УДК 517.957

ПОСТРОЕНИЕ АВТОМОДЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ПРЕДСТАВЛЯЮЩИХ ЗАДАЧИ ВЗАИМНОЙ ДИФФУЗИИ.

Муминов С.Ю.
sokhibjan.muminov@mamunedu.uz
Университет Мамуна, 220900, Узбекистан, Хива, ул. Бол-хавуз, 2.

В статье рассматривается задача построения автомодельных решений системы нелинейных дифференциальных уравнений, моделирующих процессы взаимной диффузии в многокомпонентных средах. Проведён анализ математической модели, учитывающей сложные взаимодействия компонентов и нелинейный характер процессов переноса. Найдены приближённые решения системы, позволяющие описать поведение концентрационных профилей в различных режимах. Получены асимптотические представления решений для регулярных, неограниченных и ограниченных случаев, а также исследовано поведение двустороннего линейного стационарного уравнения, возникающего на промежуточных этапах анализа. Результаты представляют интерес для теории диффузии и прикладных задач математического моделирования сложных физических процессов.

Ключевые слова: взаимная диффузия, автомодельные решения, нелинейные дифференциальные уравнения, приближённое решение, асимптотический анализ, многокомпонентные среды, масштабная инвариантность, стационарное уравнение, математическое моделирование, диффузионные процессы.

Цитирование: *Муминов С.Ю.* Построение автомодельного решения системы нелинейных дифференциальных уравнений, представляющих задачи взаимной диффузии. // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2025. – № 4(68). – С. 56-64.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.4_68.2025.12.

1 Введение

Исследование реальных физических процессов часто сводится к анализу сложных классов нелинейных дифференциальных уравнений и их систем, в которых искомая функция и её производные входят в степенной или более сложной нелинейной форме. Подобные нелинейности широко распространены и естественным образом возникают в различных моделях, описывающих процессы в биологических популяциях, механизмы реакционно-диффузионных систем, а также взаимную диффузию в многокомпонентных средах [1–5].

Особую сложность представляет решение нелинейных краевых задач, поскольку аналитические методы зачастую оказываются неприменимыми, а нахождение новых качественных свойств решений требует глубокого теоретического анализа и значительных вычислительных усилий. Во многих фундаментальных трудах, выполненных А.А. Самарским, В.А. Галактионовым, А.С. Калашниковым, Л.К. Мартинсоном, Р. Кершнером, Г.И. Баренблаттом, Б.Ф. Кнерром, Чен Синфу, Ю.В. Ци, Дж.Ш. Го, И. Комбе, Т. Кусано, Т. Танигава, С.Н. Димовой, М.М. Ариповым, А.Т. Хайдаровым, Ш.А. Садуллаевой и другими исследователями было убедительно показано, что особое место в решении подобных задач занимают автомодельные решения, возникающие при определённых значениях параметров. Именно автомодельный подход позволяет выделить ключевые особенности динамики исследуемых процессов и существенно упростить математический анализ сложных моделей. В связи с этим в последние десятилетия всё большее внимание уделяется изучению нелинейных краевых задач параболического типа, которые описывают широкий спектр физических, химических и биологических явлений. Наибольший интерес вызывают подходы, основанные на использовании автомодельных и приближённо-автомодельных переменных, позволяющие перейти от многопараметрических зависимостей к компактным обобщённым решениям с ярко выраженными масштабными свойствами [6–16].

В предыдущих исследованиях автора был проведён всесторонний анализ задач, связанных с построением автомодельных решений систем нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих процессы взаимной диффузии. В рамках этих работ были получены приближённые решения и установлены асимптотические поведения для регулярных, неограниченных и ограниченных решений двустороннего линейного стационарного уравнения. Особое внимание уделялось математическому обоснованию условий существования автомодельных решений и их физической интерпретации в контексте многокомпонентной диффузии. Полученные результаты подтвердили эффективность применяемого подхода и обозначили направления для дальнейшего углублённого анализа рассматриваемых моделей [17].

В продолжение данной линии исследований, в работе [18] был проведён качественный анализ математической модели нелинейных процессов перекрёстной диффузии. Авторами были подробно изучены свойства решений, включая существование, единственность и устойчивость, а также проанализировано влияние нелинейных эффектов на поведение системы. Особое внимание уделено разработке методов, позволяющих учитывать сложные взаимодействия между компонентами среды, что существенно повышает точность описания реальных физических процессов. Результаты исследования имеют важное значение для дальнейшего развития теории многокомпонентной диффузии и расширяют прикладные возможности математического моделирования сложных нелинейных процессов.

Настоящая работа направлена на развитие и применение подобных методов для анализа сложных систем взаимной диффузии, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями с целью получения качественных и количественных характеристик поведения рассматриваемых моделей.

2 Методы и модели.

Рассмотрим задачу, моделирующую процесс взаимной диффузии в области $\Omega = \{(x,t) : -\propto < x < +\propto,\ 0 < t < T,\ T > 0\}$ ограниченной по пространственным переменным.

Для анализа и получения качественного описания динамики системы взаимной диффузии рассмотрим следующую модель, представляющую собой систему квазилинейных параболических уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(v^{\sigma_1}\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) - v^{\beta_1}\left|\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|^{P_1}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(u^{\sigma_2}\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) - u^{\beta_2}\left|\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|^{P_2}, \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} u\left(x,0\right)=u_0\left(x\right), \\ v\left(x,0\right)=v_0\left(x\right),\ x\in R, \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{gathered} u(0,t)=u_1(t), \\ v(0,t)=v_1(t), \\ u(1,t)=u_2(t), \\ v(1,t)=v_2(t),\ \ 0\leqslant t\leqslant T, \end{gathered} \tag{3}$$

где σ_1, σ_2, β_1, β_2, p_1, p_2 – заданы действительные числа (параметры окружения и фронта). u^{σ_1}, v^{σ_2} – коэффициенты пылевой (или солевой) и влагопроницаемости первой и второй сред соответственно и являются функциями изменения пыли (или соли) и влажности соответственно.

Первое уравнение (1) системы характеризует миграцию соли (или пыли) с учетом влажности, а второе уравнение характеризует изменение влажности с учетом миграции соли или пыли.

В дальнейшем будем рассматривать решение системы уравнений (1) в виде автомодельной функции, зависящей от специально введённой самоподобной переменной, что позволит упростить анализ и получить обобщённые свойства решений

$$u\left(t,x\right)=V_1\left(t\right)w_1\left(\tau,x\right), \tag{4}$$

$$v\left(t,x\right)=V_2\left(t\right)w_2\left(\tau,x\right), \tag{5}$$

где $\tau(t)$ также является функцией времени.

Будем предполагать, что функции $V_1\left(t\right)$ и $V_2\left(t\right)$ имеют вид

$$V_1(t)=(T+t)^{n_1}, \qquad V_2(t)\ \ =(T+t)^{n_2}. \tag{6}$$

Будем считать, что функции $w_1(x,\tau)$ и $w_2(x,\tau)$ представимы в виде

$$w_1(x,\tau)=f_1(\xi),\ w_2(x,\tau)=f_1(\xi),$$

где $\xi=\frac{x}{\tau^{\frac{1}{2}}}$, ξ – автомодельная переменная.

Подставляя уравнения (6) в систему (1), сделаем замены и получаем следующую систему

$$\begin{cases} 2(n_2\beta_1+n_1p_1-n_1\sigma_1-n_1)=(p_1-2)(n_1\sigma_1+1), \\ 2(n_1\beta_2+n_2p_2-n_2\sigma_2-n_2)=(p_2-2)(n_2\sigma_2+1). \end{cases}$$

Откуда следует, что

$$\begin{aligned} n_1&=\frac{2(p_1-2)(p_2-1)-(p_2-2)(2\beta_1-p_1\sigma_1)}{4(p_1-1)(p_2-1)-(2\beta_1-p_1\sigma_1)(2\beta_2-p_2\sigma_2)}, \\ n_2&=\frac{2(p_1-1)(p_2-2)-(p_1-2)(2\beta_2-p_2\sigma_2)}{4(p_1-1)(p_2-1)-(2\beta_1-p_1\sigma_1)(2\beta_2-p_2\sigma_2)}. \end{aligned}$$

Теперь система (1) представим в следующим виде:

$$\begin{cases} -\dfrac{\xi}{2}\dfrac{df_1}{d\xi}=\dfrac{d}{d\xi}({f_2}^{\sigma_1}\dfrac{df_1}{d\xi})-(n_2\sigma_1+1)^{\frac{p_1-2}{2}}\cdot {f_2}^{\beta_1}\left|\dfrac{df_1}{d\xi}\right|^{p_1}-\dfrac{n_1}{n_2\sigma_1+1}\cdot f_1, \\ -\dfrac{\xi}{2}\dfrac{df_2}{d\xi}=\dfrac{d}{d\xi}({f_1}^{\sigma_2}\dfrac{df_2}{d\xi})-(n_1\sigma_2+1)^{\frac{p_2-2}{2}}\cdot {f_1}^{\beta_2}\left|\dfrac{df_2}{d\xi}\right|^{p_2}-\dfrac{n_2}{n_1\sigma_2+1}\cdot f_2. \end{cases} \tag{7}$$

Функции f_1 и f_2 в системе (7) выбираем в виде

$$\begin{aligned} f_1 &= (a-\xi)^{\gamma_1}, \\ f_2 &= (a-\xi)^{\gamma_2}. \end{aligned} \tag{8}$$

Параметры системы (7) должны удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{cases} \gamma_1(\sigma_1\gamma_1+\gamma_1-1) = (n_1\sigma_1+1)^{\frac{p_1-2}{2}}\cdot|\gamma_1|^{p_1}. \\ \gamma_2(\sigma_2\gamma_2+\gamma_2-1) = (n_2\sigma_2+1)^{\frac{p_2-2}{2}}\cdot|\gamma_1|^{p_1}. \end{cases} \tag{9}$$

$$(\sigma_i\gamma_i+\gamma_i-1)>0, \quad i=\overline{1,2}.$$

Система (9) представима в виде

$$\begin{cases} \gamma_1(\sigma_1+1-p_1)-\beta_1\gamma_2 = 2-p_1, \\ \gamma_2(\sigma_2+1-p_2)-\beta_2\gamma_1 = 2-p_2. \end{cases}$$

Решая систему уравнений относительно γ_1 и γ_2

$$\gamma_1 = \frac{(\delta_2-p_2+1)(2-p_1)+\beta_1(2-p_2)}{(\delta_1-p_1+1)(\delta_2-p_2+1)-\beta_1\beta_2};$$
$$\gamma_2 = \frac{(\delta_1-p_1+1)(2-p_2)+\beta_2(2-p_1)}{(\delta_1-p_1+1)(\delta_2-p_2+1)-\beta_1\beta_2};$$

Для верхней оценки (7) справедлива следующая теорема.

Теорема Пусть $\sigma_1 \geqslant 0; \quad \sigma_2 \geqslant 0;$

$$a^{\frac{\beta_1}{\sigma_2}+\frac{(1-\sigma_1)p_1-1}{\sigma_1}+\frac{p_1}{2}} \geqslant \frac{\left(\frac{n_1}{n_1\sigma_1+1}+\frac{1}{2}\right)}{(n_1\sigma_1+1)^{\frac{p_1-1}{2}}} \quad \text{и} \quad a^{\frac{\beta_2}{\sigma_1}+\frac{(1-\sigma_2)p_2-1}{\sigma_2}+\frac{p_2}{2}} \geqslant \frac{\left(\frac{n_2}{n_2\sigma_2+1}+\frac{1}{2}\right)}{(n_2\sigma_2+1)^{\frac{p_2-1}{2}}},$$
$$u(t,0)\leqslant u_+(t,0); \quad v(t,0)\leqslant v_+(t,0) \qquad x\in R.$$

Тогда существует глобальное решение задач (1)-(3), и справедлива следующая оценка

$$\begin{aligned} u(x,t) &\leqslant u_+(x,t) = (T+t)^{n_1} f_1(\xi), \\ v(x,t) &\leqslant v_+(x,t) = (T+t)^{n_2} f_2(\xi). \end{aligned}$$

Таким образом, получено, что автомодельное решение для системы (1) имеет вид:

$$\begin{cases} u(x,t) = (T+t)^{n_1}\cdot f_1(\xi) = (T+t)^{n_1}\cdot(a-\xi)^{\gamma_1}, \\ v(x,t) = (T+t)^{n_2}\cdot f_2(\xi) = (T+t)^{n_2}\cdot(a-\xi)^{\gamma_2}. \end{cases} \tag{10}$$

3 Результаты.

Используя автомодельные решения (10) системы (1) – (3), метод итерации или прогонки были найдены численные решения, графики которых приведены ниже. (Представленные графики имеют горизонтальную ось, представляющую значения переменной x, и вертикальную ось, предназначенную для представления значений функций u и v.)

Рис. 1 Графическое представление кросс-диффузионных процессов при заданных значениях параметров $\sigma_1 = 2.25$, $\sigma_2 = 1.1$, $\beta_1 = 1.4$, $\beta_2 = 1.19$, $p_1 = 2$, $p_2 = 2.3$, $a = 2.35$

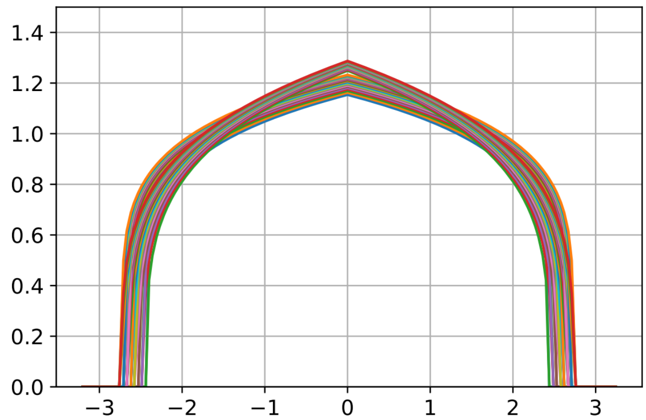

Рис. 2 Графическое представление кросс-диффузионных процессов при заданных значениях параметров $\sigma_1 = 4$, $\sigma_2 = 6$, $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 2$, $p_1 = 2.25$, $p_2 = 2.15$, $a = 2.57$

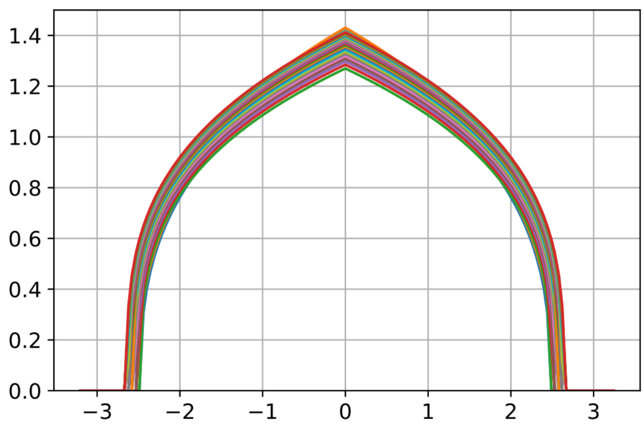

Рис. 3 Графическое представление кросс-диффузионных процессов при заданных значениях параметров $\sigma_1 = 2.75$, $\sigma_2 = 2.1$, $\beta_1 = 2.36$, $\beta_2 = 2.09$, $p_1 = 2.15$, $p_2 = 2.58$, $a = 2.55$

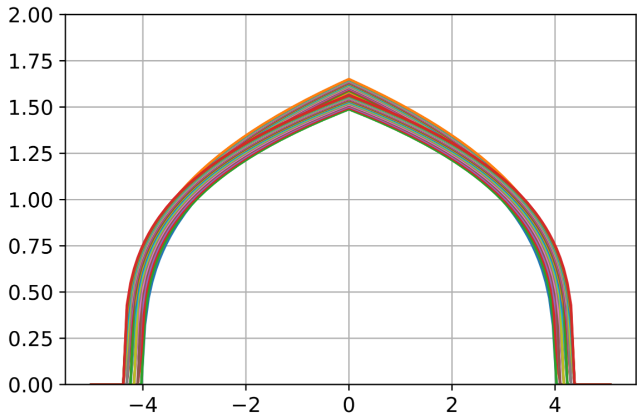

Рис. 4 Графическое представление кросс-диффузионных процессов при заданных значениях параметров $\sigma_1 = 1.78$, $\sigma_2 = 1.96$, $\beta_1 = 1.36$, $\beta_2 = 1.23$, $p_1 = 2.21$, $p_2 = 2.18$, $a = 4.15$

На представленных графиках показаны численные профили автомодельных решений системы нелинейных уравнений взаимной диффузии при различных значениях параметров модели. Каждый график отражает характер распространения концентрации компонентов в пространстве и демонстрирует типичное поведение решений с эффектом компактной поддержки.

Особенностью полученных профилей является куполообразная форма с чётко выраженным максимумом в центре и резким спадом до нуля на границах области распространения. Причём видно, что при увеличении нелинейных параметров модели или изменении начальных условий изменяется ширина и высота профиля:

На отдельных графиках фронты остаются практически совпадающими — это говорит о слабом влиянии параметров на форму решения.

В других случаях наблюдается более широкая зона распространения и более выраженное расслоение разноцветных линий, что свидетельствует об усилении эффекта диффузии и различии между временными срезами.

Такое характерное поведение численных решений согласуется с выводами, представленными в научной работе [18], где подчёркивается важность влияния параметров степени нелинейности, а также начальных и граничных условий на формирование пространственной структуры автомодельных профилей. В частности, показано, что увеличение коэффициентов при нелинейных членах приводит к более выраженной локализации процесса и росту максимального значения концентрации в центральной части профиля. Это сопровождается не только увеличением высоты центрального пика, но и расширением области пространственной поддержки, в пределах которой сосредоточено основное изменение концентрации. Таким образом, параметры модели напрямую влияют на ширину и форму компактной зоны распространения, определяя характер и интенсивность нелинейной диффузии в рассматривае-мой системе.

Полученные графики наглядно иллюстрируют зависимость структуры решения от параметров задачи. Чем сильнее нелинейность модели, тем отчётливее проявляется локализация процесса и тем ярче выражены различия между временными срезами. Это подчёркивает важность учёта нелинейных эффектов в задачах моделирования сложных диффузионных процессов, особенно в тех случаях, когда требуется анализ локальных накоплений вещества или энергии.

В результате численных экспериментов подтверждено, что система обладает богатой динамикой и демонстрирует ключевые свойства нелинейной взаимной диффузии – ограниченность зоны распространения, наличие компактной поддержки и зависимость профиля от параметров модели.

4 Заключение

В настоящей работе проведено построение автомодельного решения системы нелинейных дифференциальных уравнений, моделирующих процессы взаимной диффузии с учётом пространственной переменной и нелинейных эффектов. Рассматриваемая система отражает важные физические процессы, встречающиеся в различных приложениях, включая фильтрацию в пористых средах, тепломассоперенос в многокомпонентных смесях, моделирование плазменных и гидродинамических систем.

Особое внимание уделено построению и обоснованию метода автомо-дельного подхода, позволяющего существенно упростить сложные краевые и начальные задачи для уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Разработанный метод позволил перейти от исходной системы к обык-новенным дифференциальным уравнениям и провести детальный асимптотический анализ поведения решений. В результате получены асимптотики регулярных, конечных и неограниченных решений, описывающие пространственную локализацию процессов и выявляющие эффект конечной скорости распространения волн в среде.

Численные расчёты подтвердили наличие компактной поддержки решений, что подчёркивает физический смысл ограниченности зоны влияния нелинейной диффузии. Это особенно важно для приложений, где необходимо учитывать локальные накопления вещества или энергии, а также для моделирования процессов с резкими фронтами и ограниченной зоной воздействия.

Полученные результаты обладают высокой практической значимостью и могут быть использованы для разработки эффективных численных методов решения задач нелинейной диффузии. Предложенный подход даёт возможность итеративно уточнять начальное приближение и строить численные схемы с контролем точности и устойчивости расчётов.

Кроме того, методика применима при исследовании широкого класса физических процессов, включая задачи теплопроводности в неоднородных средах, процессы загрязнения и самоочистки природных объектов, распространение примесей в атмосфере и гидросфере, а также в задачах биофизики и медицинской физики, связанных с моделированием переноса веществ в био-логических тканях.

Таким образом, разработанный и реализованный в данной работе подход к построению и анализу автомодельных решений открывает новые возможности для качественного и количественного описания сложных нелинейных процессов взаимной диффузии и может служить основой для дальнейших исследований в данной области.

Литература

[1] *Самарский А.А* Теория разностных схем // Москва: Наука, – 1977. – 656 с.

[2] *Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений // Москва: Наука, – 1987. – 480 с.

[3] *Samarsky A.A., Mikhailov A.P* Mathematical modeling // Moscow: Pedagogika, – 1998. – 420 p.

[4] *Арипов М.М.* Методы эталонных уравнений для решения нелинейных краевых задач // Ташкент: Фан, – 1988. – 136 с.

[5] *Арипов М.М., Садуллаева Ш.А.* Компьютерное моделирование нелинейных диффузионных процессов // Ташкент: Университет, – 2020. – 656 с.

[6] *Aripov M.* The Fujita and Secondary Type Critical Exponents in Nonlinear Parabolic Equations and Systems // Differential Equations and Dynamical Systems. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, – 2017. – Vol. 268. doi: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-030-01476-6_2.

[7] *Арипов М.М., Мухамедиева Д.К.* Кросс-диффузионные модели конвективного переноса с двойной нелинейностью // Проблемы вычислительной и прикладной математики, – 2015. – No 1. – С. 5–9.

[8] *Aripov M.M.,Matyakubov A.S., Imomnazarov B.K.* The cauchy problem for a nonlinear degenerate parabolic system in non–divergence form // Mathematical Notes of NEFU, – 2020. – No 27(3). – P. 27–38.

[9] *Aripov M.M., Matyakubov A.S., Khasanov J.O., Bobokandov M.M.,* On Some Properties of the Blow-Up Solutions of a Nonlinear Parabolic System Non-divergent Form with Cross-Diffusion // Journal of Physics: Conference Series, – 2021. – No 2131(3).

[10] *Matyakubov A., Raupov D.* TOn Some Properties of the Blow-Up Solutions of a Nonlinear Parabolic System Non-divergent Form with Cross-Diffusion // Lecture Notes in Civil Engineering, – 2022. – No 180. – P. 289–301.

[11] *Aripov M.M., Raimbekov J.R.* The Critical Curves of a Doubly Nonlinear Parabolic Equation in Non-divergence form with a Source and a Nonlinear Boundary Flux // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2019, – 2019. – No 12(1). – P. 112–124. doi: http://dx.doi.org/10.17516/1997-1397-2019-12-1-112-124.

[12] *Aripov M., Mukimov A., Sayfullayeva M.* To asymptotic of the solution of the heat conduction problem with double nonlinearity, variable density, absorption at a critical parameter // International journal of innovative technology and exploring engineering, – 2019. – Vol. 9. – Issue 1. – P. 3407–3412.

[13] *Aripov M., Mukimov A., Mirzayev B.* To Asymptotic of the Solution of the Heat Conduction Problem with Double Nonlinearity with Absorption at a Critical Parameter // Mathematics and Statistics, – 2019. – 7(5). – P. 205–217. doi: http://dx.doi.org/10.13189/ms.2019.070507.

[14] *Muhamediyeva D.K., Nurumova A.Y., Muminov S.Y.* Cauchy Problem and Boundary-Value Problems for Multicomponent Cross-Diffusion Systems // Tashkent: International Conference on Information Science and Communications Technologies. – 2021. doi: http://dx.doi.org/10.1109/ICISCT52966.2021.9670380.

[15] *Muhamediyeva D.K., Nurumova A.Y., Muminov S.Y.* Numerical modeling of cross-diffusion processes // Tashkent: V International Scientific Conference “Construction Mechanics, Hydraulics and Water Resources Engineering” – 2023. doi: http://dx.doi.org/110.1051/e3sconf/202340105060.

[16] *Muhamediyeva D.K., Muminov S.Y, Shaazizova M.E., Khidirova Ch.,Bahromova Yu.* Limited different schemes for mutual diffusion problems // Tashkent: V International Scientific Conference “Construction Mechanics, Hydraulics and Water Resources Engineering”. – 2023. doi: http://dx.doi.org/110.1051/e3sconf/202340105057.

[17] *Муминов С.Ю.* Автомодельные решение системы нелинейных дифференциальных уравнений кросс-диффузии // Проблемы вычислительной и прикладной математики, – 2023. – No 4(51). – С. 53–58.

[18] *Muminov S., Agarwal P., Muhamediyeva D.* Qualitative properties of the mathematical model of nonlinear cross-diffusion processes // Nanosystems: Phys. Chem. Math. – 2024. – 15(6). – P. 742–748. doi: http://dx.doi.org/10.17586/2220-8054-2024-15-6-742-748.

UDC 517.957

CONSTRUCTION OF A SELF-SIMILAR SOLUTION TO MUTUAL DIFFUSION PROBLEMS.

Muminov S.Y.
sokhibjan.muminov@mamunedu.uz
Mamun university, 2, Bolkhovuz street, Khiva, 220900 Uzbekistan.

The article considers the problem of constructing self-similar solutions of a system of nonlinear differential equations modeling mutual diffusion processes in multicomponent media. An analysis of a mathematical model taking into account complex interactions of components and the nonlinear nature of transfer processes is carried out. Approximate solutions of the system are found, allowing one to describe the behavior of concentration profiles in various modes. Asymptotic representations of solutions for regular, unlimited and limited cases are obtained, and the behavior of a two-sided linear stationary equation arising at intermediate stages of analysis is studied. The results are of interest for diffusion theory and applied problems of mathematical modeling of complex physical processes.

Keywords: mutual diffusion, self-similar solutions, nonlinear differential equations, approximate solution, asymptotic analysis, multicomponent media, scale invariance, stationary equation, mathematical modeling, diffusion processes.

Citation: Muminov S.Y. 2025. Construction of a self-similar solution to mutual diffusion problems.. *Problems of Computational and Applied Mathematics.* 4(68): 56-64.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.4_68.2025.12.

№ 4(68) 2025 ISSN 2181-8460

HISOBLASH VA AMALIY MATEMATIKA MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

RAQAMLI TEXNOLOGIYALAR VA
SUN'IY INTELLEKTNI RIVOJLANTIRISH
ILMIY-TADQIQOT INSTITUTI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 4(68) 2025

Журнал основан в 2015 году.
Издается 6 раз в год.

Учредитель:
Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта.

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при Администрации Президента Республики Узбекистан.
Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Адрес редакции:
100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.
Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.
Э-почта: `journals@airi.uz`.
Веб-сайт: `https://journals.airi.uz`.

Дизайн и вёрстка:
Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.
Подписано в печать 29.08.2025 г.
Формат 60x84 1/8. Заказ №6. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 4(68) 2025

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:
Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.
The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Address:
100125, Tashkent, Buz-2, 17A.
Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.
E-mail: `journals@airi.uz`.
Web-site: `https://journals.airi.uz`.

Layout design:
Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.
Signed for print 29.08.2025
Format 60x84 1/8. Order No. 6. Print run of 100 copies.

Содержание

Contents