УДК 519.63

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ НЕЛОКАЛЬНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМИ СКОРОСТЯМИ

***Алоев Р.Д., Алимова В.**

*aloevr@mail.ru

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,

100174, Узбекистан, Ташкент, м-в Университет шахарчаси, 4.

В данной работе изучается задача стабилизации состояния равновесия для гиперболического уравнения с отрицательной нелокальной характеристической скоростью и погрешностью измерения. Представлена формулировка смешанной задачи управления. Дано определение слабого решения, экспоненциальной устойчивости состояния равновесия смешанной задачи и функции Ляпунова. Приведена теорема об экспоненциальной устойчивости состояния равновесия смешанной задачи. Устойчивость в L_2 – норме определяется относительно дискретных возмущений состояния равновесия начально-краевой разностной задачи. В вычислительном эксперименте рассмотрено одно гиперболическое уравнение с отрицательной характеристической скоростью и найдено его численное решение с использованием построенной разностной схемы. Показан график нормы L_2 численного решения, демонстрирующий его устойчивость.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, нелокальная характеристическая скорость, устойчивость, явная разностная схема.

Цитирование: *Алоев Р.Д., Алимова В.* Исследование экспоненциальной устойчивости численного решения гиперболической системы с отрицательными нелокальными характеристическими скоростями // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2025. – №4(68). – С. 75-87.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.4_68.2025.05.

1 Введение

В работе [1] исследуется вопрос устойчивости решения скалярного закона сохранения с нелокальной скоростью, который моделирует производственную систему с высокой рентабельностью, встречающуюся в производстве полупроводников. Спектральным анализом получен экспоненциальной устойчивости решения линеаризованной системы управления. Кроме того, с помощью функции Ляпунова доказана экспоненциальная устойчивость решения нелинейной управляемой системы в некоторых случаях.

В статье [2] исследуется устойчивость решения класса нелинейных уравнений переноса с нелокальной скоростью. Он моделирует систему с высоким уровнем повторного входа, которая широко используется в производстве полупроводников. Экспоненциальная устойчивость решения задачи постоянного равновесия доказана методом функций Ляпунова. Методом функций Ляпунова получена экспоненциальная устойчивость дискретной системы.

Работа [3] посвящена исследованию экспоненциальной устойчивости равновесия для скалярного закона сохранения с нелокальной скоростью и ошибкой измерения, возникающей в производственной системе с высокой рентабельностью. С помощью подходящей функции Ляпунова доказываются достаточные и необходимые условия устойчивости как для непрерывной, так и для дискретной задачи.

В работе [4] исследуется проблема стабилизации состояния равновесия для гиперболического уравнения с отрицательной нелокальной характеристической скоростью и погрешностью измерения. Представлена постановка смешанной задачи управления. Установлена устойчивость начально-краевой разностной задачи в L^2 – норме относительно дискретных возмущений состояния равновесия. Предложена дискретная функция Ляпунова и доказана теорема об устойчивости состояния равновесия начально-краевой разностной задачи в L^2 – норме относительно дискретного возмущения. Статьи [6] - [12] посвящены проблемам построения и исследования экспоненциальной устойчивости численного решения смешанных задач для гиперболических систем. В них предлагаются системный подход к построению и исследованию адекватности вычислительных моделей для смешанной диссипативной краевой задачи, поставленной для симметричных t – гиперболических систем. Рассматриваются одномерные и двумерные гиперболические системы, с переменными коэффициентами и младшими членами, а также со стандартными диссипативными граничными условиями. Построены разностные схемы для численного расчета устойчивых решений поставленных задач. Построены дискретные аналоги функции Ляпунова для численной проверки устойчивости решений рассматриваемых задач. Получены априорные оценки дискретного аналога функции Ляпунова. Эта оценка позволяет утверждать об экспоненциальной устойчивости численного решения. Доказаны теоремы об экспоненциальной устойчивости решения краевой задачи для гиперболической системы и об устойчивости разностной схемы в пространствах Соболева. Эти теоремы об устойчивости дают нам возможность доказать сходимость численного решения.

Заметим, что во всех работах [1] - [3] рассматриваются случай положительных характеристических скоростей.

В настоящей работе результаты этих работ переносятся на случай отрицательных характеристических скоростей.

Рассмотрим гиперболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mu\left(a(t)\right)\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad t \in [0, +\infty),\ x \in [0, 1], \tag{1}$$

где характеристическая скорость $-\mu(a(t))$ зависит от интеграла неизвестной функции по всей области $[0, 1]$, т.е. глобально.

$$a(t) = \int_0^1 u(t, x)\, dx, \quad t \in (0, +\infty). \tag{2}$$

Начальное условие для уравнения (1) имеет вид

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in [0, 1]. \tag{3}$$

Для простоты предположим, что функция характеристической скорости $-\mu(a(t)) < 0$ – отрицательная. В работе [2] рассматривается случай, когда функция характеристической скорости – является положительной. В силу того, что $-\mu(a(t)) < 0$, граничное условие требуется только на правой границе при $x = 0$

$$-u(t,1)\mu(a(t)) = -V(t). \tag{4}$$

Функция управления $V(t)$ используется для управления системой, т.е. обеспечением устойчивости равновесного состояния. При соответствующем выборе $\mu, u_0, V(t)$ можно доказать корректность постановки смешанной задачи.

В этой работе рассмотрим один частный случай задания граничного условия.

Относительно (гиперболического) скалярного закона сохранения с нелокальной характеристической скоростью здесь исследуем глобальную обратную стабилизацию замкнутой системы в уравнении (1) по закону обратной связи:

$$-V(t) + u^*\mu(u^*) = r\left\{-\left[u(t,0)+\delta(t)\right]\mu(a(t)) + u^*\mu(u^*)\right\}, \quad t \in (0,+\infty), \tag{5}$$

где $r \in [0,1]$ – коэффициент обратной связи, а $u^* > 0$ – заданное равновесие и $\delta(t)$ – ограниченное возмущение. Заметим, что при заданном равновесии, значение характеристической функции вычисляется следующим образом:

$$-\mu(a(t))\Big|_{u=u^*} = -\mu\left(\int_0^1 u^*\,dx\right) = -\mu(u^*).$$

В настоящей работе ограничиваемся следующим семейством характеристических скоростей типа

$$\mu(s) = \frac{P}{Q+s}, \quad s \in [0,+\infty), \quad P > 0, \quad Q > 0. \tag{6}$$

Итак, рассмотрим следующую задачу управления

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \mu(a(t))\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad t \in (0,+\infty),\ x \in (0,1), \\ u(0,x) = u_0(x), \quad x \in (0,1), \\ V(t) - u^*\mu(u^*) = r\left\{\left[u(t,0)+\delta(t)\right]\mu(a(t)) - u^*\mu(u^*)\right\}, \quad t \in (0,+\infty), \\ u(t,1)\mu(a(t)) = V(t), \quad t \in [0,+\infty), \\ a(t) = \displaystyle\int_0^1 u(t,x)\,dx, \quad t \in (0,+\infty), \end{cases} \tag{7}$$

где $u(t,x)$ – подлежащая определению функция, $-\mu(a(t)) \in C^1([0,+\infty),(0,+\infty))$ — функция характеристической скорости, $a(t)$ – интеграл от неизвестной функции $u(t,x)$, $V(t)$ – является контроллером, $r \in [0,1)$ – неотрицательный коэффициент обратной связи, u^* – является равновесным решением, $\delta(t)$ – является ограниченным (известным) возмущением.

Слабое решение замкнутой системы (7) определяется ниже.

Определение 1. (Слабое решение) Пусть $T > 0$. Функция $u \in C^0([0,T];L^1(0,1))$ называется слабым решением смешанной задачи (7), если для любого $s \in [0,T]$ и любого $\psi \in C^1([0,s]\times[0,1])$, удовлетворяющей условиям

$$\psi(s,x) = 0, \quad \forall x \in [0,1], \quad \text{и} \quad \psi(t,0) = r\psi(t,1), \quad \forall t \in [0,s], \tag{8}$$

выполняется следующее уравнение:

$$\int_0^s \int_0^1 u(t,x)\left[\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,x)-\mu(a(t))\frac{\partial\psi}{\partial x}(t,x)\right]dx\,dt+\int_0^s ((1-r)u^*\mu(u^*))\,\psi(t,1)\,dt+$$
$$+\int_0^s (ru(t,0)\mu(a(t))+r\delta(t)\mu(a(t)))\,\psi(t,1)\,dt+\int_0^1 u(0,x)\psi(0,x)\,dx=0. \tag{9}$$

Приводим процесс получения равенства (9). Исходное уравнение (1) умножим на произвольную функцию $\psi\in C^1([0,s]\times[0,1])$ и проинтегрируем по t от 0 до s и по x от 0 до 1. Тогда получаем равенство

$$\int_0^s \int_0^1 \psi(t,x)\left(\partial_t u(t,x)-\mu(a(t))\partial_x u(t,x)\right)dx\,dt=0. \tag{10}$$

С другой стороны, используя формулы интегрирования по частям для выражения левой части равенства (10), получим:

$$\int_0^s \int_0^1 \psi(t,x)\left(\partial_t u-\mu(a(t))\partial_x u\right)dx\,dt=$$
$$=\int_0^s \int_0^1 \left(\psi\partial_t u-\mu\psi\partial_x u\right)dx\,dt=$$
$$=\int_0^s \int_0^1 \left(\partial_t(u\psi)-u\partial_t\psi-\mu\left[\partial_x(u\psi)-u\partial_x\psi\right]\right)dx\,dt=$$
$$=\int_0^1 \left[\psi(s,x)u(s,x)-\psi(0,x)u(0,x)\right]dx+$$
$$+\int_0^s \mu(a(t))\left[\psi(t,0)u(t,0)-\psi(t,1)u(t,1)\right]dt+\int_0^s \int_0^1 \left(-\partial_t\psi-\mu(a(t))\partial_x\psi\right)u\,dx\,dt=0.$$

Предположим, что функция $\psi\in C^1([0,s]\times[0,1])$ удовлетворяет граничным условиям (8) определения 1. Тогда:

$$-\int_0^1 \psi(0,x)u(0,x)dx+\int_0^s \mu(a(t))\left[r\psi(t,1)u(t,0)-\psi(t,1)u(t,1)\right]dt-$$
$$-\int_0^s \int_0^1 \left(\partial_t\psi-\mu(a(t))\partial_x\psi\right)u\,dx\,dt=0.$$

Тогда умножая это равенство на -1 получим

$$\begin{gathered}\int_0^s \int_0^1 u(t,x)\left(\partial_t\psi(t,x)+\mu(a(t))\partial_x\psi(t,x)\right)dx\,dt+\\ +\int_0^s \mu(a(t))\left[u(t,1)-ru(t,0)\right]\psi(t,1)\,dt+\int_0^1 u(0,x)\psi(0,x)\,dx=0.\end{gathered} \tag{11}$$

Из граничных условий (7)

$$u(t,1)\mu(a(t))-u^*\mu(u^*)=r\left\{\left[u(t,0)+\delta(t)\right]\mu(a(t))-u^*\mu(u^*)\right\},$$

имеем

$$\mu(a(t))\left[u(t,1) - ru(t,0)\right]\psi(t,1) = \left\{(1-r)u^*\mu(u^*) + r\delta(t)\mu(a(t))\right\}\psi(t,1). \tag{12}$$

Подставляя выражение (12) в (11) получим равенство (9).

Определение 2. (Устойчивость). Пусть $\Delta > 0$. Равновесие $u^* \geqslant 0$ смешанной задачи (7) называется экспоненциально устойчивым в L^2 – норме, относительно любой функции возмущения $\delta(\cdot) \in L^\infty(0,\infty)$ такой, что $\|\delta\|_{L^\infty(0,\infty)} \leqslant \Delta$, если существуют положительные константы $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$, независимые от δ, такие, что для каждого начального условия $u_0(x) \in L^2(0,1)$, L^2 – решение смешанной задачи (7) удовлетворяет

$$\|u(t,\cdot) - u^*\|_{L^2} \leqslant \zeta_2 e^{-\zeta_1 t}\|u_0 - u^*\|_{L^2} + \zeta_3\|\delta(s)\|_{L^\infty(0,t)}, \quad t \in [0,\infty). \tag{13}$$

Определение 3. (функция Ляпунова). Функция $L : L^2(0,1) \to \mathbb{R}_+$ называется функцией Ляпунова для смешанной задачи (7), если

(i) существуют положительные константы $\chi_1 > 0$ и $\chi_2 > 0$ такие, что для всех решений $u \in C^0\left((0,\infty]; L^2(0,1)\right)$ и $t \in (0,\infty]$

$$\chi_1 \left\|u(t,\cdot) - u^*\right\|_{L^2}^2 \leqslant \mathcal{L}(u(t,\cdot)) \leqslant \chi_2 \left\|u(t,\cdot) - u^*\right\|_{L^2}^2, \tag{14}$$

(ii) существуют положительные константы $\eta > 0$ и $\nu > 0$ такие, что для всех решений $u \in C^0\left((0,\infty]; L^2(0,1)\right)$ и $t \in (0,\infty]$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(u(t,\cdot)) \leqslant -\eta\mathcal{L}(u(t,\cdot)) + \nu\delta^2(t). \tag{15}$$

Для упрощения записи введем также функцию

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}(u(t,\cdot)), \tag{16}$$

где $u \in C^0\left((0,\infty]; L^2(0,1)\right)$ является решением смешанной задачи (7).

Теорема 1. (Устойчивость для случая $u^* \geqslant 0$). Зафиксируем любые $u^* \geqslant 0$, $\quad k \in [0,1]$, $\quad U > 0$, $\quad \Delta > 0$ и любые $u_0 \in L^2(0,1)$, удовлетворяющие $u_0 \geqslant 0$, т.е. в $(0,1)$. Предположим далее, что

$$\|u_0(\cdot) - u^*\|_{L^2(0,1)} \leqslant U. \tag{17}$$

Предположим, что существует неотрицательное почти всюду слабое решение $u \in C^0\left((0,\infty]; L^2(0,1)\right)$ смешанной задачи (7), где μ задается уравнением (6).

Тогда стационарное состояние u^* смешанной задачи (7) является экспоненциально устойчивым в L^2 – норме относительно любой функции возмущения $\delta \in \{\delta(\cdot) \in L^\infty(0,\infty) : \|\delta\|_{L^\infty} \leqslant \Delta\}$.

Рассмотрим преобразования возмущения относительно равновесия u^*

$$\widetilde{u}(t,x) = u(t,x) - u^*, \quad \widetilde{a}(t) = a(t) - u^*, \quad \widetilde{u}(x) = u_0(x) - u^*,$$

$$\widetilde{\mu}_a(t) = \mu\left(u^* + \widetilde{a}(t)\right), \quad \widetilde{V}(t) = \widetilde{\mu}_a(t)\widetilde{u}(t,1).$$

Тогда смешанная задача (7) с (6) для $t \in (0,+\infty)$ может быть переписана так

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} - \widetilde{\mu}_{\widetilde{a}}(t)\dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} = 0, & x \in (0,1),\\
\widetilde{u}(0,x) = \widetilde{u}_0(x), & x \in (0,1),\\
\widetilde{V}(t) = r\widetilde{\mu}_{\widetilde{a}}(t)\left[\widetilde{u}(t,0) + \delta(t)\right] + (1-r)u^*\left\{\mu(u^*) - \widetilde{\mu}_{\widetilde{a}}(t)\right\}, & \\
\widetilde{\mu}_{\widetilde{a}}(t) = \mu\left(u^* + \widetilde{a}(t)\right), & \\
\widetilde{a}(t) = \displaystyle\int_0^1 \widetilde{u}(t,x)\,dx \geqslant -u^*, & \\
\mu(s) = \dfrac{P}{Q+s}, \quad P>0,\ Q>0,\ s\in[0,+\infty). &
\end{cases}
\tag{18}
$$

Используя уравнение функции скорости (6) в уравнении (18), мы имеем

$$
\begin{gathered}
u^*\left\{\mu(u^*) - \widetilde{\mu}_{\widetilde{a}}(t)\right\} = u^*\left\{\frac{P}{Q+u^*} - \frac{P}{Q+u^*+\widetilde{a}(t)}\right\} = \\
= u^*\left\{\frac{P\cdot\widetilde{a}(t)}{(Q+u^*)(Q+u^*+\widetilde{a}(t))}\right\} = \frac{u^*}{(Q+u^*)}\frac{P}{Q+u^*+\widetilde{a}(t)}\widetilde{a}(t) = \varpi\widetilde{\mu}_a(t)\cdot\widetilde{a}(t),
\end{gathered}
\tag{19}
$$

где

$$
\varpi = \frac{u^*}{Q+u^*} < 1.
$$

Для удобства до конца этого доказательства теоремы 1 мы опускаем символ «$\sim$».

Тогда для $t \in (0,+\infty)$ система в уравнении (18) с уравнением (19) может быть переписана в следующем виде:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} - \mu_a(t)\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, & x \in (0,1),\\
u(0,x) = u_0(x), & x \in (0,1),\\
V(t) = r\mu_a(t)\left[u(t,0) + \delta(t)\right] + (1-r)\varpi\mu_a(t)a(t), \quad \varpi = \dfrac{u^*}{Q+u^*}, & \\
\mu_a(t) = \mu\left(u^* + a(t)\right), & \\
a(t) = \displaystyle\int_0^1 u(t,x)\,dx \geqslant -u^*, & \\
\mu(s) = \dfrac{P}{Q+s}, \quad P>0,\ Q>0,\ s\in[0,+\infty). &
\end{cases}
\tag{20}
$$

В приведенных выше обозначениях предположение 1 в уравнении (17) теоремы выглядит следующим образом:

$$
\|u_0\|_{L^2(0,1)} \leqslant U. \tag{21}
$$

Доказательство теоремы подробно приведено в [4].

2 Исследование экспоненциальной устойчивости разностной схемы

В этом разделе мы распространяем результаты теоремы 1 на разностную схему. Следующие результаты основаны на тех же оценках, что и в предыдущем разделе и являются небольшим расширением доказательства, представленного в ([2]- [3]). Как видно из предыдущего доказательства в теоремы 1, можно выбрать $\varepsilon = \alpha^2$ [4], и мы сделаем это непосредственно в следующем доказательстве. Это упрощает запись и снижает техническую сложность вычислений.

Как и в ([2], раздел 4.2), мы применим для численного расчета системы (7) противопоточную разностную схему. Для этого, покрываем пространственную область $[0,1]$ с помощью равномерной сетки $\Omega_h = \left\{x_i = ih,\ i = \overline{0,I}\right\}$, $\quad h$ – шаг по x. Интеграл $a(t)$ для каждого значения по $t^k \triangleq k\tau, \quad k \in \{1,2,\dots\}$ вычислим с помощью квадратурной формулы

$$a^k = h\sum_{i=0}^{I} u_i^k, \quad k \in \{1,2,\dots\}. \tag{22}$$

Здесь τ – шаг по времени. Далее определим дискретное значение μ^k

$$\mu^k \triangleq \mu(a^k) = \frac{P}{Q + a^k}, \quad P > 0,\ Q > 0. \tag{23}$$

Предположим, что выполнено условие Куранта-Фридрихса-Леви

$$0 < \lambda^k \triangleq \mu^k \frac{\tau}{h} \leqslant 1, \quad k \in \{1,2,\dots\}. \tag{24}$$

Для численного решения системы (7) предлагаем противопоточную разностную схему

$$\begin{cases} u_i^{k+1} = (1-\lambda^k)u_i^k + \lambda^k u_{i+1}^k, & i = \overline{0, I-1}; \quad k \in \{0,1,\dots\}; \\ u_I^{k+1} = r u_0^{k+1} + (1-r)\dfrac{u^*\mu(u^*)}{\mu^k} + r\delta^{k+1}, & k \in \{0,1,\dots\}; \\ u_i^0 = u_0(x_i), & i = \overline{0,I}. \end{cases} \tag{25}$$

Определение 4. Пусть $\Delta > 0$. Состояние равновесия u^* начально-краевой разностной задачи (25) является устойчивым в L^2 – норме относительно дискретных возмущений $\delta^k \leqslant \Delta$, $k \in \{1,2,\dots\}$, если существуют положительные вещественные константы $\zeta_1 > 0, \zeta_2 > 0$ и $\zeta_3 > 0$ такие, что для любого начального условия u_i^0, $i \in \{0,1,2,\dots,I\}$, решение u_i^k, $k \in \{1,2,\dots\}$, $i \in \{0,1,\dots,I-1\}$ начально-краевой разностной задачи (25) удовлетворяет

$$\left\|\boldsymbol{u}^k - u^*\boldsymbol{e}\right\|_{\ell^2} \leqslant \zeta_2 e^{-\zeta_1 t^k}\left\|\boldsymbol{u}^0\right\|_{\ell^2} + \zeta_3 \max_{0\leqslant s\leqslant k}\left(|\delta^s|\right), \quad k \in \{1,2,\dots\}, \tag{26}$$

где

$$\boldsymbol{u}^k = (u_0^k, u_1^k, \dots, u_{I-1}^k)^T, \quad \boldsymbol{e} = \Bigg(\underbrace{1,1,\dots,1}_{I}\Bigg)^T$$

и

$$\left\|\boldsymbol{u}^k - u^*\boldsymbol{e}\right\|_{\ell^2}^2 = h\sum_{i=0}^{I-1}(u_i^k - u^*)^2, \quad k \in \{0,1,\dots\}.$$

Определение 5. (Дискретная функция Ляпунова). Говорят, что функция $\mathbf{L}$: $\mathbb{R}^I \to \mathbb{R}_0^+$ является дискретной функцией Ляпунова для начально-краевой разностной задачи (25), если

(i) существуют положительные константы $\chi_1 > 0$ и $\chi_2 > 0$ такие, что для всех $k \in \{0, 1, \dots\}$:

$$\chi_1 \left\| \boldsymbol{u}^k - u^* \boldsymbol{e} \right\|_{\ell^2}^2 \leqslant \mathbf{L}(\boldsymbol{u}^k) \leqslant \chi_2 \left\| \boldsymbol{u}^k - u^* \boldsymbol{e} \right\|_{\ell^2}^2. \tag{27}$$

(ii) существуют положительные константы $\eta > 0$ и $\nu > 0$ такие, что для всех $k \in \{0, 1, \dots\}$:

$$\frac{\mathcal{L}(\boldsymbol{u}^{k+1}) - \mathcal{L}(\boldsymbol{u}^k)}{\Delta t} \leqslant -\eta \mathcal{L}(\boldsymbol{u}^k) + \nu (\delta^k)^2.$$

Для упрощения обозначений в дальнейшем мы будем определять последовательность дискретных значений $\mathcal{L}^k$ как

$$\mathcal{L}^k = \mathcal{L}(\boldsymbol{u}^k), \quad k \in \{0, 1, \dots\}$$

и где $\boldsymbol{u}^k$ — заданное решение начально-краевой разностной задачи (25).

3 Вычислительный эксперимент

Для проведения вычислительного эксперимента рассмотрим следующее гиперболическое уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \lambda \left(W(t) \right) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad t \in [0, +\infty), \; x \in [0, 1], \tag{28}$$

Здесь

$$W(t) = \int_0^1 u(t, x) dx, \quad t \in [0, +\infty). \tag{29}$$

Начальное условие:

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in [0, 1]. \tag{30}$$

И граничное условие при $x = 1$:

$$-u(t, 1) \lambda \left(W(t) \right) = V(t). \tag{31}$$

Здесь $V(t)$ – контроллер, который определяется из следующего уравнения:

$$V(t) + u^* \lambda(u^*) = -q \left(\left(u(t, 0) + \delta(t) \right) \lambda \left(W(t) \right) + u^* \lambda(u^*) \right), \tag{32}$$

где:

- $q \in [0, 1]$ – параметр обратной связи;
- $u^* \geqslant 0 \in \mathbb{R}$ – заданное состояние равновесия;
- $\lambda(s) = \frac{A}{B+s}, \quad s \in [0, +\infty), \quad A > 0, \; B > 0$ – характеристическая скорость;
- $\delta(t) \in \mathbb{R}$ – ограниченное возмущение измерений.

Когда значение $\lambda(W(t))$ равно $u(t, x) = u^*$, оно рассчитывается следующим образом:

$$\lambda(W(t))\big|_{u(t,x)=u^*} = \lambda \left(\int_0^1 u^* \, dx \right) = \lambda(u^*) = \frac{A}{B + u^*}. \tag{33}$$

Предположим, что $\delta(t) \in L^\infty(0, \infty)$, то есть

$$\|\delta(t)\|_{L^\infty(0,\infty)} = esssup_{t \in (0,\infty)} |\delta(t)| \equiv \inf \left\{ a \in \mathbb{R} : \mu \left(\{ t : |\delta(t)| > a \} \right) = 0 \right\} \leqslant D, \tag{34}$$

пусть неравенство будет уместным. $D > 0$.

Предположим, что это $u_0(x) \in L^2(0, 1)$.

4 Разностная схема

Отрезок $[0,1]$ разделим на J частей шагом Δx так, чтобы выполнялось $\Delta x \cdot J = 1$ равенства. Обозначим узлы сетки как

$$x_j = \left(j - \frac{1}{2}\right)\Delta x, \quad j = 1, \dots, J,$$

а границы области состоят из x_1 и x_J узлов соответственно. Далее мы дискретизируем $W(t)$ функцией следующим образом:

$$W^n = \Delta x \sum_{j=1}^{J} u_j^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{35}$$

здесь $u_j^n = u(t^n, x_j)$. Получаем дискретное значение λ^n в следующем виде:

$$\lambda^n = \lambda(W^n) = \frac{A}{B + W^n}, \quad A > 0,\ B > 0, \tag{36}$$

Здесь $t^n = n \cdot \Delta t, \quad n = 1, 2, 3, \dots$ определяет временные слои, а Δt – значение временного шага.

$$0 < r^n := \frac{\lambda^n \Delta t}{\Delta x} \leqslant 1, \quad \forall n \in \{0, 1, \dots\}, \tag{37}$$

Δt выбирается из условия Куранта–Фридрихса–Леви (37).

Поскольку неравенства $\lambda^n \leqslant \frac{A}{B}, \quad \forall n \in \{0, 1, \dots\}$ справедливы, Δt — это значение временного шага можно выбрать из неравенства:

$$\Delta t \leqslant \frac{B}{A}\Delta x. \tag{38}$$

Мы предполагаем,

$$u^* > 0. \tag{39}$$

Начальное условие выбираем таким образом:

$$\boldsymbol{u}^0 = \left(u_0^0, u_1^0, \dots, u_J^0\right)^T, \quad u_j^0 > 0, \quad j \in \{0, \dots, J\}. \tag{40}$$

Тогда в качестве разностной схемы получаем противоточную разностную схему:

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = (1 - r^n)u_j^n + r^n u_{j+1}^n, \quad j \in \{0, \dots, J-1\}, \quad n \in \{0, \dots, K\}, \\ u_J^{n+1} = q u_0^{n+1} + (1-k)\frac{u^*\lambda(u^*)}{\lambda^{n+1}} + q\delta^{n+1}, \quad n \in \{0, \dots, K\}. \end{cases} \tag{41}$$

Параметры выбираем следующим образом:

$$A = 1, \quad B = 1,$$

$$\delta(t) = 2.4 \times 10^{-3}\sin(t),$$

$$u^* = 0,$$

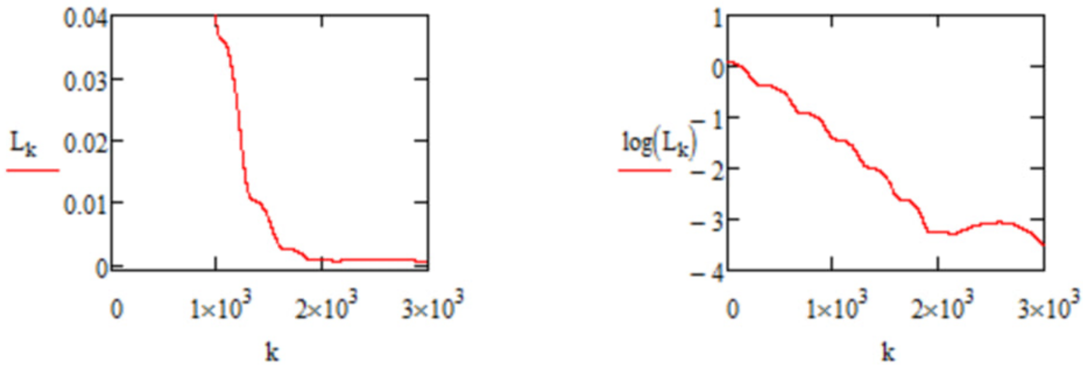
$$u_0(x) = 1 + \sin(2\pi x),$$

$$\Delta x = 10^{-3},$$

$$\frac{\lambda^n \Delta t}{\Delta x} \leqslant a < 1, \quad n \geqslant 0 \Rightarrow \Delta t = a \cdot \Delta x,$$

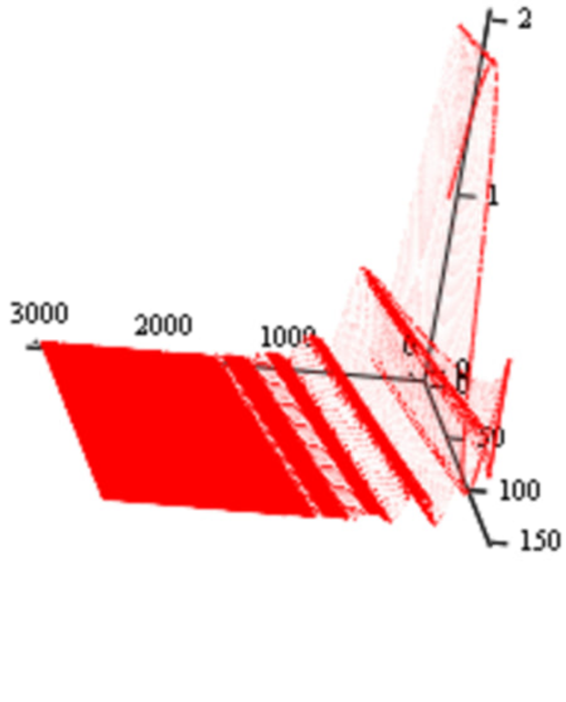
$$a = 0.5, \quad q = 0.3.$$

Если выполнить приведённые выше расчёты, то график нормы L_2 будет иметь следующий вид:



Поскольку график нормы стремится к нулю, можно сказать, что найденное численное решение приближается к точному решению.

График численного решения будет иметь следующий вид:



Найдено следующее численное решение:

U =

	146	147	148	149	150
2986	$-1.588\cdot 10^{-4}$	$-1.642\cdot 10^{-4}$	$-1.695\cdot 10^{-4}$	$-1.749\cdot 10^{-4}$	$-1.802\cdot 10^{-4}$
2987	$-1.615\cdot 10^{-4}$	$-1.669\cdot 10^{-4}$	$-1.722\cdot 10^{-4}$	$-1.775\cdot 10^{-4}$	$-1.829\cdot 10^{-4}$
2988	$-1.642\cdot 10^{-4}$	$-1.695\cdot 10^{-4}$	$-1.749\cdot 10^{-4}$	$-1.802\cdot 10^{-4}$	$-1.855\cdot 10^{-4}$
2989	$-1.669\cdot 10^{-4}$	$-1.722\cdot 10^{-4}$	$-1.775\cdot 10^{-4}$	$-1.829\cdot 10^{-4}$	$-1.882\cdot 10^{-4}$
2990	$-1.695\cdot 10^{-4}$	$-1.749\cdot 10^{-4}$	$-1.802\cdot 10^{-4}$	$-1.855\cdot 10^{-4}$	$-1.909\cdot 10^{-4}$
2991	$-1.722\cdot 10^{-4}$	$-1.775\cdot 10^{-4}$	$-1.829\cdot 10^{-4}$	$-1.882\cdot 10^{-4}$	$-1.935\cdot 10^{-4}$
2992	$-1.749\cdot 10^{-4}$	$-1.802\cdot 10^{-4}$	$-1.855\cdot 10^{-4}$	$-1.908\cdot 10^{-4}$	$-1.962\cdot 10^{-4}$
2993	$-1.775\cdot 10^{-4}$	$-1.829\cdot 10^{-4}$	$-1.882\cdot 10^{-4}$	$-1.935\cdot 10^{-4}$	$-1.988\cdot 10^{-4}$
2994	$-1.802\cdot 10^{-4}$	$-1.855\cdot 10^{-4}$	$-1.908\cdot 10^{-4}$	$-1.962\cdot 10^{-4}$	$-2.015\cdot 10^{-4}$
2995	$-1.829\cdot 10^{-4}$	$-1.882\cdot 10^{-4}$	$-1.935\cdot 10^{-4}$	$-1.988\cdot 10^{-4}$	$-2.041\cdot 10^{-4}$
2996	$-1.855\cdot 10^{-4}$	$-1.908\cdot 10^{-4}$	$-1.962\cdot 10^{-4}$	$-2.015\cdot 10^{-4}$	$-2.068\cdot 10^{-4}$
2997	$-1.882\cdot 10^{-4}$	$-1.935\cdot 10^{-4}$	$-1.988\cdot 10^{-4}$	$-2.041\cdot 10^{-4}$	$-2.094\cdot 10^{-4}$
2998	$-1.908\cdot 10^{-4}$	$-1.962\cdot 10^{-4}$	$-2.015\cdot 10^{-4}$	$-2.068\cdot 10^{-4}$	$-2.121\cdot 10^{-4}$
2999	$-1.935\cdot 10^{-4}$	$-1.988\cdot 10^{-4}$	$-2.041\cdot 10^{-4}$	$-2.094\cdot 10^{-4}$	$-2.147\cdot 10^{-4}$
3000	$-1.962\cdot 10^{-4}$	$-2.015\cdot 10^{-4}$	$-2.068\cdot 10^{-4}$	$-2.121\cdot 10^{-4}$	$-2.174\cdot 10^{-4}$
3001	$-1.988\cdot 10^{-4}$	$-2.041\cdot 10^{-4}$	$-2.094\cdot 10^{-4}$	$-2.147\cdot 10^{-4}$	...

Как видно из таблицы, найденное численное решение лежит вблизи нулевого стационарного решения.

5 Заключение

В данной работе исследована задача стабилизации состояния равновесия для гиперболического уравнения с отрицательной нелокальной характеристической скоростью и погрешностью измерения. Дана формулировка задачи смешанного управления. Дано определение слабого решения, экспоненциальной устойчивости равновесия смешанной задачи и функции Ляпунова. Представлена теорема об экспоненциальной устойчивости равновесия смешанной задачи. Определена устойчивость в L_2 – норме относительно дискретных возмущений состояния равновесия начально-краевой разностной задачи. В вычислительном эксперименте приведено гиперболическое уравнение с отрицательной характеристической скоростью и найдено его численное решение с использованием разработанной схемы. Приведен график L_2 – нормы численного решения, демонстрирующий его устойчивость.

Литература

[1] *Coron J.M., Wang Z.* Output Feedback Stabilization for a Scalar Conservation Law with a Nonlocal Velocity. SIAM J. Math. Anal. – 2013. – Vol. 45. – P. 2646–2665. doi:10.1137/120902203.

[2] *Chen W., Liu C., Wang Z.* Global Feedback Stabilization for a Class of Nonlocal Transport Equations: The Continuous and Discrete Case. SIAM J. Control Optim. – 2017. – Vol. 55. – P. 760–784. doi:10.1137/15m1048914.

[3] *Simone Göttlich, Michael Herty and Gediyon Weldegiyorgis.* Input-to-State Stability of a Scalar Conservation Law with Nonlocal Velocity. Axioms – 2021. – 12 p. https://doi.org/10.3390/axioms10010012.

[4] *Алоев Р.Д., Алимова В.Б* Исследование экспоненциальной устойчивости численного решения гиперболического уравнения с отрицательной нелокальной характеристической скорости и погрешностью измерения// Проблемы вычислительной и прикладной математики. – №2(47) – 2023. – С. 108–125.

[5] *Алоев Р.Д., Бердышев А., Алимова В.Б.* Исследование экспоненциальной устойчивости численного решения гиперболического уравнения с отрицательной нелокальной характеристической скорости и погрешностью измерения// Проблемы вычислительной и прикладной математики. – №1(55) – 2024. – С. 122–140.

[6] *Aloev R., Berdyshev A., Bliyeva D., Dadabayev S., Baishemirov Z.* Stability Analysis of an Upwind Difference Splitting Scheme for Two-Dimensional Saint–Venant Equations. Symmetry, 2022-09, journal-article DOI: 10.3390/sym14101986. Source: Multidisciplinary Digital Publishing Institute.

[7] *Aloev R.D., Dadabaev S.U.* Stability of the upwind difference splitting scheme for symmetric t-hyperbolic systems with constant coefficients. Results in Applied Mathematics. 2022 | journal-article. DOI: 10.1016/j.rinam.2022.10029 8. EID: 2-s2.0-85131461551. Part of ISSN: 25900374. Source:Rakhmatillo Aloev via Scopus – Elsevier.

[8] *Aloev R.D., Hudayberganov M.U.* A Discrete Analogue of the Lyapunov Function for Hyperbolic Systems. Journal of Mathematical Sciences (United States).2022, journal-article.DOI: 10.1007/s10958-022-06028-y. EID: 2-s2.0-85135683283. Part of ISSN: 15738795 10723374. Source:Rakhmatillo Aloev via Scopus – Elsevier.

[9] *Aloev R.D., Eshkuvatov Z.K., Khudoyberganov M.U., Nematova D.E.* The Difference Splitting Scheme for n-Dimensional Hyperbolic Systems. Malaysian Journal of Mathematical Sciences. 2022 | journal-article. EID: 2-s2.0-85130020938. Part of ISSN: 18238343. Source:Rakhmatillo Aloev via Scopus – Elsevier.

[10] *Aloev R., Berdyshev A., Akbarova A., Baishemirov Z.* Development of an algorithm for calculating stable solutions of the saint-venant equation using an upwind implicit difference scheme. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies 2021 | journal-article. DOI: 10.15587/1729-4061.2021.239148. EID: 2-s2.0-85116525899. Part of ISSN: 17294061 17293774. Source:Rakhmatillo AloevviaScopus – Elsevier.

[11] *Aloev R.D., Eshkuvatov Z.K., Khudoyberganov M.U., Nematova D.E.* The difference splitting scheme for hyperbolic systems with variable coefficients. Mathematics and Statistics 2019 | journal-article. DOI: 10.13189/ms.2019.070305. EID: 2-s2.0-85071017777. Source:Rakhmatillo AloevviaScopus – Elsevier.

[12] *Rakhmatillo A., Mirzoali K., Alexander B.* Construction and research of adequate computational models for quasilinear hyperbolic systems. Numerical Algebra, Control and Optimization 2018 | journal-article. DOI: 10.3934/naco.2018017. EID: 2-s2.0-85056814686. Source:Rakhmatillo Aloev via Scopus – Elsevier.

UDC 519.63

INVESTIGATION OF THE EXPONENTIAL STABILITY OF THE NUMERICAL SOLUTION OF A HYPERBOLIC SYSTEM WITH NEGATIVE NONLOCAL CHARACTERISTIC VELOCITIES

Aloev R.D., Alimova V.

*aloevr@mail.ru

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek,
100174, Universitet shaharchasi 4, Almazar district Tashkent, Uzbekistan.

In this work, the problem of stabilizing the equilibrium state for a hyperbolic equation with negative nonlocal characteristic velocity and measurement error is investigated. The formulation of the mixed control problem is presented. The weak solution, exponential stability of the equilibrium state of the mixed problem, and the definition of the Lyapunov function are given. The exponential stability of the equilibrium state of a mixed problem is given. The stability in the L_2 – norm is determined relative to the discrete perturbations of the equilibrium state of the initial-boundary difference problem. In a computational experiment, one hyperbolic equation with negative characteristic velocity was considered and its numerical solution was found using the constructed difference scheme. The graph of the norm L_2 of the numerical solution, demonstrating its stability, is shown.

Keywords: Hyperbolic equation, nonlocal characteristic velocity, stability, explicit difference scheme.

Citation: Aloev R.D., Alimova V. 2025. Investigation of the exponential stability of the numerical solution of a hyperbolic system with negative nonlocal characteristic velocities. *Problems of Computational and Applied Mathematics.* 4(68): 75-87.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.4_68.2025.05.

№ 4(68) 2025

ISSN 2181-8460

HISOBLASH VA AMALIY MATEMATIKA MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

RAQAMLI TEXNOLOGIYALAR VA
SUN'IY INTELLEKTNI RIVOJLANTIRISH
ILMIY-TADQIQOT INSTITUTI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 4(68) 2025

Журнал основан в 2015 году.
Издается 6 раз в год.

Учредитель:
Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта.

Главный редактор:
Равшанов Н.

Заместители главного редактора:
Арипов М.М., Шадиметов Х.М., Ахмедов Д.Д.

Ответственный секретарь:
Убайдуллаев М.Ш.

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при Администрации Президента Республики Узбекистан.
Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Адрес редакции:
100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.
Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.
Э-почта: `journals@airi.uz`.
Веб-сайт: `https://journals.airi.uz`.

Дизайн и вёрстка:
Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.
Подписано в печать 29.08.2025 г.
Формат 60x84 1/8. Заказ №6. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 4(68) 2025

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:
Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.
The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Address:
100125, Tashkent, Buz-2, 17A.
Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.
E-mail: journals@airi.uz.
Web-site: https://journals.airi.uz.

Layout design:
Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.
Signed for print 29.08.2025
Format 60x84 1/8. Order No. 6. Print run of 100 copies.

Содержание

Contents