УДК 519.624.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПРОИЗВОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Нормуродов Ч.Б., Джураева Н.Т., Норматова М.М.
*ch.normurodov@gmail.com
Термезский государственный университет,
190111 Узбекистан, Термиз, ул. Баркамол авлод, дом 43.

В статье спектральным методом исследуются динамика производных вплоть до старшей производной обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка малым параметром при старшей производной. Решение дифференциальной задачи ищется в виде ряда по полиномам Чебышева первого рода с неизвестными коэффициентами разложения. Подставляя эти ряды в дифференциальную задачу получается система алгебраических уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов разложения. Используя эти коэффициенты вычисляются решение задачи и ее производные. Для иллюстрации высокой точности применяемого метода используется метод пробных функций. Суть метода пробных функций заключается в следующим. Выбирается некоторая функция, она может быть выбрана произвольно. Подставляя ее в основное дифференциальное уравнение находится правая часть и удовлетворяются соответствующие краевые условия. Полученная задача решается спектральным методом и приближенное решение сравнивается с известной пробной функцией и ее производными при различных значениях малого параметра и аппроксимирующих полиномов Чебышева.

Ключевые слова: полиномы Чебышева, малый параметр, высокая точность.

Цитирование: *Нормуродов Ч.Б., Джураева Н.Т., Норматова М.М.* Исследование динамики производных дифференциального уравнения четвертого порядка с малым параметром при старшей производной // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2025. – №4(68). – С. 97-109.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.4_68.2025.03.

1 Введение

Численное моделирование обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной является актуальной проблемой в области прикладной математики. Поскольку такие уравнения имеют малый параметр при старшей производной и, как следствие, появляются в решении области сильной пространственной неоднородности. Тогда требования, предъявляемые к аппроксимационным свойствам численных методов, резко возрастают и построение высокоточных численных методов, наталкивается на серьёзные трудности. Если вдобавок к этому, требуются не только исследование динамики самого решения сингулярно возмущенного уравнения, а также исследования динамики производных различного порядка то положение усугубляется-применение многих существующих методов становятся практически неприемлемым.

Равномерно-сходящийся алгоритм для численного решения двухточечной краевой задачи с малым параметром при старшей производной была поставлена и решена в [1] с помощью специальной разностной схемы с весами на равномерной сетке. Однако, численный расчёт на равномерной сетке плохо описывает пограничный слой, поскольку при достаточно малом параметре уже первый узел сетки лежит вне погранслоя. Так как для решения сингулярно возмущенных задач важно знать структуру погранслоя, то надо строить неравномерную разностную сетку, сгущающуюся в области погранслоя.

В работе [2] для численного решения сингулярно возмущенного уравнения предлагается алгоритм со сгущающейся разностной сеткой. Построение равномерно сходящийся алгоритма для численного решения сингулярно возмущенного уравнения второго порядка с помощью специальной координатной функции, сгущающейся в области пограничного слоя изложена в [3]. Анализ сходимости метода конечных элементов для сингулярно возмущенного уравнения является объектом исследования работе [4]. В статье [5] изложено тщательное исследование проблеме пограничного слоя и применение Чебышевского метода коллокации для решения обыкновенных дифференциальных уравнений типа Капуто дробного порядка. В исследовании [6] метод спектрального гомотопического анализа применен для численного решения уравнений Даффинга и Ван дер Поля, где в качестве базовой структуры использованы полиномы Чебышева первого рода. Для оптимизации вычисления матриц от производных использованы точки коллокации Гаусса-Лобатто. Чтобы подчеркнуть практичность и эффективность предлагаемого подхода, точное решение задачи сравнены с приближенным решением и представлены поведения ошибок. В статье [7] линейные дробные интегро-дифференциальные уравнения Фредгольма решаются численно, где дробная производная рассматривается в смысле Капуто. В этой работе метод наименьших квадратов с использованием компактной комбинации смещенных полиномов Чебышева первого рода применяется для решения класса задач вышеуказанного типа. Основной целью данной статье является записывать неизвестную функцию в виде ряда линейной комбинации смещенных полиномов Чебышева первого рода, а затем свести задачу к системе линейных алгебраических уравнений, которая будет решена относительно неизвестных констант, связанных с приближенным решением, с использованием MATLAB. Приведены численные примеры для подтверждения надежности, применимости и эффективности этого метода. В статье [8] представлен новый алгоритм для решения линейных и нелинейных краевых задач Робина второго порядка и уравнений типа Брату в одном и двух измерениях с использованием спектральных подходов. В качестве базисных функций использованы смещенные и модифицированные смещенные полиномы Чебышева второго рода. Представленные решения являются результатом применения подходов коллокации и тау. Эти методы преобразуют задачу, диктуемую ее граничными условиями, в систему линейных или нелинейных алгебраических уравнений, которые решаются с использованием подходящего численного метода. Авторы утверждают, что предлагаемый метод сходится и превосходит предыдущие методы с точки зрения точности. Применение полиномов Чебышева первого рода для построения обобщенного интеграла Чебышева-Пуассона изложено в статье [9]. Решена задача оптимизации обобщенного оператора Чебышева-Пуассона как функционала от функции и получено точное равенство для отклонения функций класса Гёльдера от обобщенного интеграла Чебышева-Пуассона. В статье [10] применяется приближенный спектральный метод для нелинейного дробно-временного частного интегро-дифференциального уравнения со слабо сингулярным ядром. Основная идея этого подхода заключается в создании нового гильбертова пространства, удовлетворяющего начальным и граничным условиям. Новый спектральный коллокационный подход применяется для получения точного численного приближения с использованием новых базисных функций, основанных на смещенных полиномах Чебышева первого рода. Авторы статье утверждают, что новый подход очень точен и эффективен. Построение решения сингулярного интегрального уравнения первого рода с однородными краевыми условиями на концах интервала интегрирования рассматривается в [11]. Дискретизация уравнений производится с помощью рядов по полиномам Чебышева второго рода с неизвестными коэффициентами разложения, которые определяются путем решения систем линейных алгебраических уравнений. Предложенный подход проверена на тестовых примерах, показывающих эффективность метода. Система гиперсингулярных интегральных уравнений формируется при решении задач с криволинейной трещиной или множественной трещиной в механике разрушения [12]. Однако проблема в том, что ее аналитическое решение доступно только для некоторых частных случаев. Для этого авторы статье [12], разрабатывает численный метод Галеркина на основе невязки с использованием полиномов Чебышева второго рода с его полным анализом. Доказаны корректность системы и теоретическую и численную сходимость схемы аппроксимации. В статье [13] рассматривается некоторые возмущения полиномов Чебышева второго рода, полученные путем модификации и путем растяжения одного из его коэффициентов повторения в произвольном порядке и получены некоторые положения их нулей. Основой целью статье [14] является характеристика ортогональных полиномов, таких как, полиномы Аль-Салама-Чихары, полиномы Чебышева первого рода, непрерывные q-полиномы Якоби. В [15] алгебраические преобразования и свойства полиномов Чебышева используются для вывода интересных тождеств, содержащих интегралы от степеней полиномов Чебышева первого рода. В статье [16] рассматривается расширение одномерных полиномов Чебышева первого рода до многомерной ситуации, где наилучшие приближения к конкретным мономам ищутся полиномами более низкой степени относительно равномерной нормы. Матричные методы в настоящее время играют важную роль в решении реальных задач, описываемых обыкновенным дифференциальным уравнением или уравнением в частных производных [17]. В этой работе представлен матричный метод для приближенного решения сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений с запаздыванием второго порядка. Данная задача сводится к задачам решения системы алгебраических уравнений, тем самым значительно упрощается задача. В статье [18] рассматривается задача для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной. Предельное уравнение имеет три решения, из которых два устойчивы и разделены третьим неустойчивым. Строится равномерное асимптотическое приближение этого решения с точностью до произвольной степени малого параметра. Задача Коши для гиперболического уравнения с малым параметром, умножающим на наибольшую производную рассматривается в статье [19]. Ставится обратная задача нахождения неизвестной функции, которая является коэффициентом уравнения и также встречается в начальном условии.

Построен интеграционный метод определения неизвестной функции и доказана его сходимость. Доказаны теоремы существования для решения обратной задачи. В статье [20] для линейной, стационарной, сингулярно возмущенной функционально-дифференциальной системы управления с малым коэффициентом при старшей производной и конечным запаздыванием в медленных переменных состояния обосновывается разложение невырожденным преобразованием переменных. Это преобразование разбивает исходную двухскоростную систему на две независимые подсистемы меньшей размерности отдельно для быстрых и медленных переменных. Доказано, что разлагающие преобразование может быть построено в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра и предложена итерационная схема вычисления асимптотического ряда. Задача оптимального распределенного управления в строго выпуклой плоской области с гладкой границей и малым параметром при старшей производной эллиптического оператора рассматривается в работе [21]. Подробно изучена асимптотика задачи, порожденной суммой дифференциального оператора второго порядка с малым коэффициентом при старшей производной и дифференциального оператора нулевого порядка. В статье [22] рассматривается начально-краевая задача для уравнения теплопроводности с малым коэффициентом теплоемкости. Ставится обратная задача и предлагается методы построения приближенных решений обратной задачи, основанные на разложении решения начально-краевой задачи по малому параметру. Приближенные решения определяются как решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных и получены оценки погрешности приближенных решений обратной задачи в равномерной метрике. Применение спектрального метода с полиномамы Чебышева второго рода для численного моделирования сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка изложено в [23]. Математическое моделирование проблемы гидродинамической устойчивости для однофазных и двухфазных потоков спектральным и спектрально-сеточным методом с полиномамы Чебышева первого рода изложено в [24]. В статье [25] дано построение эффективного численного метода для решения уравнения Орра-Зоммерфельда.

Вопросы сходимости спектрально-сеточного метода при решения уравнения Бюргерса с начально-краевыми условиями исследованы в [25]. Анализируя вышеприведенный обзор научных исследований можно сделать вывод о том, что основное внимание исследователей направлено к построению и изучению динамики самого решения дифференциального уравнения, в то же время исследование динамики производных различного порядка таких уравнений остаются вне поле зрения исследователей. Данная статья авторов направлена к исследованию динамики производных сингулярно возмущенного дифференциального уравнения четвертого порядка с малым параметром при старшей производной.

2 Постановка задачи

В данной работе для решения неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка применяется спектральный метод, в котором в качестве базисных функций используются полиномы Чебышева первого рода. Спектральный метод обладает следующими достоинствами: высокая скорость сходимости результатов расчёта; точное удовлетворение краевых условий; вследствие высокой точности, существенное сокращение объема вычислительных работ; лучшее понимание физическую сущность рассматриваемой задачи, вследствие двойственного представления решения. Решение, можно представить как через его изменение в реальном пространстве, так и через относительные вклады в его динамики различных базисных функций(в спектральном пространстве); производные имеющиеся в рассматриваемой задачи определяются непосредственно через производные полиномов Чебышева, без использования какой –либо аппроксимации; коллокационные узлы полиномов Чебышева сгущаются в окрестности границ, в так называемом пограничном слое. Это обеспечивает с достаточно высокой точностью вычислить численные значения решения и ее производных обыкновенного дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной в зоне пограничного слоя.

Рассмотрим с малым параметром при старшей производной дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$\varepsilon\frac{d^4u}{dy^4}-2\frac{d^2u}{dy^2}+u(y)=f(y), y\in(-1,1), \tag{1}$$

при следующих краевых условиях

$$u(\pm1)=\frac{du}{dy}(\pm1)=0, \tag{2}$$

где ε – малый параметр.

Для численного моделирования дифференциальной задачи (1)-(2) применяем спектральный метод [9–11]. Сходимость и порядка точности спектрального метода исследуем методом пробных функций [7, 14]. Основная идея метода пробных функций заключается в следующем. Выбирается некоторая пробная функция, она может быт выбрана произвольно. Подставляя ее в уравнение (1), найдем правую часть и удовлетворяем краевые условия (2).

Полученная задача решается спектральным методом, и приближенное решение и производные полученные спектральным методом сравниваются с известной функцией и ее производными при различных числах базисных функции и малого параметра ε.

В качестве пробной функции для задачи (1)-(2) выбираем следующую функцию

$$u(y)=(1-y^2)^2e^{\varepsilon y}. \tag{3}$$

Тогда для этой функции правая часть уравнения (1) имеет вид

$$\begin{aligned} f(y)=[\left(\varepsilon^5+2\varepsilon^2+1\right)y^4+16\varepsilon(\varepsilon^3-1)y^3+(72\varepsilon^3-2\varepsilon^5+4\varepsilon^2-26)y^2+\\ +(96\varepsilon^2-16\varepsilon^4+16\varepsilon)y+24\varepsilon+\varepsilon^5-24\varepsilon^3-2\varepsilon^2+9]e^{\varepsilon y}. \end{aligned} \tag{4}$$

Для исследования динамики производных вычислим производные до четвертого порядка от функции (3):

$$\frac{du_e}{dy}=(y^2-1)(\varepsilon y^2+4y-\varepsilon)e^{\varepsilon y}, \tag{5}$$

$$\frac{d^2u_e}{dy^2}=\left[\varepsilon^2y^4+8\varepsilon y^3+2(6-\varepsilon^2)y^2-8\varepsilon y+\varepsilon^2-4\right]e^{\varepsilon y}, \tag{6}$$

$$\frac{d^3u_e}{dy^3}=\left[\varepsilon^3y^4+12\varepsilon^2y^3+2(18\varepsilon-\varepsilon^3)y^2+12\left(2-\varepsilon^2\right)y+\varepsilon^3-12\varepsilon\right]e^{\varepsilon y}, \tag{7}$$

$$\frac{d^4u_e}{dy^4}=\left[\varepsilon^4y^4+16\varepsilon^3y^3+2(36\varepsilon^2-\varepsilon^4)y^2+16\left(6\varepsilon-\varepsilon^3\right)y+\varepsilon^4-24\varepsilon^2+24\right]e^{\varepsilon y}, \tag{8}$$

Эти выражения понадобятся для сравнения с их приближенными значениями, полученными спектральным методом, где $u_e-u_{approximate}$.

3 Метод решения

Для исследования динамики производных задачи (1)-(2), искомое решение и правую часть уравнения (1) представим в виде конечного ряда по полиномам Чебышева первого рода с неизвестными коэффициентами разложения [10–13]:

$$u_a(y) = \sum_{i=0}^{N} a_i T_i(y), \quad f(y) = \sum_{i=0}^{N} b_i T_i(y), \tag{9}$$

где $T_i(y)$ – полиномы Чебышева первого рода, $a_i, b_i (i = 0, 1, 2, ..., N)$ – неизвестные коэффициенты, $u_e - u_{approximate}$. Производные различного порядка от приближенного решения $u_a(y)$ вычисляются по следующим формулам [10]:

$$\frac{du_a}{dy} = \sum_{i=0}^{N} \frac{2}{c_i} \sum_{\substack{p=i+1 \\ p+i\equiv 1(\bmod 2)}}^{N} p a_p T_i(y), \tag{10}$$

$$\frac{d^2u_a}{dy^2} = \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{c_i} \sum_{\substack{p=i+2 \\ p\equiv i(\bmod 2)}}^{N} p(p^2 - i^2) a_p T_i(y), \tag{11}$$

$$\frac{d^3u_a}{dy^3} = \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{4c_i} \sum_{\substack{p=i+3 \\ p+i\equiv 1(\bmod 2)}}^{N} p\left[(p^2-1)^2 - 2(p^2+1)i^2 + i^4\right] a_p T_i(y), \tag{12}$$

$$\frac{d^4u_a}{dy^4} = \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{24c_i} \sum_{\substack{p=i+4 \\ p\equiv i(\bmod 2)}}^{N} p\left[p^2(p^2-4)^2 - 3i^4p^4 + 3i^4p^2 - i^2(i^2-4)^2\right] a_p T_i(y), \tag{13}$$

в формулах (10)-(13) $c_0 = 2$, $c_i = 1$, если $i > 0$.

Теперь подставляя ряды (9), (11), (13) в уравнению (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях полиномов имеем следующую систему:

$$\begin{gathered}\frac{\varepsilon}{24c_i} \sum_{\substack{p=i+4 \\ p\equiv i(\bmod 2)}}^{N} p\left[p^2(p^2-4)^2 - 3i^2p^4 + 3i^4p^2 - i^2(i^2-4)^2\right] a_p - \\ -\frac{2}{c_i}\left[\sum_{\substack{p=i+2 \\ p\equiv i(\bmod 2)}}^{N} p(p^2-i^2) a_p\right] + a_i = b_i, i = 0, 1, ..., N-4.\end{gathered} \tag{14}$$

Система уравнений (14) состоит из $(N-3)$ уравнений для определения $(N+1)$ неизвестных $a_i (i = 0, 1, 2, ..., N)$.

Недостающие четыре уравнения в соответствие с τ методом [10] определяются из краевых условий (2) используя следующие свойства полиномов:

$$T_i(\pm 1) = (\pm 1)^i, \; T_i'(\pm 1) = (\pm 1)^{i-2} \cdot i^2.$$

Тогда имеем следующие дополнительные уравнения

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i\equiv 0(\bmod 2)}}^{N} a_i = 0, \quad \sum_{\substack{i=0 \\ i\equiv 0(\bmod 2)}}^{N} i^2 a_i = 0, \tag{15}$$

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\equiv 1(\bmod 2)}}^{N} a_i = 0, \quad \sum_{\substack{i=1\\ i\equiv 1(\bmod 2)}}^{N} i^2 a_i = 0, \tag{16}$$

Коэффициенты разложения b_i в системе (14) определяются с использованием функции $f(y)$ из (4) с помощью следующего обратного преобразования [8–11]:

$$b_i = \frac{2}{Nc_i} \cdot \sum_{l=0}^{N} \frac{1}{c_l} f(y_l) T_n(y_l), \;\; i = 0, 1, ..., N, \tag{17}$$

где $c_0 = c_N = 2, \;\; c_m = 1, \;\; if \;\; m \neq 0, N.$

Система уравнений (14)-(16) образуют систему $(N+1)$ уравнений для определения столько же неизвестных $a_i (i = 0, 1, 2, ..., N)$. Данную систему удобно записать в матрично-векторном виде:

$$Aa = b, \tag{18}$$

где A – известная квадратная матрица для коэффициентов, b – вектор правой части, a – неизвестные коэффициенты, здесь $a^T = (a_0, a_1, ..., a_N)$, $b^T = (b_0, b_1, ..., b_{N-4}, 0, 0, 0, 0)$ – транспонированные векторы. Решая систему (18) определяются коэффициенты $a_i (i = 0, 1, 2, ..., N)$, затем по формулам (9)-(13) вычисляются значения решения и ее производных до четвертого порядка. В коллокационных узлах полиномов Чебышева $y_l = \cos \frac{\pi l}{N}, \;\; l = 0, 1, 2, ..., N$ исследуются динамика производных различного порядка дифференциального уравнения (1) при разных значениях малого параметра ε и аппроксимирующих полиномов Чебышева N. Для иллюстрации точности предлагаемого метода значения точного решения (3) и ее производные также вычисляются по формулам (5)-(8) в тех же коллокационных узлах.

4 Результаты расчётов

Проведен широкомасштабный вычислительный эксперимент по исследованию динамики решения и их производных дифференциального уравнения (1)-(2). В рассматриваемом случае характерными параметрами являются малый параметр ε, а также числа аппроксимирующих полиномов Чебышева N и их коллокационные узлы $y_l = \cos \frac{\pi l}{N}, \;\; l = 0, 1, ..., N$. Численные расчёты выполнены при следующих диапазонах изменения характерных параметров: $\varepsilon = 10^{-2} \div 10^{-5}, \;\; N = 10 \div 50$.

В табл.1 приведены результаты по вычислению максимальных абсолютных погрешностей $\Delta(\varepsilon, N) = \max\limits_{y_l} \left| u_e^{(k)} - u_a^{(k)} \right|$, где $k = 0, 1, 2, 3, 4$ – порядок производной, $u_e - u_{exact}$ значения точного решения (3) и ее производных (5)-(8), $u_e - u_{approximate}$ – значения приближенного решения (9) и ее производных (10)-(13) полученных спектральным методом в коллокационных узлах полиномов Чебышева первого рода $y_l = \cos \frac{\pi l}{N}$, $l = 0, 1, 2, ..., N$.

Таблица 1. Зависимость максимальной абсолютной погрешности от характерных параметров ε и N.

Малый параметр ε	Число полиномов N	Максимальная абсолютная погрешность				
		Производная				
		Решение	Первая	Вторая	Третья	Четвертая
10^{-2}	10	$2.22\cdot10^{-16}$	$6.66\cdot10^{-16}$	$5.33\cdot10^{15}$	$2\cdot10^{-4}$	0.02
	20	$2.22\cdot10^{-16}$	$6.66\cdot10^{-16}$	$3.55\cdot10^{-15}$	$2\cdot10^{-4}$	0.02
	30	$5.55\cdot10^{-16}$	$1.11\cdot10^{-15}$	$1.42\cdot10^{-14}$	$2\cdot10^{-4}$	0.02
	40	$1.22\cdot10^{-15}$	$8.88\cdot10^{-16}$	$1.24\cdot10^{-14}$	$2\cdot10^{-4}$	0.02
	50	$1.11\cdot10^{-15}$	$8.88\cdot10^{-16}$	$1.95\cdot10^{-14}$	$2\cdot10^{-4}$	0.02
10^{-3}	10	$2.78\cdot10^{-15}$	$8.86\cdot10^{-15}$	$1.10\cdot10^{-13}$	$2\cdot10^{-6}$	$1.83\cdot10^{-4}$
	20	$9.99\cdot10^{-16}$	$1.22\cdot10^{-15}$	$4.26\cdot10^{-14}$	$2\cdot10^{-6}$	$1.83\cdot10^{-4}$
	30	$9.30\cdot10^{-16}$	$1.11\cdot10^{-15}$	$2.66\cdot10^{-14}$	$2\cdot10^{-6}$	$1.84\cdot10^{-4}$
	40	$9.87\cdot10^{-16}$	$1.22\cdot10^{-15}$	$3.73\cdot10^{-14}$	$2\cdot10^{-6}$	$1.91\cdot10^{-4}$
	50	$5.55\cdot10^{-16}$	$1.55\cdot10^{-15}$	$4.44\cdot10^{-14}$	$2\cdot10^{-6}$	$2.62\cdot10^{-4}$
10^{-4}	10	$9.44\cdot10^{-16}$	$2.01\cdot10^{-15}$	$2.49\cdot10^{-14}$	$2.0\cdot10^{-8}$	$1.82\cdot10^{-6}$
	20	$1.64\cdot10^{-15}$	$1.55\cdot10^{-15}$	$8.70\cdot10^{-14}$	$2.0\cdot10^{-8}$	$2.22\cdot10^{-6}$
	30	$1.89\cdot10^{-15}$	$2.75\cdot10^{-15}$	$2.17\cdot10^{-13}$	$2.0\cdot10^{-8}$	$8.28\cdot10^{-6}$
	40	$6.66\cdot10^{-16}$	$7.22\cdot10^{-16}$	$3.38\cdot10^{-14}$	$2.0\cdot10^{-8}$	$4.68\cdot10^{-5}$
	50	$1.67\cdot10^{-15}$	$1.11\cdot10^{-15}$	$6.66\cdot10^{-14}$	$2.0\cdot10^{-8}$	$5.2\cdot10^{-4}$
10^{-5}	10	$1.41\cdot10^{-15}$	$1.11\cdot10^{-15}$	$8.88\cdot10^{-15}$	$2.00\cdot10^{-10}$	$1.86\cdot10^{-8}$
	20	$9.99\cdot10^{-16}$	$1.48\cdot10^{-14}$	$3.98\cdot10^{-13}$	$3.09\cdot10^{-10}$	$4.47\cdot10^{-6}$
	30	$8.88\cdot10^{-16}$	$9.33\cdot10^{-15}$	$8.56\cdot10^{-13}$	$5.61\cdot10^{-10}$	$1.4\cdot10^{-4}$
	40	$1.89\cdot10^{-15}$	$1.78\cdot10^{-15}$	$7.73\cdot10^{-14}$	$2.21\cdot10^{-10}$	$1.1\cdot10^{-4}$
	50	$6.94\cdot10^{-16}$	$2.55\cdot10^{-15}$	$5.98\cdot10^{-13}$	$2.06\cdot10^{-10}$	$1.7\cdot10^{-3}$

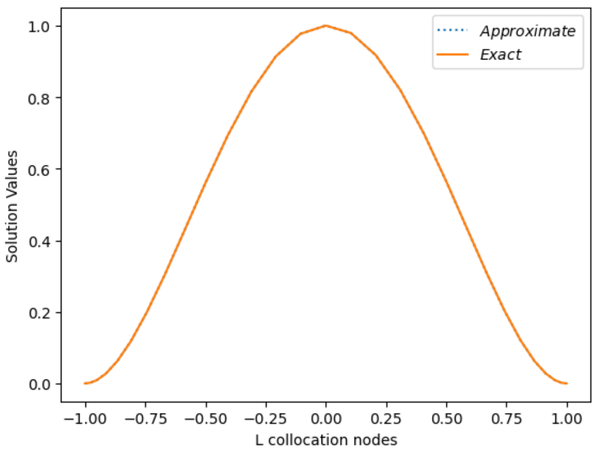

Рис. 1 Динамика решения

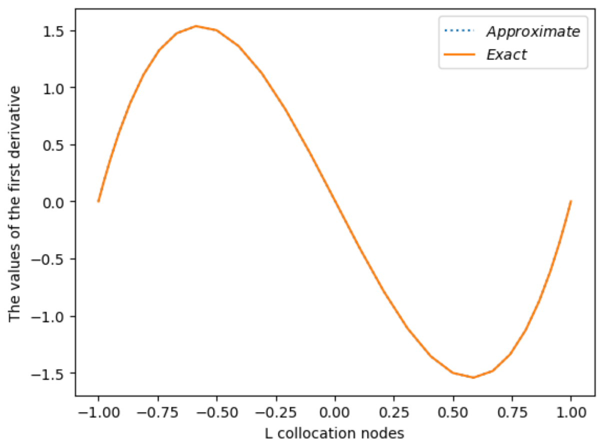

Рис. 2 Динамика первой производной

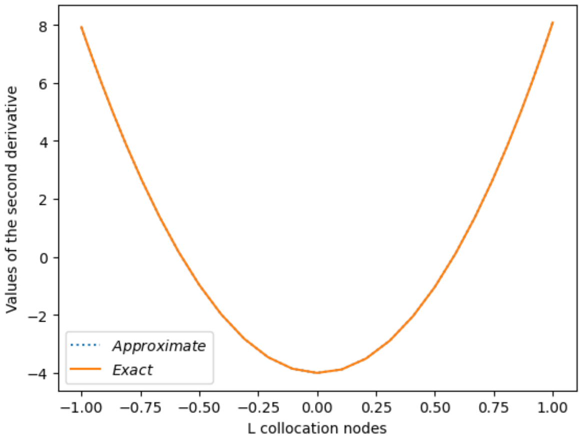

Рис. 3 Динамика второй производной

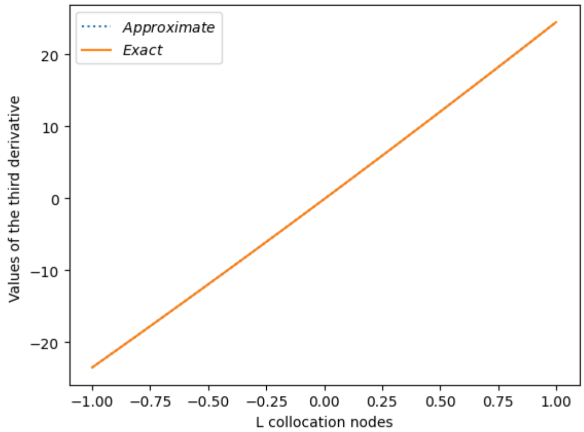

Рис. 4 Динамика третьей производной

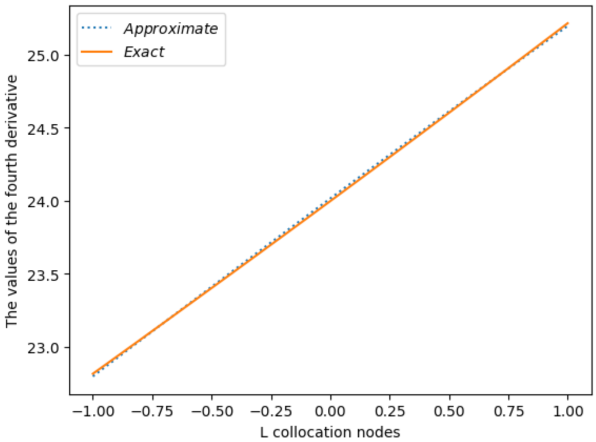

Рис. 5 Динамика четвертой производной

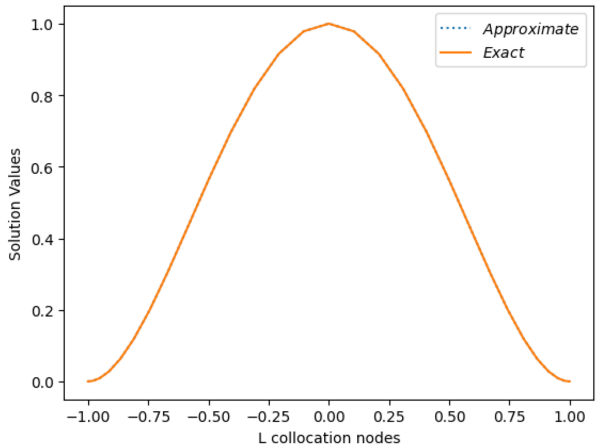

Рис. 6 Динамика решения

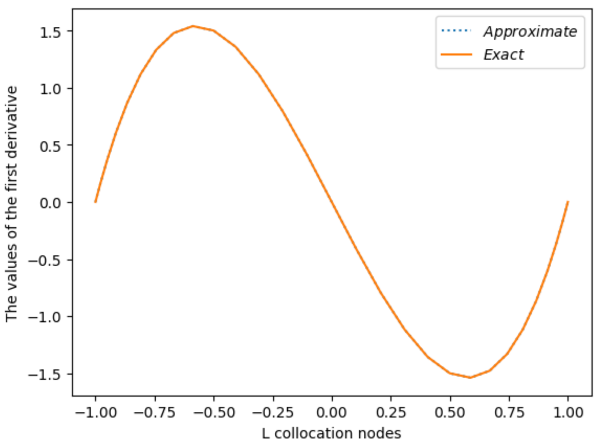

Рис. 7 Динамика первой производной

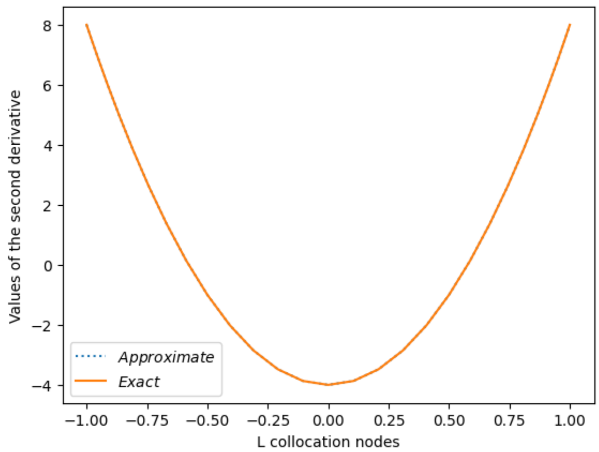

Рис. 8 Динамика второй производной

Видно, что максимальная абсолютная погрешность для решения уравнения (1)-(2) и ее производных являются величиной малого порядка. Другими словами, спек-

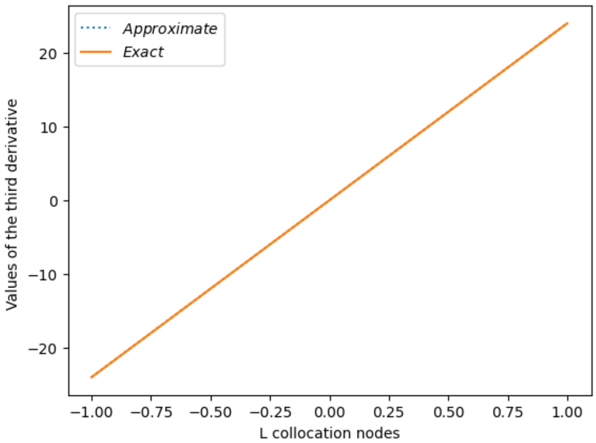

Рис. 9 Динамика третьей производной

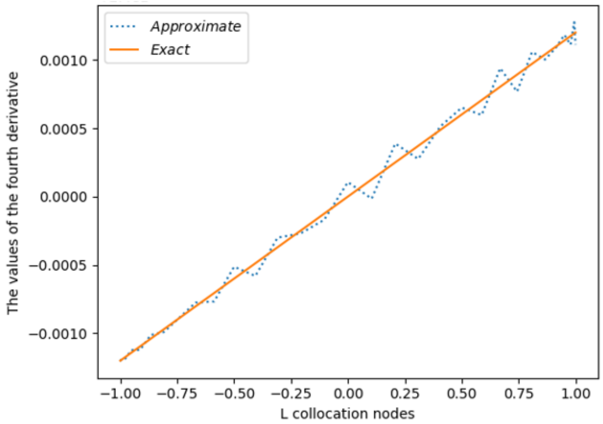

Рис. 10 Динамика четвертой производной

тральным методом решение дифференциальной задачи (1)-(2) и ее производных вычислены с достаточно высокой точностью.

На рис. 1-5 приведены динамика решения и ее производных в графическом виде при $\varepsilon = 10^{-2}$ и $N = 30$.

Из результатов приведенных на рис. 1-5 видно, что при выбранных значениях малого параметра $\varepsilon = 10^{-2}$ и числе аппроксимирующих полиномов N, решение дифференциального уравнения (1)-(2) и ее производные найдены с высокой точностью.

Далее, приведем результаты расчётов когда значение малого параметра уменьшена в 1000 раза, т.е. $\varepsilon = 10^{-5}$, но при том же числе полиномов Чебышева $N = 30$.

Динамика приближенного и точного решения и ее производных при этих значениях характерных параметров иллюстрированы на рис. 6-10.

Из этих результатов видно, что решение и ее производные найдены с высокой точностью при выбранных значениях характерных параметров.

5 Заключение

1. Предложен высокоточный и эффективный спектральный метод по полиномам Чебышева первого рода для исследования динамики решения и различных производных неоднородного дифференциального уравнения четвертого порядка с малым с малым параметром при старшей производной.

2. Проведенные численные расчёты показывают что спектральный метод надежен, эффективен и обеспечивает высокую точность вычисления решения и ее производных различного порядка.

3. Исследование динамики производных дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной является весьма важным при построение высокоточных и эффективных численных методов, так как заранее будет известным в каких участках рассматриваемого интервала надо сгустить расчётные узлы разностной сетки или увеличить количество аппроксимирующих полиномов.

Литература

[1] *Ильин А.М.* Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной Матем. Заметка. – 1969. №6(2). – С. 237–248. https://doi.org/10.1007/BF01093706

[2] *Бахвалов Н.С.* К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя. Ж.вычисл. матем. и матем.физ., – 1969. – №9(4). – С. 841–859. https://doi.org/10.1016/0041-5553(69)90038-X

[3] *Лисейкин В.Д., Яненко Н.Н.* О равномерно сходящемся алгоритме численного решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной. Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск. – 1981. – №12(2). – С. 45–56. https://www.researchgate.net/publication/336890257_1981

[4] *Li J.* Convergence analysis of finite element methods for singularly perturbed problems. Computers and Mathematics with Applications. – 2000. – №40(6). – P. 735–745. https://doi.org/10.1016/S0898-1221(00)00192-9

[5] *Duan J.S, Jing L.X., Li M.* The mixed boundary value problems and Chebyshev Collocation Method for Caputo-Type fractional ordinary differential equations. Fractal fract. – 2022. – №6(3). – P. 148–156. https://doi.org/10.3390/fractalfract6030148

[6] *Bouakkaz M., Arar N. Meflah M.* Enhanced numerical resolution of the Duffing and Van der Pol equations via the spectral homotopy analysis method employing chebyshev polynomials of the first kind. J. Appl. Math. Comput. – 2025. – Vol. 71. – P. 1159–1187. https://doi.org/10.1007/s12190-024-02271-5

[7] *Benzahi A., Arar N., Abada N., Rhaima M., Mchiri L., Ben Makhlouf A.* Numerical investigation of Fredholm fractional integro-differential equations by least squares method and compact combination of shifted Chebyshev polynomials.J. Nonlinear Math.Physi. – 2023. – Vol. 30. – P. 1392–1408. https://doi.org/10.1007/s44198-023-00128-2

[8] *Ван Т., Лянь Х., Цзи Л.* Метод разделения сингулярностей Чебышева для слабо сингулярных интегральных уравнений Вольтерры второго рода. Нумер Алгор. – 2024. – Vol. 95. – С. 1829–1854. https://doi.org/10.1007/s11075-023-01629-3

[9] *Mishchuk A.Y., Shutovskyi A.M.* Optimization Properties of Generalized Chebyshev-Poisson Integrals CybernSystAnal. – 2024. – Vol. 260. – P. 613–620. https://doi.org/10.1007/s10559-024-00700-8

[10] *Atta A.G., Youssri Y.H.* Avanced shifted first – kind Chebyshev collocation approach for solving the nonlinear time-fractional partial integro-differential equation with a weakly singular kernel.Comp.Appl.Math. – 2022. – №41(381). – P. 1–19. https://doi.org/10.1007/s40314-022-02096-7

[11] *Хубедый С.С.* Приближенное решение сингулярного интегрального уравнения первого рода с использованием многочленов Чебышева с нулевыми значениями на обеих конечных точках интервала интегрирования. Вычисл. техн.Мат.и.Мат.Физ. – 2021. – Vol. 61. – С. 1269–1275. https://doi.org/10.1134/S0965542521080030

[12] *Ядав А., Сетиа А., Агарвал Р.* Анализ ошибок численного метода, основанного на полиномах Чебышева, для системы гиперсингулярных интегральных уравнений. Comp. Appl. Math. – 2023. – Vol. 42. – 213 p. https://doi.org/10.1007/s40314-023-02352-4

[13] *Роча Д., Брауэр З., Гершгорин* Расположение нулей возмущенных многочленов Чебышева второго рода путем расширения Math.Comput.Sci. – 2024. – №18(13). https://doi.org/10.1007/s11786-024-00582-1

[14] *Castillo K., Mbouna D., Petronilho J.* A characterization of continuous q-Jacobi, Chebyshev of the first kind and Al-Salam Chihara polynomials, Journal of Mathematical Analysis and Applications, – 2022. – №514(2). – P. 1–16. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2022.126358 .

[15] *Wang X., Hu J.* An Identity Involving the Integral of the First-Kind Chebyshev Polynomials, Mathematical Problems in Engineering. – 2018. – Volum 2. – P. 1–5. https://doi.org/10.1155/2018/7186940 .

[16] *Dressler M., Foucart S., Joldes M., De Klerk E., Lasserre J.B., Xu Y.* Least multivariate chebyshev polynomials on diagonally-determined domains. – 2024. https://doi.org/10.48550/arXiv.2405.19219

[17] *Gülsu M., Öztürk Y.* Approximate solution of the singular-perturbation problem on Chebyshev-Gauss grid, – 2011. – Vol. 1. – P. 209–218. http://dx.doi.org/10.4236/ajcm.2011.14024

[18] *Dolbeeva S.F., Rozhdestvenskaya E.A.* Contrasting step-type structures for an ordinary second-order differential equation with a small parameter at the highest derivative,J.Math.and Math.Phys. – 2009. №49(12). – P. 2034–2046. https://doi.org/10.1134/S0965542509120045

[19] *Denisov A.M.* Iterative Method for Solving an Inverse Problem for a Hyperbolic Equation with a Small Parameter Multiplying the Highest Derivative Diff Equat. – 2019. – Vol. 55. – P. 940–948. https://doi.org/10.1134/S0012266119070073

[20] *Tsekhan O.B.* Decomposition of singularly perturbed functional-differential systems based on a nondegenerate transformation.J Math Sci. – 2025. – Vol. 288. – P. 128–141. https://doi.org/10.1007/s10958-025-07672-w

[21] *Danilin A.R.* Asymptotics of the solution of a bisingular optimal distributed control problem in a convex domain with a small parameter multiplying a highest derivative Comput. Math. and Math. Phys. – 2024. – Vol. 64. – P. 941–953. https://doi.org/10.1134/S0965542524700210

[22] *Denisov A.M.* The inverse problem for the heat equation in the case of a small heat capacity coefficient Comput Math Model. – 2023. – Vol. 34. – P. 208–216. https://doi.org/10.1007/s10598-025-09612-4

[23] *Normurodov Ch.B., Tursunova B.A.* Numerical modeling of the boundary value problem of an ordinary differential equation with a small parameter at the highest derivative by Chebyshev polynomials of the second kind. Results in Applied mathematics. – 2023. – Vol. 19. https://doi.org/10.1016/j.rinam.2023.100388

[24] *Abutaliev F.B., Narmuradov Ch.B.* Mathematical modeling of the problem of hydrodynamic stability. Tashkent: Fan va texnologiya: – 2011. – 188 p.

[25] *Narmuratov Ch.B.* About one effective method for solving the Orr-Sommerfeld equation Math modeling. – 2005. – №9(17). – P. 35–42.

[26] *Normurodov Ch.B., Toyirov A.X., Ziyakulova Sh.A., Viswanathan K.K.* Convergence of Spectral-Grid Method for Byurgers equation with initial-boundary conditions. Mathematics and Statistics. – 2024. – №12(2). – P. 115–125. https://doi.org/10.13189/ms.2024.120201

UDC 519.624.3

STUDY OF THE DYNAMICS OF DERIVATIVES OF A FOURTH-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION WITH A SMALL PARAMETER AT THE HIGHEST DERIVATIVE

**Normurodov Ch.B., Juraeva N.T., Normatova M.M.*

*ch.normurodov@gmail.com

Termiz state university,

43, Barkamol Avlod Str., Termez, 190111 Uzbekistan.

The article studies the dynamics of derivatives up to the highest derivative of an ordinary differential equation of the fourth order with a small parameter at the highest derivative. The solution of the differential problem is sought in the form of a series in Chebyshev polynomials of the first kind with unknown expansion coefficients. Substituting these series into the differential problem, we obtain a system of algebraic equations for finding the unknown expansion coefficients. Using these coefficients, we calculate the solution to the problem and its derivatives. To illustrate the high accuracy of the applied method, we use the method of trial functions. The essence of the method of trial functions is as follows. A certain function is selected, it can be chosen arbitrarily. Substituting it into the main differential equation, we find the right-hand side and satisfy the corresponding boundary conditions. The resulting problem is solved by the spectral method and the approximate solution is compared with the known trial function and its derivatives for different values of the small parameter and the approximating Chebyshev polynomials.

Keywords: Chebyshev polynomials, small parameter, high accuracy.

Citation: Normurodov Ch.B., Juraeva N.T., Normatova M.M. 2025. Study of the dynamics of derivatives of a fourth-order differential equation with a small parameter at the highest derivative. *Problems of Computational and Applied Mathematics.* 4(68): 97-109.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.4_68.2025.03.

№ 4(68) 2025

ISSN 2181-8460

HISOBLASH VA AMALIY MATEMATIKA MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

RAQAMLI TEXNOLOGIYALAR VA
SUN'IY INTELLEKTNI RIVOJLANTIRISH
ILMIY-TADQIQOT INSTITUTI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 4(68) 2025

Журнал основан в 2015 году.
Издается 6 раз в год.

Учредитель:
Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта.

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при Администрации Президента Республики Узбекистан.
Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Адрес редакции:
100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.
Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.
Э-почта: journals@airi.uz.
Веб-сайт: https://journals.airi.uz.

Дизайн и вёрстка:
Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.
Подписано в печать 29.08.2025 г.
Формат 60x84 1/8. Заказ №6. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 4(68) 2025

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:
Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.
The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Address:
100125, Tashkent, Buz-2, 17A.
Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.
E-mail: `journals@airi.uz`.
Web-site: `https://journals.airi.uz`.

Layout design:
Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.
Signed for print 29.08.2025
Format 60x84 1/8. Order No. 6. Print run of 100 copies.

Содержание

Contents