогда

$$d_1[\beta] = h\Bigg((D_{m-1}(h\beta) * f_m(h\beta) + \sum_{k=1}^{m-2} P_A q_k^{\beta-1}\cdot$$

$$\cdot\sum_{\gamma=1}^{\infty} q_k^{\gamma}\left[-R_{2m-3}(-h\gamma) + P^{-}{}_{m-2}(-h\gamma) - f_m(-h\gamma)\right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-2} P_A q_k^{N-\beta-1}\sum_{\gamma=1}^{\infty} q_k^{\gamma}\left[R_{2m-3}(h(N+1)) +\right.$$

$$+P^{+}{}_{m-2}(h(N+1)) - f_m(h(N+1))]\Bigg). \tag{35}$$

Обозначим

$$a_k = \frac{P_A}{q_k}\sum_{\gamma=1}^{\infty} q_k^{\gamma}\left(-R_{2m-3}(-h\gamma) + P^{-}{}_{m-2}(-h\gamma) - f_m(-h\gamma)\right),$$

$$b_k = \frac{P_A}{q_k}\sum_{\gamma=1}^{\infty} q_k^{\gamma}\left(R_{2m-3}(h(N+1)) + P^{+}{}_{m-2}(h(N+1)) - f_m(h(N+1))\right).$$

Из (35) учитывая последние два равенства имеем

$$d_1[\beta] = h\left(D_{m-1}(h\beta) * f_m(h\beta)\right) + \sum_{k=1}^{m-2}\left(a_k q_k^{\beta} + b_k q_k^{N-\beta}\right), \quad \beta = \overline{1, N-1},$$

теорема доказана.

2 Заключение

В статье рассмотрена задача построения оптимальных квадратурных формул для приближённого вычисления быстроосциллирующих интегралов в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$. Путём решения задачи Сарда получено выражение для нормы функционала погрешности и определены оптимальные коэффициенты. На основе метода экстремальной функции Соболева и теоремы Рисса построена краевая задача, позволяющая минимизировать норму погрешности. Полученные результаты теоретически обоснованы и обеспечивают высокую точность для полиномов. Эти формулы могут быть эффективно использованы в практических задачах, связанных с быстроосциллирующими функциями. В дальнейшем планируется расширение данных методов на другие функциональные пространства и их тестирование в практических приложениях.

Литература

[1] *Iserles A., Nørsett S.P.* On quadrature methods for highly oscillatory integrals and their implementation BIT Numerical Mathematics, – 2004. T. 44. – № 4. – P. 755–772. doi: `http://dx.doi.org/10.1023/B:BITN.0000046819.28529.f3`.

[2] *Iserles A., Nørsett S.P.* Efficient quadrature of highly oscillatory integrals using derivatives Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci., – 2005. T. 461. – № 2060. – P. 1383–1399. doi: `http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2004.1420`.

[3] *Novak E., Zhang S.* Optimal quadrature formulas for the Sobolev space H^1 J. Sci. Comput., – 2019. T. 78. – № 1. – P. 274–289. doi: `http://dx.doi.org/10.1007/s10915-018-0792-1`.

[4] *Shadimetov Kh.M., Gulomov O.Kh.* Optimal quadrature formulas for calculating integrals of rapidly oscillating functions J. Math. Sci., – 2023. T. 277. – № 4. – P. 446–457. doi: `http://dx.doi.org/10.1007/s10958-023-06765-5`.

[5] *Hayotov A.R., Khayriev U.N.* Construction of an optimal quadrature formula in the Hilbert space of periodic functions Lobachevskii J. Math., – 2022. T. 43. – № 11. – P. 3151–3160. doi: `http://dx.doi.org/10.1134/S1995080222110149`.

[6] *Boltaev N.D., Hayotov A.R., Shadimetov Kh.M.* Construction of optimal quadrature formulas for Fourier coefficients in Sobolev space $L_2^{(m)}(0,1)$ Numer. Algorithms, – 2017. T. 74. – № 2. – P. 307–336. doi: `http://dx.doi.org/10.1007/s11075-016-0177-7`.

[7] *Hayotov A.R., Jeon S., Shadimetov Kh.M.* Optimal quadrature formulas for non-periodic functions in Sobolev space and its application to CT image reconstruction Filomat, – 2021. T. 35. – No 12. – P. 4177–4195. doi: http://dx.doi.org/10.2298/FIL2112177H.

[8] *Huybrechs D., Vandewalle S.* On the evaluation of highly oscillatory integrals by analytic continuation SIAM J. Numer. Anal., – 2006. T. 44. – No 3. – P. 1026–1048. doi: http://dx.doi.org/10.1137/050633027.

[9] *Wang Y., Xiang S.* Levin methods for highly oscillatory integrals with singularities Sci. China Math., – 2022. T. 65. – No 3. – P. 603–622. doi: http://dx.doi.org/10.1007/s11425-020-1829-0.

[10] *He G., Liu Y.* Efficient numerical quadrature for highly oscillatory integrals with Bessel function kernels Mathematics, – 2025. T. 13. – No 9. – Article 1508. doi: http://dx.doi.org/10.3390/math13091508.

[11] *Iserles A., Maierhofer G.* An accelerated Levin–Clenshaw–Curtis method for the evaluation of highly oscillatory integrals BIT Numerical Mathematics, – 2025. T. 65. doi: http://dx.doi.org/10.1007/s10543-025-01079-4

[12] *Ledoux V., Van Daele M.* Interpolatory quadrature rules for oscillatory integrals J. Sci. Comput., – 2012. T. 53. – № 3. – P. 586–607. doi: http://dx.doi.org/10.1007/s10915-012-9624-1.

[13] *Wu M., Wang H.* Gaussian quadrature rules for composite highly oscillatory integrals Preprint (arXiv), – 2021. – arXiv:2106.04567. doi: http://dx.doi.org/10.48550/arXiv.2106.04567.

[14] *Anand A., Dhiman D.* Computation of highly oscillatory integrals using a Fourier extension approximation Preprint (arXiv), – 2024. – arXiv:2404.06789. doi: http://dx.doi.org/10.48550/arXiv.2404.06789.

[15] *Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R., Nuraliev F.A.* Optimal quadrature formulas with derivatives in Sobolev space Preprint (arXiv), – 2014. – arXiv:1410.8423 (submitted 30 Oct 2014) doi: http://dx.doi.org/10.48550/arXiv.1410.8423

[16] *Levin D.* Fast integration of rapidly oscillatory functions J. Comput. Appl. Math., – 1996. – T. 67. – № 1. – P. 95–101. doi: http://dx.doi.org/10.1016/0377-0427(95)00115-8.

[17] *Levin D.* Procedures for computing one- and two-dimensional integrals of functions with rapid irregular oscillations Math. Comp., – 1982. – T. 38. – № 157. – P. 531–538. doi: http://dx.doi.org/10.1090/S0025-5718-1982-0645660-5.

[18] *Huybrechs D., Edwin R.A.S.* Highly oscillatory quadrature In: Highly Oscillatory Problems, Cambridge Univ. Press, – 2009. – P. 25–50. doi: http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511611413.003.

[19] *Iserles A., Nørsett S.P.* Quadrature methods for multivariate highly oscillatory integrals using derivatives Math. Comp., – 2006. T. 75. – № 255. – P. 1233–1258. doi: http://dx.doi.org/10.1090/S0025-5718-06-01841-4.

[20] *Luke R.* On the computation of oscillatory integrals Proc. Camb. Phil. Soc., – 1954. T. 50. – № 2. – P. 269–277. doi: http://dx.doi.org/10.1017/S0305004100029492.

UDC 519.652

OPTIMAL QUADRATURE FORMULAS FOR APPROXIMATE CALCULATION OF FAST OSCILLATING INTEGRAL

[1,2]***Shadimetov X.M,*** [1,2,3]***Nuraliyev F.A,*** [1*]***Mirkomilov D.M.***

[*]seouldoniyor@gmail.com

[1]Tashkent State Transport University, 100167,1 Temiryulchilar str, Tashkent, Uzbekistan;

[2] V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, 9 University str., 100174, Tashkent, Uzbekistan;

[3]Tashkent International University, 100084, st. Kichik halka yuli, 7, Tashkent, Uzbekistan.

The article investigates optimal quadrature formulas designed for the approximate evaluation of highly oscillatory integrals, which frequently arise in many applied problems of mathematical physics, signal theory, and computational mathematics. The work is based on the formulation and solution of Sard's problem in a Sobolev space, where quadrature formulas are constructed taking into account not only the values of the integrand but also its derivatives at the nodal points. This approach makes it possible to significantly improve the accuracy of approximation.

To determine the optimal coefficients of the quadrature formula, the Sobolev method is applied, which allows one to derive an analytical expression for the norm of the error functional. Based on the use of the extremal function and the Riesz representation theorem, a boundary value problem is constructed, the solution of which yields the explicit form of the optimal coefficients and an exact estimate of the error.

The presented results have a solid theoretical foundation and confirm the effectiveness of the proposed method. The obtained optimal quadrature formulas provide high accuracy in computing integrals with highly oscillatory kernels, opening up prospects for their application in numerical methods for solving differential equations, modeling physical processes, and other areas of computational mathematics.

Keywords: Sobolev space, optimal coefficients, error functional, extremal function.

Citation: Shadimetov X.M, Nuraliyev F.A, Mirkomilov D.M. 2025. Optimal quadrature formulas for approximate calculation of fast oscillating integral. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 4(68): 110-121.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.4_68.2025.08.

№ 4(68) 2025

ISSN 2181-8460

HISOBLASH VA AMALIY MATEMATIKA MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

RAQAMLI TEXNOLOGIYALAR VA
SUN'IY INTELLEKTNI RIVOJLANTIRISH
ILMIY-TADQIQOT INSTITUTI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 4(68) 2025

Журнал основан в 2015 году.
Издается 6 раз в год.

Учредитель:
Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта.

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при Администрации Президента Республики Узбекистан.
Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Адрес редакции:
100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.
Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.
Э-почта: `journals@airi.uz`.
Веб-сайт: `https://journals.airi.uz`.

Дизайн и вёрстка:
Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.
Подписано в печать 29.08.2025 г.
Формат 60x84 1/8. Заказ №6. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 4(68) 2025

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:
Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.
The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Address:
100125, Tashkent, Buz-2, 17A.
Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.
E-mail: journals@airi.uz.
Web-site: https://journals.airi.uz.

Layout design:
Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.
Signed for print 29.08.2025
Format 60x84 1/8. Order No. 6. Print run of 100 copies.

Содержание

Contents