

УДК 519.644

СИСТЕМА ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ ТИПА ЭРМИТА С ПРОИЗВОДНЫМИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

^{1,2}Шадиметов Х.М., ^{2,3}Нуралиев Ф.А., ^{2*}Едилбекова Р.М.

*raximaedilbekova@gmail.com

¹Ташкентский Государственный Транспортный Университет, 100167, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Темирийулчилар, дом 1;²Институт математики им. В.И. Романовского АН РУз, 100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская, д. 9;³Ташкентский международный университет, Узбекистан, г.Ташкент 100084, Узбекистан, Ташкент, ул. Кичик халка йўли, 7.

В мире особое внимание уделяется созданию различных оптимальных расчетных методов для приближенного вычисления определенных интегралов. Данная статья посвящена построению составных оптимальных квадратурных формул в пространстве дифференцируемых функций методом Соболева. Эта квадратурная формула состоит из линейной комбинации значений функции и ее производных до третьего порядка включительно на всех узлах интервала $[0,1]$. Квадратурных формул оценивается нормой функционала погрешности квадратурных формул: Погрешность составных квадратурных формул оценивается через норму функционала погрешности рассматриваемой квадратурной формулы и нормой функции. Норма функционала погрешности квадратурной формулы будет найдены через экстремальной функции этой квадратурной формулы. Известно, что норма функционала погрешности составной квадратурной формулы выражается коэффициентами этой квадратурной формулы. Минимизируя эту норму по коэффициентам будут получены системы линейных уравнений для нахождения оптимальных коэффициентов составных квадратурных формул.

Ключевые слова: пространство Соболева, формула производной оптимальной квадратуры, функционал погрешности, оптимальные коэффициенты.

Цитирование: Шадиметов Х.М., Нуралиев Ф.А., Едилбекова Р.М. Система для нахождения оптимальных коэффициентов квадратурных формул типа Эрмита с производными третьего порядка // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2025. – № 4(68). – С.88-96.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.4_68.2025.07.

1 Введение

Общеизвестно, что численные интегральные формулы, или квадратурные формулы, являются методами для приближенного вычисления определенных интегралов. Они необходимы для расчета тех интегралов, для которых либо первообразная подынтегральной функции не может быть выражена в терминах элементарных функций, либо подынтегральная функция доступна только в дискретных точках, например, из экспериментальных данных. Кроме того, и что еще важнее, квадратурные формулы предоставляют базовый и важный инструмент для численного решения дифференциальных и интегральных уравнений.

Оптимальные квадратурные формулы с производными играют важную роль во многих практических задачах, особенно при решении задач, связанных с центром тяжести тела, моментами инерции, анализом изображений и сигналов, а также фильтрацией. При вычислении интегралов, связанных с механическими или физическими процессами, оптимальные квадратурные формулы с производными дают хорошие результаты. Поэтому важно построение оптимальных квадратурных формул с производными и оценка их погрешностей в различных пространствах. Задача построения оптимальных квадратурных формул с производными заключается в минимизации нормы функционала погрешности при заданных узловых точках в определенном классе функций. Такие оптимальные квадратурные формулы с производными строятся с помощью сплайнов, φ – функций и методов Соболева. Следует отметить, что метод Соболева основан на использовании дискретного аналога линейного дифференциального оператора.

Среди этих формул квадратурные формулы типа Эйлера-Маклорена очень важны для численного интегрирования дифференцируемых функций и широко используются в приложениях. Квадратурные формулы Эйлера-Маклорена можно рассматривать как расширение формулы трапеции путем включения поправочных членов. Следует отметить, что в приложениях и при решении практических задач численные формулы интегрирования интересны для функций с малой гладкостью. Формула суммирования Эйлера-Маклорена может быть представлена как расширенное правило трапеций с поправочными членами для численного интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} (f_0 + 2f_1 + \dots + 2f_{k-1} + f_k) - \sum_{\nu=1}^{r-1} \frac{B_{2\nu} h^{2\nu}}{(2\nu)!} (f_k^{(2\nu-1)} - f_0^{(2\nu-1)}) - \frac{k B_{2r} h^{2r+1}}{(2r)!} f^{(2r)}(\xi).$$

где $h = (b - a)/k$ каждое B_{2i} является числом Бернулли и $a < \xi < b$.

Рассмотрим следующую квадратурную формулу с производными типа Эрмита

$$\int_0^1 \varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^N d_0[\beta] \varphi(\beta) + \frac{h^2}{12} (\varphi'(0) - \varphi'(1)) + \sum_{\beta=0}^N d_1[\beta] \varphi'''(h\beta). \quad (1)$$

Погрешностью квадратурной формулы (1) называется разность

$$(l, \varphi) = \int_0^1 \varphi(x)dx - \sum_{\beta=0}^N d_0[\beta] \varphi(h\beta) - \frac{h^2}{12} (\varphi'(0) - \varphi'(1)) - \sum_{\beta=0}^N d_1[\beta] \varphi'''(h\beta) = \int l(x) \varphi(x)dx. \quad (2)$$

Здесь

$$l(x) = \chi_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^N d_0[\beta] \delta(x - h\beta) + \frac{h^2}{12} (\delta'(x) - \delta'(x - 1)) + \sum_{\beta=0}^N d_1[\beta] \delta'''(x - h\beta), \quad (3)$$

является функционалом погрешности квадратурной формулы (1), $\varphi(x)$ — элемент пространства $L_2^{(m)}(0, 1)$, $[\beta] = h\beta$, $\beta = \overline{0, N}$, $d_0[\beta] = \begin{cases} h/2, & \beta = 0, N \\ h, & \beta = \overline{1, N-1} \end{cases}$, $d_1[\beta]$ — коэффициенты квадратурной формулы (1), $h = \frac{1}{N}$, N — натуральное число, $\chi_{[0,1]}(x)$ — характеристическая функция отрезка $[0, 1]$, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Следует отметить, что $d_0[\beta]$ является оптимальным коэффициентом квадратурной формулы вида

$$\int_0^1 \varphi(x) dx \cong \sum_{\beta=0}^N d_0[\beta] \varphi(\beta),$$

в пространстве $L_2^{(m)}(0, 1)$.

Норма функций $\varphi(x)$ в пространстве $L_2^{(m)}(0, 1)$ определяется формулой (см. [1])

$$\|\varphi|L_2^{(m)}(0, 1)\| = \left[\int_0^1 (\varphi^{(m)}(x))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Функционал погрешности $l(x)$ квадратурной формулы (1) является линейным непрерывным функционалом в пространстве $L_2^{(m)}(0, 1)$ (см. [1]).

Погрешность (2) квадратурной формулы (1) оценивается при помощи максимума ошибки этой формулой на единичном шаре гильбертова пространства $L_2^{(m)}(0, 1)$, то есть при помощи нормы функционала (3):

$$\|l(x)|L_2^{(m)*}(0, 1)\| = \sup_{\|\varphi(x)|L_2^{(m)}(0, 1)\|=1} |(l, \varphi)|. \quad (4)$$

Это значит, что для того чтобы оценить погрешность (2) квадратурной формулы (1) достаточно решить следующую задачу.

Задача 1. Найти норму функционала погрешности $l(x)$ рассматриваемой квадратурной формулы (1).

Ясно, что норма функционала погрешности $l(x)$ зависит от коэффициентов $d_1[\beta]$ и узлов $h\beta$.

Если

$$\|\overset{\circ}{l}|L_2^{(m)*}(0, 1)\| = \inf_{d_1[\beta]} \|l|L_2^{(m)*}(0, 1)\|, \quad (5)$$

тогда функционал $\overset{\circ}{l}(x)$ будем называть оптимальным функционалом погрешности, а соответствующую квадратурную формулу оптимальной квадратурной формулой.

Отсюда естественно появляется следующая задача.

Задача 2. Найти значения коэффициентов $d_1[\beta]$ квадратурной формулы (1), которые удовлетворяют равенство (5).

Коэффициенты $d_1[\beta]$, удовлетворяющие равенство (5) называются оптимальными коэффициентами квадратурной формулы (1). Эти задачи в различных функционалах рассмотрены в работах [4–15].

2 Экстремальная функция. Норма функционала погрешности

Чтобы решить задачу 1, т.е. для нахождения нормы функционала погрешности (3) в пространстве $L_2^{(m)*}(0, 1)$ используется понятие экстремальной функции данного

функционала. Функция $u_l(x)$ называется экстремальной функцией функционала $l(x)$ [1], если выполняется равенство

$$(l, u_l) = \|l|L_2^{(m)*}(0, 1)\| \cdot \|u_l|L_2^{(m)}(0, 1)\|. \quad (6)$$

В пространстве $L_2^{(m)}(0, 1)$, с помощью теоремы Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала на гильбертовых пространствах, экстремальная функция выражается через заданный функционал и

$$\|l|L_2^{(m)*}(0, 1)\| = \|u_l|L_2^{(m)}(0, 1)\|. \quad (7)$$

Поэтому из (6) и (7) заключаем, что

$$(l, u_l) = \|l|L_2^{(m)*}(0, 1)\|^2. \quad (8)$$

С другой стороны по той же теореме для любого элемента $\varphi(x)$ пространства $L_2^{(m)}(0, 1)$ получаем

$$(l, \varphi) = \langle u_l, \varphi \rangle, \quad (9)$$

где

$$\langle u_l, \varphi \rangle = \int_0^1 u_l^{(m)}(x) \varphi^{(m)}(x) dx, \quad (10)$$

скалярное произведение в пространстве $L_2^{(m)}(0, 1)$. Экстремальная функция $u_l(x)$ является решением уравнения (9). Пусть $\varphi(x)$ – финитная бесконечно дифференцируемая функция, т.е. $\varphi(x) \in C^\infty(0, 1)$. Тогда, с использованием (10), интегрируя по частям m раз правую часть равенства (9), для функции $u_l(x)$ получаем

$$u_l^{(2m)}(x) = (-1)^m l(x). \quad (11)$$

Известно, что пространство $C^\infty(0, 1)$ плотно в пространстве $L_2^{(m)}(0, 1)$. Поэтому мы можем сколь угодно точно приблизить функции из пространства $L_2^{(m)}(0, 1)$ с помощью последовательности функций из $C^\infty(0, 1)$. Тогда, для любого $\varphi(x) \in L_2^{(m)}(0, 1)$ интегрируя по частям правую часть уравнения (9) имеем

$$\begin{aligned} (l, \varphi) &= \langle \varphi, u_l \rangle = \int_0^1 \varphi^{(m)}(x) u_l^{(m)}(x) dx = \\ &= \sum_{\alpha=1}^m \varphi^{(\alpha-1)}(x) u_l^{(2m-\alpha)}(x) \Big|_{x=0}^{x=1} + (-1)^m \int_0^1 \varphi(x) u_l^{(2m)}(x) dx. \end{aligned}$$

Отсюда, из произвольности $\varphi(x) \in L_2^{(m)}(0, 1)$ и из единственности функции $u_l(x) \in L_2^{(m)}(0, 1)$ с учетом равенства (11), получаем следующие равенства

$$u_l^{(2m)}(x) = (-1)^m l(x), \quad (12)$$

$$u_l^{(2m-\alpha)}(x) \Big|_{x=0}^{x=1} = 0, \alpha = 1, 2, \dots, m. \quad (13)$$

Теорема 1. Решение краевой задачи (12)-(13) является экстремальной функцией функционала погрешности (2) квадратурной формулы (1) и имеет вид

$$u_l(x) = (-1)^m l(x) * G_m(x) + P_{m-1}(x),$$

здесь

$$G_m(x) = \frac{x^{2m-1} \operatorname{sign} x}{2(2m-1)!}. \quad (14)$$

Является решением уравнения

$$G_m^{(2m)}(x) = \delta(x). \quad (15)$$

Теорема 1 доказана в работе [2]. Кроме того, в [2] доказана, что функционал погрешности $l(x)$ удовлетворяет условия

$$(l(x), x^s) = 0, \quad s = \overline{0, m-1}. \quad (16)$$

Равенства (16) означают, что полученная нами квадратурная формула (1) будет точна для многочленов до $(m-1)$ -й степени, т.е.

$$(l(x), x^s) = \int_{-\infty}^{\infty} l(x) x^s dx = 0, \quad s = \overline{0, m-1}.$$

Теперь, учитывая равенство (8) и используя теорему 1, мы вычислим норму функционала погрешности.

Для квадрат нормы функционала погрешности $l(x)$, с учетом (16), из равенства (8) имеем

$$\begin{aligned} \left\| l|L_2^{(m)*}(0, 1) \right\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} l(x) u_l(x) dx = \\ &= (l, u_l) = (l, (-1)^m l(x) * G_m(x) + P_{m-1}(x)). \end{aligned} \quad (17)$$

Для начала вычислим свёртку в равенстве (17).

$$\begin{aligned} l(x) * G_m(x) &= \int l(y) G_m(x-y) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\varepsilon_{[0,1]}(y) - \sum_{\beta=0}^N d_0[\beta] \delta(y-h\beta) + \frac{h^2}{12} (\delta'(y) - \delta'(y-1)) + \sum_{\beta=0}^N d_1[\beta] \delta'''(y-h\beta) \right) \times \\ &\quad \times \frac{(x-y)^{2m-1}}{2(2m-1)!} \operatorname{sign}(x-y) dy = \int_0^1 \frac{(x-y)^{2m-1}}{2(2m-1)!} \operatorname{sign}(x-y) dy - \\ &\quad - \sum_{\beta=0}^N d_0[\beta] \frac{(x-h\beta)^{2m-1}}{2(2m-1)!} \operatorname{sign}(x-h\beta) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{h^2}{12} (\delta'(y) - \delta'(y-1)) \cdot \frac{(y-x)^{2m-1}}{2(2m-1)!} \text{sign}(y-x) dy + \right. \\
& + \sum_{\beta=0}^N d_1[\beta] \delta'''(y-h\beta) \frac{(y-x)^{2m-1}}{2(2m-1)!} \text{sign}(y-x) dy \left. \right] = \int_0^1 \frac{(x-y)^{2m-1}}{2(2m-1)!} \text{sign}(x-y) dy - \\
& - \sum_{\beta=0}^N d_0[\beta] \frac{(x-h\beta)^{2m-1}}{2(2m-1)!} \text{sign}(x-h\beta) - \frac{h^2}{12} \left[\frac{x^{2m-2}}{2(2m-2)!} \text{sign}(-x) - \right. \\
& - \left. \frac{(1-x)^{2m-2}}{2(2m-2)!} \text{sign}(1-x) \right] - \sum_{\beta=0}^N d_1[\beta] \frac{(x-h\beta)^{2m-4}}{2(2m-4)!} \text{sign}(h\beta-x) = \\
& = \int_0^1 \frac{(x-y)^{2m-1}}{2(2m-1)!} \text{sign}(x-y) dy - \sum_{\beta=0}^N d_0[\beta] \frac{(x-h\beta)^{2m-1}}{2(2m-1)!} \text{sign}(x-h\beta) + \\
& + \frac{h^2}{12} \left(\frac{x^{2m-2}}{2(2m-2)!} + \frac{(1-x)^{2m-2}}{2(2m-2)!} \right) + \sum_{\beta=0}^N d_1[\beta] \frac{(x-h\beta)^{2m-4}}{2(2m-4)!} \text{sign}(x-h\beta).
\end{aligned} \tag{18}$$

Подставим (18) в (17) и вычислим следующее.

$$\begin{aligned}
& \|l\|^2 = (l, (-1)^m l(x) * G_m(x)) = \int l(x) \cdot (-1)^m (l * G_m)(x) dx = \\
& = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\gamma=0}^N d_0[\gamma] \delta(x-h\gamma) + \frac{h^2}{12} (\delta'(x) - \delta'(x-1)) + \sum_{\gamma=0}^N d_1[\gamma] \delta'''(x-h\gamma) \right) \times \\
& \times (-1)^m \cdot \left(\int_0^1 \frac{(x-y)^{2m-1}}{2(2m-1)!} \text{sign}(x-y) dy - \sum_{\beta=0}^N d_0[\beta] \frac{(x-h\beta)^{2m-1}}{2(2m-1)!} \text{sign}(x-h\beta) + \right. \\
& + \left. \frac{h^2}{12} \left(\frac{x^{2m-2}}{2(2m-2)!} + \frac{(1-x)^{2m-2}}{2(2m-2)!} \right) + \sum_{\beta=0}^N d_1[\beta] \frac{(x-h\beta)^{2m-4}}{2(2m-4)!} \text{sign}(x-h\beta) \right) dx = \\
& = (-1)^m \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \frac{(x-y)^{2m-1}}{2(2m-1)!} \text{sign}(x-y) dy dx - \sum_{\beta=0}^N d_0[\beta] \int_0^1 \frac{(x-h\beta)^{2m-1}}{2(2m-1)!} \text{sign}(x-h\beta) dx + \right. \\
& + \frac{h^2}{12} \int_0^1 \left(\frac{x^{2m-2}}{2(2m-2)!} + \frac{(1-x)^{2m-2}}{2(2m-2)!} \right) dx + \sum_{\beta=0}^N d_1[\beta] \int_0^1 \frac{(x-h\beta)^{2m-4}}{2(2m-4)!} \text{sign}(x-h\beta) dx - \\
& - \sum_{\gamma=0}^N d_0[\gamma] \int_0^1 \frac{(h\gamma-y)^{2m-1}}{2(2m-1)!} \text{sign}(h\gamma-y) dy + \sum_{\gamma=0}^N d_0[\gamma] \sum_{\beta=0}^N d_0[\beta] \frac{(h\gamma-h\beta)^{2m-1}}{2(2m-1)!} \text{sign}(h\gamma-h\beta) - \\
& - \frac{h^2}{12} \sum_{\gamma=0}^N d_0[\gamma] \left(\frac{(h\gamma)^{2m-2}}{2(2m-2)!} + \frac{(1-h\gamma)^{2m-2}}{2(2m-2)!} \right) - \\
& - \sum_{\gamma=0}^N d_0[\gamma] \sum_{\beta=0}^N d_1[\beta] \frac{(h\gamma-h\beta)^{2m-4}}{2(2m-4)!} \text{sign}(h\gamma-h\beta) - \\
& - \frac{h^2}{12} \int_0^1 \left(\frac{(0-y)^{2m-2}}{2(2m-2)!} \text{sign}(0-y) dy - \frac{(1-y)^{2m-2}}{2(2m-2)!} \text{sign}(1-y) dy \right) + \\
& + \frac{h^2}{12} \sum_{\beta=0}^N d_0[\beta] \left(\frac{(0-h\beta)^{2m-2}}{2(2m-2)!} \text{sign}(0-h\beta) - \frac{(1-h\beta)^{2m-2}}{2(2m-2)!} \text{sign}(1-h\beta) \right) - \\
& - \frac{h^4}{144} \left(-\frac{1^{2m-3}}{2(2m-3)!} - \frac{1^{2m-3}}{2(2m-3)!} \right) - \frac{h^2}{12} \sum_{\beta=0}^N d_1[\beta] \left(\frac{(0-h\beta)^{2m-5}}{2(2m-5)!} \text{sign}(0-h\beta) - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{(1-h\beta)^{2m-5}}{2(2m-5)!}\text{sign}(1-h\beta)\Bigg) - \sum_{\gamma=0}^N d_1[\gamma] \int_0^1 \frac{(h\gamma-y)^{2m-4}}{2(2m-4)!}\text{sign}(h\gamma-y)dy + \\
& + \sum_{\gamma=0}^N d_1[\gamma] \sum_{\beta=0}^N d_0[\beta] \frac{(h\gamma-h\beta)^{2m-4}}{2(2m-4)!}\text{sign}(h\gamma-h\beta) - \frac{h^2}{12} \sum_{\gamma=0}^N d_1[\gamma] \left(\frac{(h\gamma)^{2m-5}}{2(2m-5)!} - \right. \\
& \left. - \frac{(1-h\gamma)^{2m-5}}{2(2m-5)!} \right) - \sum_{\gamma=0}^N d_1[\gamma] \sum_{\beta=0}^N d_1[\beta] \frac{(h\gamma-h\beta)^{2m-7}}{2(2m-7)!}\text{sign}(h\gamma-h\beta) \Bigg\} = \\
& = (-1)^m \left\{ - \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N d_1[\beta] d_1[\gamma] \frac{(h\gamma-h\beta)^{2m-7}}{2(2m-7)!} \text{sign}(h\gamma-h\beta) + \right. \\
& + 2 \sum_{\beta=0}^N d_1[\beta] \sum_{\gamma=0}^N d_0[\gamma] \frac{(h\beta-h\gamma)^{2m-4}}{2(2m-4)!}\text{sign}(h\beta-h\gamma) + \\
& + 2 \sum_{\beta=0}^N d_1[\beta] \int_0^1 \frac{(x-h\beta)^{2m-4}}{2(2m-4)!}\text{sign}(x-h\beta)dx - 2 \cdot \frac{h^2}{12} \sum_{\beta=0}^N d_1[\beta] \left(\frac{(h\beta)^{2m-5}}{2(2m-5)!} - \right. \\
& \left. - \frac{(1-h\beta)^{2m-5}}{2(2m-5)!} \right) + \frac{h^2}{6} \int_0^1 \left(\frac{x^{2m-2}}{2(2m-2)!} + \frac{(1-x)^{2m-2}}{2(2m-2)!} \right) dx - \\
& - \frac{h^2}{6} \sum_{\beta=0}^N d_0[\beta] \left(\frac{(h\beta)^{2m-2}}{2(2m-2)!} + \frac{(1-h\beta)^{2m-2}}{2(2m-2)!} \right) + \\
& + \sum_{\gamma=0}^N \sum_{\beta=0}^N d_0[\gamma] d_0[\beta] \frac{(h\gamma-h\beta)^{2m-1}}{2(2m-1)!}\text{sign}(h\gamma-h\beta) - \\
& \left. - 2 \sum_{\beta=0}^N d_0[\beta] \int_0^1 \frac{(x-h\beta)^{2m-1}}{2(2m-1)!}\text{sign}(x-h\beta)dx + \int_0^1 \int_0^1 \frac{(x-y)^{2m-1}}{2(2m-1)!}\text{sign}(x-y)dydx \right\}.
\end{aligned}$$

3 Система для коэффициентов оптимальных квадратурных формул

Задача 2 в такой общей постановке довольно сложна. Минимизация нормы функционала погрешности по коэффициентам $d_1[\beta]$ – это линейная задача, поэтому для упрощения мы рассмотрим задачу 2 при фиксированных узлах $h\beta$. Функционал погрешности (3) удовлетворяет условиям (16). Норма функционала погрешности $l(x)$ является многомерной функцией коэффициентов $d_1[\beta]$. Для нахождения точки условного минимума квадрата нормы функционала погрешности (3) при условиях (16) применяем метод неопределенных множителей Лагранжа. Для этого составим функцию Лагранжа:

$$\begin{aligned}
\Lambda(d, \lambda) &= \|l\|^2 + 2(-1)^m \sum_{\alpha=3}^{m-1} \lambda_{\alpha} (l, x^{\alpha}) = \|l\|^2 + \\
& + 2(-1)^m \sum_{\alpha=3}^{m-1} \lambda_{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha+1} - \sum_{\beta=0}^N d_0[\beta] (h\beta)^{\alpha} + \frac{\alpha h^2}{12} - \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \sum_{\beta=0}^N d_1[\beta] (h\beta)^{\alpha-3} \right).
\end{aligned}$$

Приравнивая к нулю частные производные от $\Lambda(d, \lambda)$ по $d_1[\beta]$ ($\beta = \overline{0, N}$) и λ_α ($\alpha = \overline{3, m-1}$) получаем линейную систему

$$\sum_{\gamma=0}^N d_1[\gamma] \frac{(h\beta - h\gamma)^{2m-7}}{2(2m-7)!} \text{sign}(h\beta - h\gamma) + P_{m-4}(h\beta) = f_m(h\beta), \quad \beta = \overline{0, N}, \quad (19)$$

$$\sum_{\beta=0}^N d_1[\beta] (h\beta)^\alpha = - \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{\alpha! B_{\alpha+4-i}}{i!(\alpha+4-i)!}; \quad \alpha = \overline{0, m-4}, \quad (20)$$

где

$$f_m(h\beta) = \sum_{j=0}^{2m-7} \frac{(h\beta)^{2m-7-j}}{(2m-7-j)!} \left[\frac{B_{j+4} h^{j+4}}{(j+4)!} + \sum_{i=1}^j \frac{(-1)^j B_{j+4-i} h^{j+4-i}}{2i!(j+4-i)!} \right].$$

Система (19)-(20) имеет единственное решение.

Доказательство единственности решение системы (19)-(20) аналогично, как и в [1].

Литература

- [1] *Соболев С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул // М.: Наука, – 1974. – 808 с.
- [2] *Шадиметов Х.М., Нуралиев Ф.А.* Об одной оптимальной квадратурной формуле с производными // Узбекский математический журнал, – 2005. – № 3. – С. 90–103.
- [3] *Соболев С.Л., Васкевич В.Л.* Кубатурные формулы // Новосибирск: Изд-во ИМСО РАН, – 1996. – 484 с.
- [4] *Sarafyan D., Derr L., Outlaw C.* Generalizations of the Euler-Maclaurin Formula // Journal of mathematical analysis and applications – 1979. – Vol. 67. – P. 542–548.
- [5] *Sobolev S.L.* The coefficients of optimal quadrature formulas, in: Selected works of S.L. Sobolev // Springer US, – 2006. – P. 561–566.
- [6] *Соболев С.Л.* Коэффициенты оптимальных квадратурных формул // Докл. АН СССР, Москва, – 1977. – Т. 235. – № 1. – С. 34–37.
- [7] *Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R., Nuraliev F.A.* Optimal interpolation formulas with derivative in the space $L_2^m(0, 1)$ // Filomat, – 2019. – Vol. 33(17). – P. 5661–5675.
- [8] *Shadimetov Kh.M., Nuraliev F.A., Kuziev Sh.S.* Optimal quadrature formula of Hermite type in the space of differentiable functions // International Journal of Analysis and Applications, – 2024. – № 22(25). – P. 1–13.
- [9] *Nuraliev F.A., Kuziev Sh.S.* The coefficients of an optimal quadrature formula in the space of differentiable functions // Uzbek Mathematical Journal, – 2023. – № 67(2). – P. 124–134.
- [10] *Lanzara F.* An optimal quadrature formula // Journal of Inequalities and Applications, – 2000. – Vol. 5. – P. 201–225.
- [11] *Nuraliev F.A.* Optimal formulas for numerical integration with derivatives in Sobolev space // Доклады АН РУз, – 2016. – № 1. – С. 3–6.
- [12] *Hayotov A.R., Shadimetov Kh.M., Nuraliev F.A.* Optimal quadrature formulas with derivative in the space $L_2^{(m)}(0, 1)$ // American Journal of Numerical Analysis, – 2014. – Vol. 2. – № 4. – P. 115–128.
- [13] *Shadimetov Kh.M., Nuraliev F.A.* Optimization of quadrature formulas with derivatives // Problem of Computational and Applied Mathematics, Tashkent, – 2015. – № 1. – P. 61–70.
- [14] *Hayotov A.R., Babaev S.S.* The numerical solution of a Fredholm integral equations of the second kind by the weighted optimal quadrature formula // Results in Applied Mathematics – 2024. – Vol. 24. 100508, doi: <http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/j.rinam.2024.100508>.

- [15] *Hayotov A.R., Babaev S.S.* An optimal quadrature formula for numerical integration of the right Riemann–Liouville fractional integral // Lobachevskii J. Math. – 2023. – Vol. 44. – № 10. – P. 4282–4293. doi: <http://dx.doi.org/10.1134/S1995080223100165>.

UDC 519.644

SYSTEM FOR FINDING OPTIMAL COEFFICIENTS OF HERMITE-TYPE QUADRATURE FORMULAS WITH THIRD-ORDER DERIVATIVES

^{1,2}*Shadimetov Kh.M.*, ^{2,3}*Nuraliev F.A.*, ^{2*}*Edilbekova R.M.*

*raximaedilbekova@gmail.com

¹Tashkent State Transport University, Temiryolchilar street, 1, Tashkent, 100167 Uzbekistan;

²V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, 9, University str., Tashkent, 100174 Uzbekistan;

³Tashkent International University, 7, Kichik khalka yoli str., Tashkent, 100084 Uzbekistan.

In the world, special attention is given to developing various optimal computational methods for the approximate calculation of definite integrals. This article focuses on constructing composite optimal quadrature formulas in the space of differentiable functions using the Sobolev method. The quadrature formula consists of a linear combination of function values and its derivatives up to and including the third order at all nodes of the interval $[0,1]$. The accuracy of quadrature formulas is evaluated by the norm of the error functional of the quadrature formulas: The error of composite quadrature formulas is estimated through the norm of the error functional of the quadrature formula under consideration and the norm of the function. The norm of the error functional of the quadrature formula will be determined through the extremal function of this quadrature formula. It is known that the norm of the error functional of a composite quadrature formula is expressed in terms of the coefficients of this quadrature formula. By minimizing this norm with respect to the coefficients, systems of linear equations will be obtained for finding the optimal coefficients of composite quadrature formulas.

Keywords: Sobolev space, derivative optimal quadrature formula, error functional, optimal coefficients.

Citation: Shadimetov Kh.M., Nuraliev F.A., Edilbekova R.M. 2025. System for finding optimal coefficients of Hermite-type quadrature formulas with third-order derivatives. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 4(68):88-96.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.4_68.2025.07.

HISOBLASH VA AMALIY MATEMATIKA MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
PROBLEMS OF COMPUTATIONAL
AND APPLIED MATHEMATICS



ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 4(68) 2025

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Арипов М.М., Шадиметов Х.М., Ахмедов Д.Д.

Ответственный секретарь:

Убайдуллаев М.Ш.

Редакционный совет:

Азамов А.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Арушанов М.Л.,
Бурнашев В.Ф., Джумаёзов У.З., Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия),
Игнатъев Н.А., Ильин В.П. (Россия), Иманкулов Т.С. (Казахстан),
Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия), Карачик В.В. (Россия),
Курбонов Н.М., Маматов Н.С., Мирзаев Н.М., Мухамадиев А.Ш., Назирова Э.Ш.,
Нормуродов Ч.Б., Нуралиев Ф.М., Опанасенко В.Н. (Украина),
Расулмухамедов М.М., Расулов А.С., Садуллаева Ш.А.,
Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А., Хамдамов Р.Х.,
Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Чье Ен Ун (Россия), Шабозов М.Ш. (Таджикистан),
Dimov I. (Болгария), Li Y. (США), Mascagni M. (США), Min A. (Германия),
Singh D. (Южная Корея), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

Дизайн и вёрстка:

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 29.08.2025 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №6. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 4(68) 2025

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

Editor-in-Chief:

Ravshanov N.

Deputy Editors:

Aripov M.M., Shadimetov Kh.M., Akhmedov D.D.

Executive Secretary:

Ubaydullaev M.Sh.

Editorial Council:

Azamov A.A., Aloev R.D., Amirgaliev E.N. (Kazakhstan), Arushanov M.L.,
Burnashev V.F., Djumayozov U.Z., Zagrebina S.A. (Russia), Zadorin A.I. (Russia),
Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia), Imankulov T.S. (Kazakhstan), Ismagilov I.I. (Russia),
Kabanikhin S.I. (Russia), Karachik V.V. (Russia), Kurbonov N.M., Mamatov N.S.,
Mirzaev N.M., Mukhamadiev A.Sh., Nazirova E.Sh., Normurodov Ch.B., Nuraliev F.M.,
Opanasenko V.N. (Ukraine), Rasulov A.S., Sadullaeva Sh.A., Starovoitov V.V. (Belarus),
Khayotov A.R., Khaldjigitov A., Khamdamov R.Kh., Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh.,
Chye En Un (Russia), Shabozov M.Sh. (Tajikistan), Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA),
Mascagni M. (USA), Min A. (Germany), Singh D. (South Korea), Singh M. (South
Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the
Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.

The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.

Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

Address:

100125, Tashkent, Buz-2, 17A.

Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

E-mail: journals@airi.uz.

Web-site: <https://journals.airi.uz>.

Layout design:

Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.

Signed for print 29.08.2025

Format 60x84 1/8. Order No. 6. Print run of 100 copies.

Содержание

<i>Халдусигитов А., Адамбаев У., Тилозов О., Рахмонова Р., Махмадиерова М.</i> Сравнительный анализ численных методов решения задач теории упругости в напряжениях	8
<i>Нуралиев Ф.М., Тохиров Б.Н.</i> Комплексное математическое моделирование термо-электро-магнито-упругих процессов в анизотропных тонких пластинах сложной формы на основе ме- тода RFM	17
<i>Нормуродов Ч.Б., Зиякулова Ш.А.</i> Численное моделирование изгиба тонкой пластины с применением дискрет- ного варианта метода предварительного интегрирования	26
<i>Равшанов Н., Журабоева О., Боборахимов Б., Шарипов Х.</i> Моделирование распространения загрязняющих веществ в атмосфере с уче- том рельефа и метеорологических условий	38
<i>Саидов У., Жураев И., Туракулов Ж.</i> Моделирование процесса фильтрования малоконцентрированного раствора через пористую среду	47
<i>Муминов С.Ю.</i> Построение автомодельного решения системы нелинейных дифференциаль- ных уравнений, представляющих задачи взаимной диффузии.	56
<i>Ахмедов Д.М., Буваширов Д.С.</i> Оптимальная квадратурная формула для гиперсингулярных интегралов ти- па Адамара с высокой осцилляцией в пространстве Соболева	65
<i>Алоев Р.Д., Алимова В.</i> Исследование экспоненциальной устойчивости численного решения гипербо- лической системы с отрицательными нелокальными характеристическими скоростями	75
<i>Шадиметов Х.М., Нуралиев Ф.А., Едилбекова Р.М.</i> Система для нахождения оптимальных коэффициентов квадратурных фор- мул типа Эрмита с производными третьего порядка	88
<i>Нормуродов Ч.Б., Джураева Н.Т., Норматова М.М.</i> Исследование динамики производных дифференциального уравнения чет- вертого порядка с малым параметром при старшей производной	97
<i>Шадиметов Х.М., Нуралиев Ф.А., Миркомилев Д.М.</i> Оптимальные квадратурные формулы для приближенного вычисления быст- роосциллирующих интегралов	110
<i>Игнатъев Н.А., Рамазонов Ш.Ш.</i> Отношение связанности в метрических алгоритмах классификации и анализ его свойств	122

Contents

<i>Khaldjigitov A., Adambaev U., Tilovov O., Rakhmonova R., Makhmadiygorova M.</i>	
Numerical solution of plane problems of the theory of elasticity directly in stresses	8
<i>Nuraliyev F.M., Tokhirov B.N.</i>	
Comprehensive mathematical modeling of thermo-electro-magneto-elastic processes in anisotropic thin plates of complex shape based on the RFM method	17
<i>Normurodov Ch.B., Ziyakulova Sh.A.</i>	
Numerical modeling of thin plate bending using a discrete version of the pre-integration method	26
<i>Ravshanov N., Juraboeva O., Boborakhimov B., Sharipov Kh.</i>	
Modeling the dispersion of pollutants in the atmosphere, accounting for terrain and meteorological conditions	38
<i>Saidov U., Juraev I., Turakulov J.</i>	
Modeling the process of filtering a low-concentration solution through a porous medium	47
<i>Muminov S.Y.</i>	
Construction of a self-similar solution to mutual diffusion problems.	56
<i>Akhmedov D.M., Buvasheerov D.S.</i>	
An optimal quadrature formula for Hadamard-type hypersingular integrals with high oscillation in the Sobolev space	65
<i>Aloev R.D., Alimova V.</i>	
Investigation of the exponential stability of the numerical solution of a hyperbolic system with negative nonlocal characteristic velocities	75
<i>Shadimetov Kh.M., Nuraliev F.A., Edilbekova R.M.</i>	
System for finding optimal coefficients of Hermite-type quadrature formulas with third-order derivatives	88
<i>Normurodov Ch.B., Juraeva N.T., Normatova M.M.</i>	
Study of the dynamics of derivatives of a fourth-order differential equation with a small parameter at the highest derivative	97
<i>Shadimetov X.M., Nuraliyev F.A., Mirkomilov D.M.</i>	
Optimal quadrature formulas for approximate calculation of fast oscillating integral	110
<i>Ignatiev N.A., Ramazonov Sh.Sh.</i>	
Relationship in metric classification algorithms and analysis of its properties	122