

УДК 517.957

ПОСТРОЕНИЕ АВТОМОДЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ПРЕДСТАВЛЯЮЩИХ ЗАДАЧИ ВЗАИМНОЙ ДИФФУЗИИ.

Муминов С.Ю.

sokhibjan.muminov@mamunedu.uz

Университет Мамуна, 220900, Узбекистан, Хива, ул. Бол-хавуз, 2.

В статье рассматривается задача построения автомодельных решений системы нелинейных дифференциальных уравнений, моделирующих процессы взаимной диффузии в многокомпонентных средах. Проведён анализ математической модели, учитывающей сложные взаимодействия компонентов и нелинейный характер процессов переноса. Найдены приближённые решения системы, позволяющие описать поведение концентрационных профилей в различных режимах. Получены асимптотические представления решений для регулярных, неограниченных и ограниченных случаев, а также исследовано поведение двустороннего линейного стационарного уравнения, возникающего на промежуточных этапах анализа. Результаты представляют интерес для теории диффузии и прикладных задач математического моделирования сложных физических процессов.

Ключевые слова: взаимная диффузия, автомодельные решения, нелинейные дифференциальные уравнения, приближённое решение, асимптотический анализ, многокомпонентные среды, масштабная инвариантность, стационарное уравнение, математическое моделирование, диффузионные процессы.

Цитирование: *Муминов С.Ю.* Построение автомодельного решения системы нелинейных дифференциальных уравнений, представляющих задачи взаимной диффузии. // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2025. – № 4(68). – С. 56-64.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.4_68.2025.12.

1 Введение

Исследование реальных физических процессов часто сводится к анализу сложных классов нелинейных дифференциальных уравнений и их систем, в которых искомая функция и её производные входят в степенной или более сложной нелинейной форме. Подобные нелинейности широко распространены и естественным образом возникают в различных моделях, описывающих процессы в биологических популяциях, механизмы реакционно-диффузионных систем, а также взаимную диффузию в многокомпонентных средах [1–5].

Особую сложность представляет решение нелинейных краевых задач, поскольку аналитические методы зачастую оказываются неприменимыми, а нахождение новых качественных свойств решений требует глубокого теоретического анализа и значительных вычислительных усилий. Во многих фундаментальных трудах, выполненных А.А. Самарским, В.А. Галактионовым, А.С. Калашниковым, Л.К. Мартинсоном, Р. Кершнером, Г.И. Баренблаттом, Б.Ф. Кнерром, Чен Синфу, Ю.В. Ци, Дж.Ш. Го, И. Комбе, Т. Кусано, Т. Танигава, С.Н. Димовой, М.М. Ариповым, А.Т. Хайдаровым, Ш.А. Садуллаевой и другими исследователями было убедительно показано,

что особое место в решении подобных задач занимают автомодельные решения, возникающие при определённых значениях параметров. Именно автомодельный подход позволяет выделить ключевые особенности динамики исследуемых процессов и существенно упростить математический анализ сложных моделей. В связи с этим в последние десятилетия всё большее внимание уделяется изучению нелинейных краевых задач параболического типа, которые описывают широкий спектр физических, химических и биологических явлений. Наибольший интерес вызывают подходы, основанные на использовании автомодельных и приближённо-автомодельных переменных, позволяющие перейти от многопараметрических зависимостей к компактным обобщённым решениям с ярко выраженными масштабными свойствами [6–16].

В предыдущих исследованиях автора был проведён всесторонний анализ задач, связанных с построением автомодельных решений систем нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих процессы взаимной диффузии. В рамках этих работ были получены приближённые решения и установлены асимптотические поведения для регулярных, неограниченных и ограниченных решений двустороннего линейного стационарного уравнения. Особое внимание уделялось математическому обоснованию условий существования автомодельных решений и их физической интерпретации в контексте многокомпонентной диффузии. Полученные результаты подтвердили эффективность применяемого подхода и обозначили направления для дальнейшего углублённого анализа рассматриваемых моделей [17].

В продолжение данной линии исследований, в работе [18] был проведён качественный анализ математической модели нелинейных процессов перекрёстной диффузии. Авторами были подробно изучены свойства решений, включая существование, единственность и устойчивость, а также проанализировано влияние нелинейных эффектов на поведение системы. Особое внимание уделено разработке методов, позволяющих учитывать сложные взаимодействия между компонентами среды, что существенно повышает точность описания реальных физических процессов. Результаты исследования имеют важное значение для дальнейшего развития теории многокомпонентной диффузии и расширяют прикладные возможности математического моделирования сложных нелинейных процессов.

Настоящая работа направлена на развитие и применение подобных методов для анализа сложных систем взаимной диффузии, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями с целью получения качественных и количественных характеристик поведения рассматриваемых моделей.

2 Методы и модели.

Рассмотрим задачу, моделирующую процесс взаимной диффузии в области $\Omega = \{(x, t) : -\infty < x < +\infty, 0 < t < T, T > 0\}$ ограниченной по пространственным переменным.

Для анализа и получения качественного описания динамики системы взаимной диффузии рассмотрим следующую модель, представляющую собой систему квазилинейных параболических уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(v^{\sigma_1} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - v^{\beta_1} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{P_1}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u^{\sigma_2} \frac{\partial v}{\partial x} \right) - u^{\beta_2} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^{P_2}, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), \\ v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in R, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} u(0, t) &= u_1(t), \\ v(0, t) &= v_1(t), \\ u(1, t) &= u_2(t), \\ v(1, t) &= v_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \beta_1, \beta_2, p_1, p_2$ – заданы действительные числа (параметры окружения и фронта). $u^{\sigma_1}, v^{\sigma_2}$ – коэффициенты пылевой (или солевой) и влагопроницаемости первой и второй сред соответственно и являются функциями изменения пыли (или соли) и влажности соответственно.

Первое уравнение (1) системы характеризует миграцию соли (или пыли) с учетом влажности, а второе уравнение характеризует изменение влажности с учетом миграции соли или пыли.

В дальнейшем будем рассматривать решение системы уравнений (1) в виде автомодельной функции, зависящей от специально введённой самоподобной переменной, что позволит упростить анализ и получить обобщённые свойства решений

$$u(t, x) = V_1(t) w_1(\tau, x), \quad (4)$$

$$v(t, x) = V_2(t) w_2(\tau, x), \quad (5)$$

где $\tau(t)$ также является функцией времени.

Будем предполагать, что функции $V_1(t)$ и $V_2(t)$ имеют вид

$$V_1(t) = (T + t)^{n_1}, \quad V_2(t) = (T + t)^{n_2}. \quad (6)$$

Будем считать, что функции $w_1(x, \tau)$ и $w_2(x, \tau)$ представимы в виде

$$w_1(x, \tau) = f_1(\xi), \quad w_2(x, \tau) = f_2(\xi),$$

где $\xi = \frac{x}{\tau^{\frac{1}{2}}}$, ξ – автомодельная переменная.

Подставляя уравнения (6) в систему (1), сделаем замены и получаем следующую систему

$$\begin{cases} 2(n_2\beta_1 + n_1p_1 - n_1\sigma_1 - n_1) = (p_1 - 2)(n_1\sigma_1 + 1), \\ 2(n_1\beta_2 + n_2p_2 - n_2\sigma_2 - n_2) = (p_2 - 2)(n_2\sigma_2 + 1). \end{cases}$$

Откуда следует, что

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{2(p_1 - 2)(p_2 - 1) - (p_2 - 2)(2\beta_1 - p_1\sigma_1)}{4(p_1 - 1)(p_2 - 1) - (2\beta_1 - p_1\sigma_1)(2\beta_2 - p_2\sigma_2)}, \\ n_2 &= \frac{2(p_1 - 1)(p_2 - 2) - (p_1 - 2)(2\beta_2 - p_2\sigma_2)}{4(p_1 - 1)(p_2 - 1) - (2\beta_1 - p_1\sigma_1)(2\beta_2 - p_2\sigma_2)}. \end{aligned}$$

Теперь система (1) представим в следующем виде:

$$\begin{cases} -\frac{\xi}{2} \frac{df_1}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} (f_2^{\sigma_1} \frac{df_1}{d\xi}) - (n_2\sigma_1 + 1)^{\frac{p_1-2}{2}} \cdot f_2^{\beta_1} \left| \frac{df_1}{d\xi} \right|^{p_1} - \frac{n_1}{n_2\sigma_1 + 1} \cdot f_1, \\ -\frac{\xi}{2} \frac{df_2}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} (f_1^{\sigma_2} \frac{df_2}{d\xi}) - (n_1\sigma_2 + 1)^{\frac{p_2-2}{2}} \cdot f_1^{\beta_2} \left| \frac{df_2}{d\xi} \right|^{p_2} - \frac{n_2}{n_1\sigma_2 + 1} \cdot f_2. \end{cases} \quad (7)$$

Функции f_1 и f_2 в системе (7) выбираем в виде

$$\begin{aligned} f_1 &= (a - \xi)^{\gamma_1}, \\ f_2 &= (a - \xi)^{\gamma_2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Параметры системы (7) должны удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{cases} \gamma_1(\sigma_1\gamma_1 + \gamma_1 - 1) = (n_1\sigma_1 + 1)^{\frac{p_1-2}{2}} \cdot |\gamma_1|^{p_1}, \\ \gamma_2(\sigma_2\gamma_2 + \gamma_2 - 1) = (n_2\sigma_2 + 1)^{\frac{p_2-2}{2}} \cdot |\gamma_1|^{p_1}. \end{cases} \quad (9)$$

$$(\sigma_i\gamma_i + \gamma_i - 1) > 0, \quad i = \overline{1, 2}.$$

Система (9) представима в виде

$$\begin{cases} \gamma_1(\sigma_1 + 1 - p_1) - \beta_1\gamma_2 = 2 - p_1, \\ \gamma_2(\sigma_2 + 1 - p_2) - \beta_2\gamma_1 = 2 - p_2. \end{cases}$$

Решая систему уравнений относительно γ_1 и γ_2

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{(\delta_2 - p_2 + 1)(2 - p_1) + \beta_1(2 - p_2)}{(\delta_1 - p_1 + 1)(\delta_2 - p_2 + 1) - \beta_1\beta_2}, \\ \gamma_2 &= \frac{(\delta_1 - p_1 + 1)(2 - p_2) + \beta_2(2 - p_1)}{(\delta_1 - p_1 + 1)(\delta_2 - p_2 + 1) - \beta_1\beta_2}, \end{aligned}$$

Для верхней оценки (7) справедлива следующая теорема.

Теорема Пусть $\sigma_1 \geq 0$; $\sigma_2 \geq 0$;

$$a^{\frac{\beta_1}{\sigma_2} + \frac{(1-\sigma_1)p_1-1}{\sigma_1} + \frac{p_1}{2}} \geq \frac{(\frac{n_1}{n_1\sigma_1+1} + \frac{1}{2})}{(n_1\sigma_1 + 1)^{\frac{p_1-1}{2}}} \quad \text{и} \quad a^{\frac{\beta_2}{\sigma_1} + \frac{(1-\sigma_2)p_2-1}{\sigma_2} + \frac{p_2}{2}} \geq \frac{(\frac{n_2}{n_2\sigma_2+1} + \frac{1}{2})}{(n_2\sigma_2 + 1)^{\frac{p_2-1}{2}}},$$

$$u(t, 0) \leq u_+(t, 0); \quad v(t, 0) \leq v_+(t, 0) \quad x \in R.$$

Тогда существует глобальное решение задач (1)-(3), и справедлива следующая оценка

$$\begin{aligned} u(x, t) &\leq u_+(x, t) = (T + t)^{n_1} f_1(\xi), \\ v(x, t) &\leq v_+(x, t) = (T + t)^{n_2} f_2(\xi). \end{aligned}$$

Таким образом, получено, что автомодельное решение для системы (1) имеет вид:

$$\begin{cases} u(x, t) = (T + t)^{n_1} \cdot f_1(\xi) = (T + t)^{n_1} \cdot (a - \xi)^{\gamma_1}, \\ v(x, t) = (T + t)^{n_2} \cdot f_2(\xi) = (T + t)^{n_2} \cdot (a - \xi)^{\gamma_2}. \end{cases} \quad (10)$$

3 Результаты.

Используя автомодельные решения (10) системы (1) – (3), метод итерации или прогонки были найдены численные решения, графики которых приведены ниже. (Представленные графики имеют горизонтальную ось, представляющую значения переменной x , и вертикальную ось, предназначенную для представления значений функций u и v .)

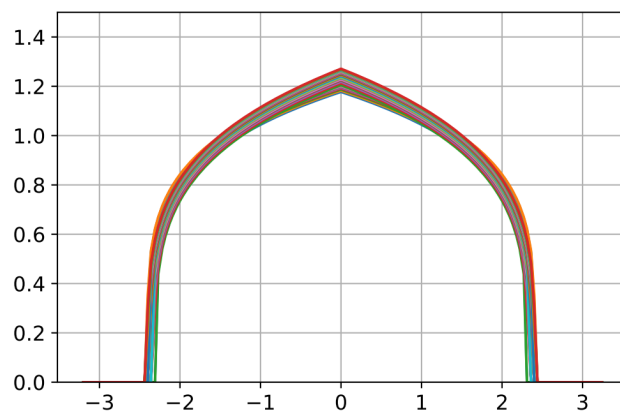


Рис. 1 Графическое представление кросс-диффузионных процессов при заданных значениях параметров $\sigma_1 = 2.25$, $\sigma_2 = 1.1$, $\beta_1 = 1.4$, $\beta_2 = 1.19$, $p_1 = 2$, $p_2 = 2.3$, $a = 2.35$

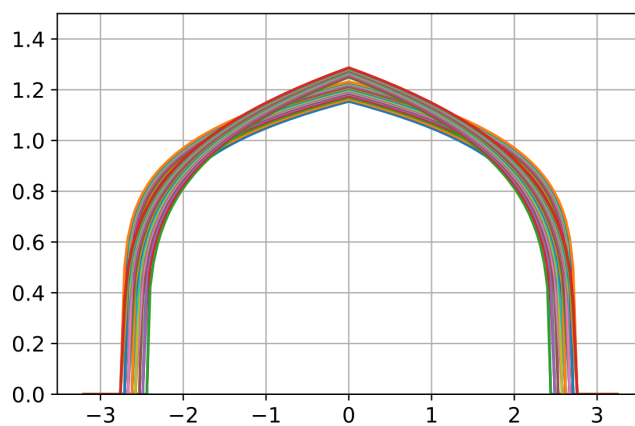


Рис. 2 Графическое представление кросс-диффузионных процессов при заданных значениях параметров $\sigma_1 = 4$, $\sigma_2 = 6$, $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 2$, $p_1 = 2.25$, $p_2 = 2.15$, $a = 2.57$

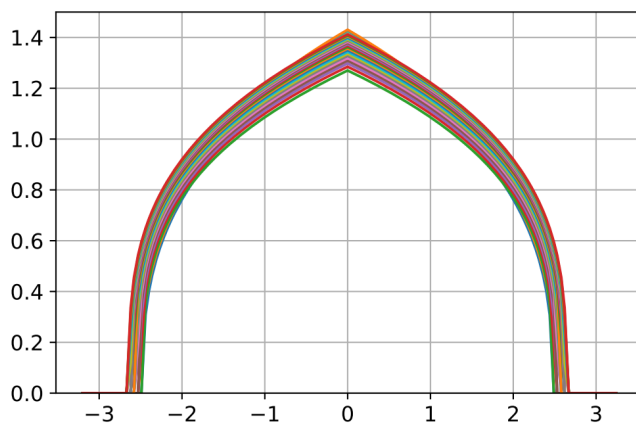


Рис. 3 Графическое представление кросс-диффузионных процессов при заданных значениях параметров $\sigma_1 = 2.75$, $\sigma_2 = 2.1$, $\beta_1 = 2.36$, $\beta_2 = 2.09$, $p_1 = 2.15$, $p_2 = 2.58$, $a = 2.55$

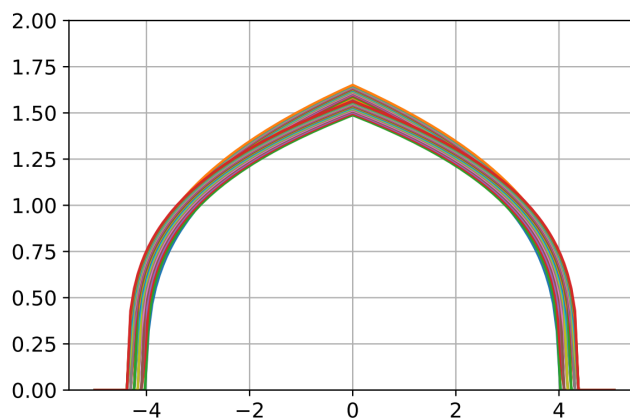


Рис. 4 Графическое представление кросс-диффузионных процессов при заданных значениях параметров $\sigma_1 = 1.78$, $\sigma_2 = 1.96$, $\beta_1 = 1.36$, $\beta_2 = 1.23$, $p_1 = 2.21$, $p_2 = 2.18$, $a = 4.15$

На представленных графиках показаны численные профили автомодельных решений системы нелинейных уравнений взаимной диффузии при различных значениях параметров модели. Каждый график отражает характер распространения концентрации компонентов в пространстве и демонстрирует типичное поведение решений с эффектом компактной поддержки.

Особенностью полученных профилей является куполообразная форма с чётко выраженным максимумом в центре и резким спадом до нуля на границах области распространения. Причём видно, что при увеличении нелинейных параметров модели или изменении начальных условий изменяется ширина и высота профиля:

На отдельных графиках фронты остаются практически совпадающими — это говорит о слабом влиянии параметров на форму решения.

В других случаях наблюдается более широкая зона распространения и более выраженное расслоение разноцветных линий, что свидетельствует об усилении эффекта диффузии и различии между временными срезами.

Такое характерное поведение численных решений согласуется с выводами, представленными в научной работе [18], где подчёркивается важность влияния параметров степени нелинейности, а также начальных и граничных условий на формирование пространственной структуры автомодельных профилей. В частности, показано, что увеличение коэффициентов при нелинейных членах приводит к более выраженной локализации процесса и росту максимального значения концентрации в центральной части профиля. Это сопровождается не только увеличением высоты центрального пика, но и расширением области пространственной поддержки, в пределах которой сосредоточено основное изменение концентрации. Таким образом, параметры модели напрямую влияют на ширину и форму компактной зоны распространения, определяя характер и интенсивность нелинейной диффузии в рассматриваемой системе.

Полученные графики наглядно иллюстрируют зависимость структуры решения от параметров задачи. Чем сильнее нелинейность модели, тем отчётливее проявляется локализация процесса и тем ярче выражены различия между временными срезами. Это подчёркивает важность учёта нелинейных эффектов в задачах моделирования сложных диффузионных процессов, особенно в тех случаях, когда требуется анализ локальных накоплений вещества или энергии.

В результате численных экспериментов подтверждено, что система обладает богатой динамикой и демонстрирует ключевые свойства нелинейной взаимной диффузии – ограниченность зоны распространения, наличие компактной поддержки и зависимость профиля от параметров модели.

4 Заключение

В настоящей работе проведено построение автомодельного решения системы нелинейных дифференциальных уравнений, моделирующих процессы взаимной диффузии с учётом пространственной переменной и нелинейных эффектов. Рассматриваемая система отражает важные физические процессы, встречающиеся в различных приложениях, включая фильтрацию в пористых средах, тепломассоперенос в многокомпонентных смесях, моделирование плазменных и гидродинамических систем.

Особое внимание уделено построению и обоснованию метода автомодельного подхода, позволяющего существенно упростить сложные краевые и начальные задачи для уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Разработанный метод позволил перейти от исходной системы к обыкновенным дифференциальным уравнениям и провести детальный асимптотический анализ поведения решений. В результате получены асимптотики регулярных, конечных и неограниченных решений, описывающие пространственную локализацию процессов и выявляющие эффект конечной скорости распространения волн в среде.

Численные расчёты подтвердили наличие компактной поддержки решений, что подчёркивает физический смысл ограниченности зоны влияния нелинейной диффузии. Это особенно важно для приложений, где необходимо учитывать локальные накопления вещества или энергии, а также для моделирования процессов с резкими фронтами и ограниченной зоной воздействия.

Полученные результаты обладают высокой практической значимостью и могут быть использованы для разработки эффективных численных методов решения задач нелинейной диффузии. Предложенный подход даёт возможность итеративно уточнять начальное приближение и строить численные схемы с контролем точности и устойчивости расчётов.

Кроме того, методика применима при исследовании широкого класса физических процессов, включая задачи теплопроводности в неоднородных средах, процессы загрязнения и самоочистки природных объектов, распространение примесей в атмосфере и гидросфере, а также в задачах биофизики и медицинской физики, связанных с моделированием переноса веществ в био-логических тканях.

Таким образом, разработанный и реализованный в данной работе подход к построению и анализу автомодельных решений открывает новые возможности для качественного и количественного описания сложных нелинейных процессов взаимной диффузии и может служить основой для дальнейших исследований в данной области.

Литература

- [1] Самарский А.А. Теория разностных схем // Москва: Наука, – 1977. – 656 с.
- [2] Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений // Москва: Наука, – 1987. – 480 с.
- [3] Samarsky A.A., Mikhailov A.P. Mathematical modeling // Moscow: Pedagogika, – 1998. – 420 p.

- [4] *Арипов М.М.* Методы эталонных уравнений для решения нелинейных краевых задач // Ташкент: Фан, – 1988. – 136 с.
- [5] *Арипов М.М., Садуллаева Ш.А.* Компьютерное моделирование нелинейных диффузионных процессов // Ташкент: Университет, – 2020. – 656 с.
- [6] *Aripov M.* The Fujita and Secondary Type Critical Exponents in Nonlinear Parabolic Equations and Systems // Differential Equations and Dynamical Systems. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, – 2017. – Vol. 268. doi: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-030-01476-6_2.
- [7] *Арипов М.М., Мухамедиева Д.К.* Кросс-диффузионные модели конвективного переноса с двойной нелинейностью // Проблемы вычислительной и прикладной математики, – 2015. – No 1. – С. 5–9.
- [8] *Aripov M.M., Matyakubov A.S., Imomnazarov B.K.* The cauchy problem for a nonlinear degenerate parabolic system in non-divergence form // Mathematical Notes of NEFU, – 2020. – No 27(3). – P. 27–38.
- [9] *Aripov M.M., Matyakubov A.S., Khasanov J.O., Bobokandov M.M.*, On Some Properties of the Blow-Up Solutions of a Nonlinear Parabolic System Non-divergent Form with Cross-Diffusion // Journal of Physics: Conference Series, – 2021. – No 2131(3).
- [10] *Matyakubov A., Raupov D.* TOn Some Properties of the Blow-Up Solutions of a Nonlinear Parabolic System Non-divergent Form with Cross-Diffusion // Lecture Notes in Civil Engineering, – 2022. – No 180. – P. 289–301.
- [11] *Aripov M.M., Raimbekov J.R.* The Critical Curves of a Doubly Nonlinear Parabolic Equation in Non-divergence form with a Source and a Nonlinear Boundary Flux // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2019, – 2019. – No 12(1). – P. 112–124. doi: <http://dx.doi.org/10.17516/1997-1397-2019-12-1-112-124>.
- [12] *Aripov M., Mukimov A., Sayfullayeva M.* To asymptotic of the solution of the heat conduction problem with double nonlinearity, variable density, absorption at a critical parameter // International journal of innovative technology and exploring engineering, – 2019. – Vol. 9. – Issue 1. – P. 3407–3412.
- [13] *Aripov M., Mukimov A., Mirzayev B.* To Asymptotic of the Solution of the Heat Conduction Problem with Double Nonlinearity with Absorption at a Critical Parameter // Mathematics and Statistics, – 2019. – 7(5). – P. 205–217. doi: <http://dx.doi.org/10.13189/ms.2019.070507>.
- [14] *Muhamediyeva D.K., Nurumova A.Y., Muminov S.Y.* Cauchy Problem and Boundary-Value Problems for Multicomponent Cross-Diffusion Systems // Tashkent: International Conference on Information Science and Communications Technologies. – 2021. doi: <http://dx.doi.org/10.1109/ICISCT52966.2021.9670380>.
- [15] *Muhamediyeva D.K., Nurumova A.Y., Muminov S.Y.* Numerical modeling of cross-diffusion processes // Tashkent: V International Scientific Conference “Construction Mechanics, Hydraulics and Water Resources Engineering” – 2023. doi: <http://dx.doi.org/110.1051/e3sconf/202340105060>.
- [16] *Muhamediyeva D.K., Muminov S.Y., Shaazizova M.E., Khidirova Ch., Bahromova Yu.* Limited different schemes for mutual diffusion problems // Tashkent: V International Scientific Conference “Construction Mechanics, Hydraulics and Water Resources Engineering”. – 2023. doi: <http://dx.doi.org/110.1051/e3sconf/202340105057>.
- [17] *Муминов С.Ю.* Автомодельные решение системы нелинейных дифференциальных уравнений кросс-диффузии // Проблемы вычислительной и прикладной математики, – 2023. – No 4(51). – С. 53–58.

- [18] *Muminov S., Agarwal P., Muhamediyeva D.* Qualitative properties of the mathematical model of nonlinear cross-diffusion processes // *Nanosystems: Phys. Chem. Math.* – 2024. – 15(6). – P. 742–748. doi: <http://dx.doi.org/10.17586/2220-8054-2024-15-6-742-748>.

UDC 517.957

CONSTRUCTION OF A SELF-SIMILAR SOLUTION TO MUTUAL DIFFUSION PROBLEMS.

Muminov S.Y.

`sokhibjan.muminov@mamunedu.uz`

Mamun university, 2, Bolkhovuz street, Khiva, 220900 Uzbekistan.

The article considers the problem of constructing self-similar solutions of a system of nonlinear differential equations modeling mutual diffusion processes in multicomponent media. An analysis of a mathematical model taking into account complex interactions of components and the nonlinear nature of transfer processes is carried out. Approximate solutions of the system are found, allowing one to describe the behavior of concentration profiles in various modes. Asymptotic representations of solutions for regular, unlimited and limited cases are obtained, and the behavior of a two-sided linear stationary equation arising at intermediate stages of analysis is studied. The results are of interest for diffusion theory and applied problems of mathematical modeling of complex physical processes.

Keywords: mutual diffusion, self-similar solutions, nonlinear differential equations, approximate solution, asymptotic analysis, multicomponent media, scale invariance, stationary equation, mathematical modeling, diffusion processes.

Citation: Muminov S.Y. 2025. Construction of a self-similar solution to mutual diffusion problems.. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 4(68): 56-64.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.4_68.2025.12.

HISOBLASH VA AMALIY MATEMATIKA MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
PROBLEMS OF COMPUTATIONAL
AND APPLIED MATHEMATICS



ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 4(68) 2025

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Арипов М.М., Шадиметов Х.М., Ахмедов Д.Д.

Ответственный секретарь:

Убайдуллаев М.Ш.

Редакционный совет:

Азамов А.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Арушанов М.Л.,
Бурнашев В.Ф., Джумаёзов У.З., Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия),
Игнатъев Н.А., Ильин В.П. (Россия), Иманкулов Т.С. (Казахстан),
Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия), Карачик В.В. (Россия),
Курбонов Н.М., Маматов Н.С., Мирзаев Н.М., Мухамадиев А.Ш., Назирова Э.Ш.,
Нормуродов Ч.Б., Нуралиев Ф.М., Опанасенко В.Н. (Украина),
Расулмухамедов М.М., Расулов А.С., Садуллаева Ш.А.,
Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А., Хамдамов Р.Х.,
Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Чье Ен Ун (Россия), Шабозов М.Ш. (Таджикистан),
Dimov I. (Болгария), Li Y. (США), Mascagni M. (США), Min A. (Германия),
Singh D. (Южная Корея), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

Дизайн и вёрстка:

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 29.08.2025 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №6. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 4(68) 2025

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

Editor-in-Chief:

Ravshanov N.

Deputy Editors:

Aripov M.M., Shadimetov Kh.M., Akhmedov D.D.

Executive Secretary:

Ubaydullaev M.Sh.

Editorial Council:

Azamov A.A., Aloev R.D., Amirgaliev E.N. (Kazakhstan), Arushanov M.L.,
Burnashev V.F., Djumayozov U.Z., Zagrebina S.A. (Russia), Zadorin A.I. (Russia),
Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia), Imankulov T.S. (Kazakhstan), Ismagilov I.I. (Russia),
Kabanikhin S.I. (Russia), Karachik V.V. (Russia), Kurbonov N.M., Mamatov N.S.,
Mirzaev N.M., Mukhamadiev A.Sh., Nazirova E.Sh., Normurodov Ch.B., Nuraliev F.M.,
Opanasenko V.N. (Ukraine), Rasulov A.S., Sadullaeva Sh.A., Starovoitov V.V. (Belarus),
Khayotov A.R., Khaldjigitov A., Khamdamov R.Kh., Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh.,
Chye En Un (Russia), Shabozov M.Sh. (Tajikistan), Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA),
Mascagni M. (USA), Min A. (Germany), Singh D. (South Korea), Singh M. (South
Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the
Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.

The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.

Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

Address:

100125, Tashkent, Buz-2, 17A.

Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

E-mail: journals@airi.uz.

Web-site: <https://journals.airi.uz>.

Layout design:

Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.

Signed for print 29.08.2025

Format 60x84 1/8. Order No. 6. Print run of 100 copies.

Содержание

<i>Халдусигитов А., Адамбаев У., Тилозов О., Рахмонова Р., Махмадиева М.</i> Сравнительный анализ численных методов решения задач теории упругости в напряжениях	8
<i>Нуралиев Ф.М., Тохиров Б.Н.</i> Комплексное математическое моделирование термо-электро-магнито-упругих процессов в анизотропных тонких пластинах сложной формы на основе ме- тода RFM	17
<i>Нормуродов Ч.Б., Зиякулова Ш.А.</i> Численное моделирование изгиба тонкой пластины с применением дискрет- ного варианта метода предварительного интегрирования	26
<i>Равшанов Н., Журабоева О., Боборахимов Б., Шарипов Х.</i> Моделирование распространения загрязняющих веществ в атмосфере с уче- том рельефа и метеорологических условий	38
<i>Саидов У., Жураев И., Туракулов Ж.</i> Моделирование процесса фильтрования малоконцентрированного раствора через пористую среду	47
<i>Муминов С.Ю.</i> Построение автомодельного решения системы нелинейных дифференциаль- ных уравнений, представляющих задачи взаимной диффузии.	56
<i>Ахмедов Д.М., Буваширов Д.С.</i> Оптимальная квадратурная формула для гиперсингулярных интегралов ти- па Адамара с высокой осцилляцией в пространстве Соболева	65
<i>Алоев Р.Д., Алимова В.</i> Исследование экспоненциальной устойчивости численного решения гипербо- лической системы с отрицательными нелокальными характеристическими скоростями	75
<i>Шадиметов Х.М., Нуралиев Ф.А., Едилбекова Р.М.</i> Система для нахождения оптимальных коэффициентов квадратурных фор- мул типа Эрмита с производными третьего порядка	88
<i>Нормуродов Ч.Б., Джураева Н.Т., Норматова М.М.</i> Исследование динамики производных дифференциального уравнения чет- вертого порядка с малым параметром при старшей производной	97
<i>Шадиметов Х.М., Нуралиев Ф.А., Миркомиллов Д.М.</i> Оптимальные квадратурные формулы для приближенного вычисления быст- роосциллирующих интегралов	110
<i>Игнатъев Н.А., Рамазонов Ш.Ш.</i> Отношение связанности в метрических алгоритмах классификации и анализ его свойств	122

Contents

<i>Khaldjigitov A., Adambaev U., Tilovov O., Rakhmonova R., Makhmadiygorova M.</i>	
Numerical solution of plane problems of the theory of elasticity directly in stresses	8
<i>Nuraliyev F.M., Tokhirov B.N.</i>	
Comprehensive mathematical modeling of thermo-electro-magneto-elastic processes in anisotropic thin plates of complex shape based on the RFM method	17
<i>Normurodov Ch.B., Ziyakulova Sh.A.</i>	
Numerical modeling of thin plate bending using a discrete version of the pre-integration method	26
<i>Ravshanov N., Juraboeva O., Boborakhimov B., Sharipov Kh.</i>	
Modeling the dispersion of pollutants in the atmosphere, accounting for terrain and meteorological conditions	38
<i>Saidov U., Juraev I., Turakulov J.</i>	
Modeling the process of filtering a low-concentration solution through a porous medium	47
<i>Muminov S.Y.</i>	
Construction of a self-similar solution to mutual diffusion problems.	56
<i>Akhmedov D.M., Buvashero D.S.</i>	
An optimal quadrature formula for Hadamard-type hypersingular integrals with high oscillation in the Sobolev space	65
<i>Aloev R.D., Alimova V.</i>	
Investigation of the exponential stability of the numerical solution of a hyperbolic system with negative nonlocal characteristic velocities	75
<i>Shadimetov Kh.M., Nuraliev F.A., Edilbekova R.M.</i>	
System for finding optimal coefficients of Hermite-type quadrature formulas with third-order derivatives	88
<i>Normurodov Ch.B., Juraeva N.T., Normatova M.M.</i>	
Study of the dynamics of derivatives of a fourth-order differential equation with a small parameter at the highest derivative	97
<i>Shadimetov X.M., Nuraliyev F.A., Mirkomilov D.M.</i>	
Optimal quadrature formulas for approximate calculation of fast oscillating integral	110
<i>Ignatiev N.A., Ramazonov Sh.Sh.</i>	
Relationship in metric classification algorithms and analysis of its properties	122