

УДК 519.6

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ФИЛЬТРОВАНИЯ МАЛОКОНЦЕНТРИРОВАННОГО РАСТВОРА ЧЕРЕЗ ПОРИСТУЮ СРЕДУ

¹Саидов У., ^{2*}Жураев И., ³Туракулов Ж.

*izzatjurayev1993@gmail.com

¹Самаркандский государственный педагогический институт
технологий Узбекистан, г. Самарканд, улица Спитаменшох, дом 166;²Академического лицея № 1 при Самаркандском медицинском институте,
технологий Узбекистан, Самарканд, Мир Саид Барака, д. 4;³Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного
интеллекта,

100125, Узбекистан, г. Ташкент, Мирзо-Улугбекский р-он, м-в Буз-2, д. 17А.

В данной статье представлена интегрированная математическая модель радиальной фильтрации в цилиндрическом фильтре, в котором движение потока осуществляется от внешнего слоя к внутренней полости. Области свободного течения описываются уравнениями Навье–Стокса для несжимаемой жидкости, где процесс фильтрации через пористый слой формализуется на основе закона Дарси, а распределение давления определяется посредством уравнения Пуассона. Перенос растворённых веществ моделируется с использованием уравнения адвекции–диффузии. В модель включён механизм эволюции пористости во времени (уплотнение или закупоривание), что позволяет проследить сопряжённую динамику параметров «давление–скорость–пористость–концентрация». Проведённый анализ показал, что учёт вертикальной ориентации цилиндрического фильтра является существенным фактором, влияющим на снижение энергетических затрат и повышение селективности процесса.

Ключевые слова: математическая модель, цилиндрический фильтр, уравнения Навье–Стокса, закон Дарси, уравнение Пуассона, адвекция–диффузия, гидродинамика.

Цитирование: Саидов У., Жураев И., Туракулов Ж. Моделирование процесса фильтрации малоконцентрированного раствора через пористую среду // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2025. – № 4(68). – С. 47-55.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.4_68.2025.10.

1 Введение

В современных условиях процессы фильтрации и очистки растворов, электролитов и жидких смесей приобретают стратегическое значение для различных отраслей промышленности. Чистота и стабильность технологических сред определяют эффективность многих производственных процессов, начиная от химической и пищевой промышленности и заканчивая фармацевтикой, нефтепереработкой, машиностроением и металлургией. Удаление из жидких систем ионов, тяжёлых металлов, производственных отходов и других нежелательных примесей не только повышает качество выпускаемой продукции, но и способствует снижению издержек, улучшению экологической безопасности и устойчивому развитию предприятий. Современный научно-технический прогресс в данной области направлен на разработку новых фильтрационных материалов, усовершенствование технологических схем, а также

внедрение интеллектуальных систем управления процессами очистки. При этом особое внимание уделяется созданию универсальных методов, позволяющих прогнозировать поведение жидкостей и ионных растворов при различных условиях эксплуатации. С этой целью активно разрабатываются математические модели, вычислительные алгоритмы и специализированное программное обеспечение, обеспечивающие проведение численных экспериментов и выбор оптимальных режимов работы без необходимости затратных лабораторных испытаний. Следует подчеркнуть, что исключительно экспериментальные методы не всегда позволяют эффективно решать задачи прогнозирования и управления в области фильтрации. В связи с этим наиболее перспективным направлением исследований является использование возможностей математического моделирования и компьютерных симуляций. Такой подход открывает широкие перспективы для разработки более надёжных, экономичных и экологически безопасных технологий фильтрации, что имеет большое практическое значение для повышения конкурентоспособности и инновационного развития промышленных предприятий.

В статье [1] представлены и решены вопросы учета обратного влияния характеристик процесса (концентрации загрязнения жидкости и осадка) на характеристики среды (коэффициенты пористости, фильтрации, диффузии, массопереноса и др.) На примере очистки жидкости в магнитные и сорбционные фильтры. В работе предложен алгоритм численно-асимптотической аппроксимации решения соответствующей модельной задачи, описываемой системой нелинейных сингулярно-пертурбативных дифференциальных уравнений типа «конвекция-диффузия-массообмен». Как отмечают авторы в случае преобладания конвекционной и сорбционной составляющих собственно процесса над диффузионной и десорбционной составляющими имеет место в подавляющем большинстве фильтрационных установок. На этой основе был проведен компьютерный эксперимент, что результаты показывают преимущества предлагаемой модели перед классической.

В частности в работе [2] разработаны математическая модель и численный алгоритм для исследования фильтрация многофазного течения в пористых средах со сложным подвижным движением границы раздела, где уравнения Навье – Стокса дискретизируются с использованием подхода конечных объемов. В статье капиллярные силы рассчитываются с использованием полуострой модели поверхностных сил, где они реализуются с использованием полуневяной формулировки, которая позволяет увеличить размер временного шага при низком количестве капилляров. Авторы для адекватности, сходимости и точность численного метода проверяют на нескольких тестовых примерах, которые указывают на потенциал метода для прогнозирования процессов многофазного потока.

В статье [3] приведены результаты проведенных экспериментальных исследований процесса внутренней эрозии крупнозернистых почв, собранных из реки Рейн. Тесты выполняются на лабораторной колонке, чтобы оценить способность таких почв к суффозии и охарактеризовать их стабильность и изменение физических параметров почвы в процессе суффозии.

В статье [4] рассмотрены некоторые аспекты моделирования процесса диффузии несжимаемого потока, состоящие из трех несмешивающихся компонентов, без фазового перехода. При моделировании трехфазных потоков используется система Кана–Хиллиарда и уравнения Навье – Стокса, в которых учитываются поверхностные натяжения с учетом объемных капиллярных сил. В работе приведены различные численные эксперименты для случая проверки распределения линзы между двумя фазами.

В работе [5] представлено ММ процесса адсорбции цефалоспори́на в неподвижном слое колонке агрегата. Применение алгоритма оптимизации роя частиц для оценки параметров был впервые рассмотрен авторами статьи, что оказалось полезным инструментом для оценки параметров в процессах адсорбции и моделирование процесс очистки показало хорошие результаты как при оценке, так и при шаг проверки.

В работе [6] проводится численное исследование процесс фильтрация жидкости с учетом эрозия пористой среды. Авторы для численного интегрирования задачи и исследование процесса суффозии используют метод конечных объемов и явную конечно-разностную схему для уравнения переноса – дисперсии – осаждения на трехмерном сетки. Точность и надежность предлагаемого конечного объемный метод оценивается с помощью различных числовых тестов и подтверждено корректировкой экспериментальных результатов.

Эксперименты по фильтрации с подходящей суспензией частиц и масла проводились в пилотном фильтре и в лабораторном фильтре с целью исследования и моделирования механизмов, происходящих в процессе [7]. Было оценено влияние рабочих параметров, таких как концентрация частиц и перепад давления, на производительность фильтра. Результаты показывают, что одновременно работает более одного механизма фильтрации. Хотя некоторая глубинная фильтрация происходит в начале срока службы свечного фильтра, блокирование и фильтрация корки являются основными механизмами, ответственными за засорение фильтра. Хотя блокирование и фильтрация клейка происходят до некоторой степени одновременно, фильтрация клейка является механизмом, важным для моделирования и масштабирования долгосрочного процесса фильтрации.

В настоящем исследовании [8] предлагается феноменологическая модель глубинной фильтрации, где она сочетает в себе уравнение адвекции-дисперсии с уравнением нелинейной многоступенчатой кинетики накопления. Модель включает дисперсию и учитывает временные и пространственные изменения пористости среды и предполагается, что в любом месте внутри колонны сначала образуется осадок на фильтре в виде необратимого созревающего слоя, а затем - обратимый осадок во время рабочего этапа. Последнее продолжается до тех пор, пока депозит не достигнет локального максимального значения. Затем происходит прорыв фильтра. Уравнения решаются численно с использованием явной конечно-разностной схемы. Результаты выгодно отличаются от лабораторных экспериментов на объекте ЕРА и полевых экспериментов, проведенных Mekorot - Israel Water Company.

В работе [9] построена модель глубинной фильтрации двухкомпонентной суспензии через пористую среду с образованием двух типов отложений, имеющих разную структуру и свойства. Влияние параметров плотности потока жидкости и частиц, определяющих массоперенос между различными компонентами суспензии и отложениями, на фильтрационные характеристики и свойства образующихся отложений оценивается на основе численных экспериментов для суспензий с контрастными фракциями частиц.

В частности, в работах [10] рассматриваются основные характеристики фильтрующих агрегатов, физико-механические и химические свойства фильтруемых материалов, а также режимы работы фильтров, применяемых для отделения частиц твердой фазы от жидкости, нежелательных ионов и других элементов.

В работе [11] для проведения комплексного исследования технологического процесса фильтрации жидких и ионизированных растворов разработаны его математическая модель и эффективный численный алгоритм решения задачи с учетом:

переменности скорости фильтрования, изменения концентрации суспензии в колонке агрегата и на выходе, образования слоя осадка на поверхности фильтровальной перегородки, скорости осаждения гелевых частиц в порах фильтра, роста давления в колонке агрегата и других физикомеханических свойств фильтруемой жидкости.

В работах Ю.М. Шехтмана, Ф. Б. Абуталиева, М. Рахимова, Н. Равшанова, И.М. Федоткина, С.И. Криля, Н.У. Ризаева и их учеников на основе предложенных математических инструментов подробно проводились исследования, связанные с технологией сепарирования и фильтрования суспензии и ионных растворов от примесей и ионных соединений, с процессом фильтрации различных жидкостей в неоднородной среде [12].

В частности, в работах [13] рассматриваются основные характеристики фильтрующих агрегатов, физико-механические и химические свойства фильтруемых материалов, а также режимы работы фильтров, применяемых для отделения частиц твердой фазы от жидкости, нежелательных ионов и других элементов. Разработка математическая модель для проведения комплексного исследования многократной фильтрации суспензий многослойным фильтром, вычислительный алгоритм решения задачи, а также программное обеспечение для проведения вычислительных экспериментов посвящено работа [14], где предложенный математический инструмент позволяет проводить многостороннее исследование и прогнозировать технологический процесс фильтрации с целью принятия соответствующих управленческих решений.

В этой статье [15] Ж. Туракулов численно решил изменение физических свойств жидкости при ее течении через однослойную среду, рассчитав процессы коагуляции и суффозирования. Анализ литературных источников показали, что процесс фильтрования как многокомпонентных так и малоконцентрированных растворов одновременно с учетом процесса коагуляции и суффозии, режимов работы фильтра, изменения скорости фильтрования жидкости и многослойности фильтровальной колонки (рис. 1) подробно не изученно.

В связи с этим разработка математических моделей, численных алгоритмов и программного обеспечения для решения выше указанной задачи с целью анализа, прогнозирования и поддержки принятия решений является актуальной.

2 Постановка задачи

В данной работе представлена математическая модель, разработанная с учётом ключевых факторов и совокупности воздействий, оказывающих влияние на протекание всего процесса фильтрации. В качестве исходных параметров используются давление, скорость потока и концентрация раствора, поступающего в цилиндрический фильтр, а также коэффициент проницаемости пористой среды, через которую проходит жидкость. Для описания гидродинамики в каждой области применяется закон Дарси в сочетании с уравнением Пуассона, что позволяет определить распределение давления и изменение скорости потока. Изменение концентрации растворённого вещества во времени используется для оценки эволюции пористости фильтрующей среды и расчёта концентрации выходного потока из цилиндрического фильтра в ходе процесса.

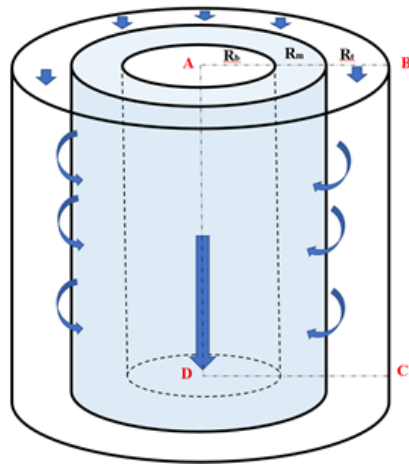


Рис. 1 Геометрический вид фильтра с указанием размеров

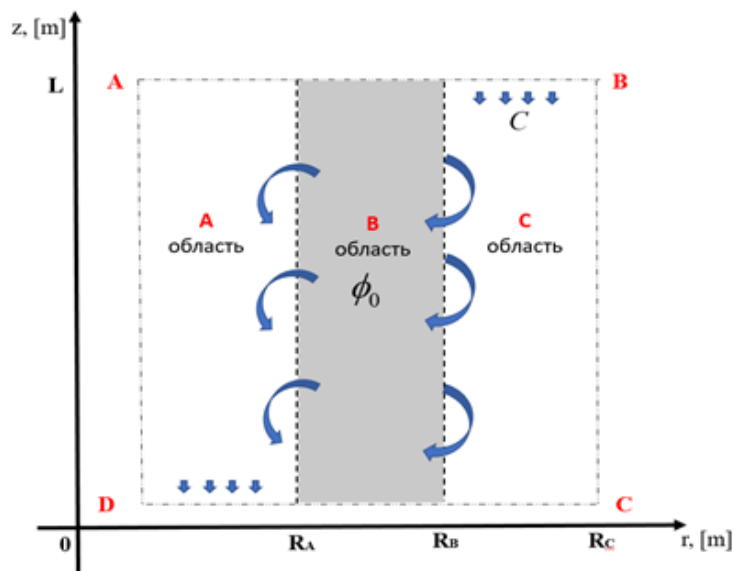


Рис. 2 Схематический вид фильтра

Для области C: $R_B < r < R_C$, $0 < z < L$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial C}{\partial t} + w_C \frac{\partial C}{\partial r} + u_C \frac{\partial C}{\partial z} = D_C \left(\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right), \\ \rho \left(\frac{\partial w_C}{\partial t} + w_C \frac{\partial w_C}{\partial r} + u_C \frac{\partial w_C}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P_C}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 w_C}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 w_C}{\partial z^2} \right), \\ \rho \left(\frac{\partial u_C}{\partial t} + w_C \frac{\partial u_C}{\partial r} + u_C \frac{\partial u_C}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P_C}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_C}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_C}{\partial z^2} \right) - \rho g, \\ \frac{\partial w_C}{\partial r} + \frac{\partial u_C}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial^2 P_C}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 P_C}{\partial z^2} = -\rho \left(\left(\frac{\partial u_C}{\partial z} \right)^2 + 2 \frac{\partial w_C}{\partial r} \frac{\partial u_C}{\partial z} + \left(\frac{\partial w_C}{\partial r} \right)^2 \right). \end{array} \right. \quad (1)$$

Начальные и граничные условия:

$$P_C(r, z, 0) = P_0, \quad w_C(r, z, 0) = 0, \quad u_C(r, z, 0) = u_0, \quad C_C(r, z, 0) = C_0,$$

$$\begin{aligned} C|_{z=0} &= 0, \quad C|_{r=R_C} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial r}\bigg|_{r=R_B} = 0, \\ \frac{\partial P_C}{\partial z}\bigg|_{z=0} &= 0, \quad \frac{\partial P_C}{\partial r}\bigg|_{r=R_C} = 0, \quad P_C|_{r=R_{B-0}} = P_C|_{r=R_{B+0}}, \\ w_C|_{z=0} &= 0, \quad w_C|_{r=R_C} = 0, \quad \frac{\partial w_C}{\partial r}\bigg|_{r=R_C} = 0, \\ u_C|_{z=0} &= 0, \quad u_C|_{r=R_C} = 0, \quad \frac{\partial u_C}{\partial r}\bigg|_{r=R_C} = 0. \end{aligned}$$

Для области В: $R_A < r < R_B$, $0 < z < L$:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial C_B}{\partial t} + w_B \frac{\partial C_B}{\partial r} + u_C \frac{\partial C_B}{\partial z} &= D_B \left(\frac{\partial^2 C_B}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 C_B}{\partial z^2} \right), \\ u_B &= -\frac{k\varphi(z, r)}{\mu} \frac{\partial P_B}{\partial r}, \quad w_B = -\frac{k\varphi(z, r)}{\mu} \frac{\partial P_B}{\partial z}, \\ \frac{\partial w_B}{\partial r} + \frac{\partial u_B}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial^2 P_B}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 P_B}{\partial z^2} &= -\rho \left(\left(\frac{\partial u_B}{\partial z} \right)^2 + 2 \frac{\partial w_B}{\partial r} \frac{\partial u_B}{\partial z} + \left(\frac{\partial w_B}{\partial r} \right)^2 \right), \\ \varphi(z, r) &= \varphi_0 - \alpha \left(\frac{r}{R} \right)^n. \end{aligned} \right. \quad (2)$$

Начальные и граничные условия:

$$\begin{aligned} C_B(r, z, 0) &= C|_{r=R_B}, \\ C|_{z=0} &= 0, \quad C|_{z=L} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial r}\bigg|_{r=R_A} = 0, \\ \frac{\partial P_B}{\partial z}\bigg|_{z=0} &= 0, \quad \frac{\partial P_B}{\partial z}\bigg|_{z=L} = 0, \quad P_B|_{r=R_{A-0}} = P_B|_{r=R_{A+0}}, \\ w_B|_{z=0} &= 0, \quad w_B|_{z=L} = 0, \quad \frac{\partial w_B}{\partial r}\bigg|_{r=R_A} = 0, \\ u_B|_{z=0} &= 0, \quad u_B|_{z=L} = 0, \quad \frac{\partial u_B}{\partial r}\bigg|_{r=R_A} = 0. \end{aligned}$$

Для области А: $0 < r < R_A$, $0 < z < L$:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial C_A}{\partial t} + w_A \frac{\partial C_A}{\partial r} + u_A \frac{\partial C_A}{\partial z} &= D_A \left(\frac{\partial^2 C_A}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} \right), \\ w_A &= -\frac{k}{\mu} \frac{\partial P_A}{\partial r}, \quad u_A = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial P_A}{\partial z}, \\ \frac{\partial w_A}{\partial r} + \frac{\partial u_A}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial^2 P_A}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 P_A}{\partial z^2} &= -\rho \left(\left(\frac{\partial u_A}{\partial z} \right)^2 + 2 \frac{\partial w_A}{\partial r} \frac{\partial u_A}{\partial z} + \left(\frac{\partial w_A}{\partial r} \right)^2 \right). \end{aligned} \right. \quad (3)$$

Начальные и граничные условия:

$$\begin{aligned}
 C_A(r, z, 0) &= C|_{r=R_A}, \\
 \left. \frac{\partial C_A}{\partial z} \right|_{z=0} &= 0, \quad C_A|_{z=L} = 0, \quad C_A|_{r=0} = 0, \\
 P_A|_{z=0-0} &= P_A|_{z=0+0} = 0, \quad \left. \frac{\partial P_B}{\partial z} \right|_{z=L} = 0, \quad P_B|_{r=R_{A-0}} = P_B|_{r=R_{A+0}}, \\
 \left. \frac{\partial w_A}{\partial z} \right|_{z=0} &= 0, \quad w_A|_{z=L} = 0, \quad w_A|_{r=0} = 0, \\
 \left. \frac{\partial u_A}{\partial z} \right|_{z=0} &= 0, \quad u_A|_{z=L} = 0, \quad u_A|_{r=0} = 0.
 \end{aligned}$$

Здесь P_A, P_B, P_C – соответственно гидравлические давление, u, w – соответственно скорость потока жидкости, C_A, C_B, C – концентрация вещества в каждой области в жидкости, φ – пористость фильтра,

$$q = \int_0^{R_A} 2\pi r \|u_A\|_{z=0} dr = \int_0^{R_A} 2\pi r \sqrt{u_A^2 + w_A^2} \Big|_{z=0} dr.$$

Здесь q – скорость вытекающей жидкости, α – безразмерная константа скольжения, зависящая от свойств поверхности.

И так разработана математическая модель для проведения комплексного исследования сложного нестационарного процесса фильтрации суспензии через пористую среду с учетом режима работы фильтра и характеристики перегородки цилиндрического фильтра.

3 Заключение

В данной работе для проведения комплексного исследования нестационарного процесса фильтрации суспензии разработана интегрированная математическая модель на основе уравнений Навье–Стокса, закона Дарси и уравнения Пуассона. Модель позволяет описывать распределение давления, скорости потока и изменение концентрации растворённого вещества в процессе фильтрации. Учет адвекции–диффузии обеспечивает более точное описание массопереноса и динамики концентрационной поляризации, где включение эволюции пористости во времени дало возможность проследить процессы коагуляции и суффозии, влияющие на эффективность работы агрегата.

Литература

- [1] *Andrii Safonyk, Andrii Bomba* Mathematical modeling process of liquid filtration taking into account reverse influence of process characteristics on medium characteristics // International journal of applied mathematical research. DOI:10.14419/ijamr.v4i1.3805–2014. – P. 1–7. Source: <https://www.sciencepubco.com/index.php/ijamr/article/view/3805>
- [2] *Ali Q. Raeini, Martin J. Blunt, Branko Bijeljic* Modelling two-phase flow in porous media at the pore scale using the volume-of-fluid method // Journal of Computational Physics. USA, – Vol. 231. – № 17. – 2012. – P. 5653–5668. DOI:10.1016/j.jcp.2012.04.011.
- [3] *Benamar A., Correia dos Santos R.N., Bennabi A., Karoui T.* Suffusion evaluation of coarse-graded soils from Rhine dikes. // Acta Geotechnica 14(3). – 2019. – P. 815–823.

- [4] *Boyer F., Lapuerta C., Minjeaud S., Piar B., Quintard M.* Cahn–Hilliard/Navier–Stokes Model for the Simulation of Three-Phase Flows // *Transport in Porous Media*. – 2010. – Vol. 82. – № 3. – P. 463–483. doi:10.1007/s11242-009-9408-z.
- [5] *Carlos Andre V. Burkert, Geraldo N.O. Barbosa, Marcio A. Mazutti., Francisco Maugeri* Mathematical modeling and experimental breakthrough curves of cephalosporin C adsorption in a fixed-bed column // *Process Biochemistry*. – 2011. – № 46. – P. 1270–1277.
- [6] *Chetti, A., Benamar, A., Korichi, K.* Three-dimensional numerical model of internal erosion // *European Journal of Environmental and Civil Engineering*. – 2019.
- [7] *Rosenthal I., Anlauf H., Nirschl H.* Experimental and analytical modeling of the filtration mechanisms of a paper stack candle filter. // *Chemical Engineering Research and Design*. – Vol. 89. – № 12. – 2011. – P. 2776–2784.
- [8] *Gitisa V. et al.* Deep-bed filtration model with multistage deposition kinetics // *Chemical Engineering Journal*. – № 163. – 2010. – P. 78–85.
- [9] *Makhmudov Zh.M., Saidullaev U.Zh. and Khuzhayorov B.Kh.* Mathematical Model of Deep-Bed Filtration of a Two-Component Suspension through a Porous Medium // *Fluid Dynamics*, – Vol. 52. – № 2. – 2017. – P. 299–308.
- [10] *Равшанов Н., Туракулов Ж.А.* Прямая и обратная задача для исследования процесса фильтрации ионных растворов через пористую среду // *Проблемы вычислительной и практической математики*. – 2022. – № 5(43). – С. 58–71.
- [11] *Silva C.M., Reeve D.W., Husain H., Rabie H.R., Woodhouse K.A.* Model for flux prediction in high-shear MF systems // *J. Membr. Sci.* – 2000. – P. 87–98.
- [12] *Абуталиев Ф.Б., Равшанов Н.* Моделирование технологического процесса сепарирования трудноразделяемых смесей // *Докл. АН РУз*. – 1997. – № 7. – С. 26–30.
- [13] *Равшанов Н., Палванов Б., Мухамадиев А.* Компьютерное моделирование процесса фильтрации жидкости ионизированных растворов для защиты экосистемы от источников загрязнения // *Вестник ТУИТ*. – 2015. – № 2(34). – С. 100–105.
- [14] *Ravshanov N., Saidov U.M.* Modelling technological process of ion-exchange filtration of fluids in porous media *J. Phys.: Conf. Ser.* 1015 032114. – 2018. DOI: 10.1088/1742-6596/1015/3/032114
- [15] *Равшанов Н., Туракулов Ж.* “Математическое моделирование процесса фильтрования малоконцентрированных растворов через пористую среду” // *Информационные технологии моделирования и управления* – 2024. – №3(137).

UDC 519.6

MODELING THE PROCESS OF FILTERING A LOW-CONCENTRATION SOLUTION THROUGH A POROUS MEDIUM

¹*Saidov U.*, ^{2*}*Juraev I.*, ³*Turakulov J.*

*izzatjurayev1993@gmail.com

¹Samarkand State Pedagogical Institute,

166, Spitamen Avenue, Samarkand, Uzbekistan;

²Academic Lyceum No. 1 under Samarkand Medical Institute,

4, str. Mir Said Baraka, Samarkand, Uzbekistan;

³Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute,

17A, Buz-2, Tashkent, 100125 Uzbekistan.

This article presents an integrated mathematical model of radial filtration in a cylindrical filter, in which the flow movement is carried out from the outer layer to the inner cavity. Free flow areas are described by Navier-Stokes equations for incompressible fluid, where the filtration process through the porous layer is formalized based on Darcy's law, and the pressure distribution is determined by the Poisson equation. The transfer of dissolved substances is modeled using the advection-diffusion equation. The model includes a mechanism for the evolution of porosity over time (sealing or clogging), which allows tracking the conjugate dynamics of the "pressure-velocity-porosity-concentration" parameters. The analysis showed that considering the vertical orientation of the cylindrical filter is a significant factor influencing the reduction of energy costs and increasing the selectivity of the process.

Keywords: mathematical model, cylindrical filter, Navier–Stokes equations, Darcy's law, Poisson equation, advection–diffusion, hydrodynamics.

Citation: Saidov U., Juraev I., Turakulov J. 2025. Modeling the process of filtering a low-concentration solution through a porous medium. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 4(68): 47-55.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.4_68.2025.10.

HISOBLASH VA AMALIY MATEMATIKA MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
PROBLEMS OF COMPUTATIONAL
AND APPLIED MATHEMATICS



ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 4(68) 2025

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Арипов М.М., Шадиметов Х.М., Ахмедов Д.Д.

Ответственный секретарь:

Убайдуллаев М.Ш.

Редакционный совет:

Азамов А.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Арушанов М.Л.,
Бурнашев В.Ф., Джумаёзов У.З., Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия),
Игнатъев Н.А., Ильин В.П. (Россия), Иманкулов Т.С. (Казахстан),
Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия), Карачик В.В. (Россия),
Курбонов Н.М., Маматов Н.С., Мирзаев Н.М., Мухамадиев А.Ш., Назирова Э.Ш.,
Нормуродов Ч.Б., Нуралиев Ф.М., Опанасенко В.Н. (Украина),
Расулмухамедов М.М., Расулов А.С., Садуллаева Ш.А.,
Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А., Хамдамов Р.Х.,
Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Чье Ен Ун (Россия), Шабозов М.Ш. (Таджикистан),
Dimov I. (Болгария), Li Y. (США), Mascagni M. (США), Min A. (Германия),
Singh D. (Южная Корея), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

Дизайн и вёрстка:

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 29.08.2025 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №6. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 4(68) 2025

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

Editor-in-Chief:

Ravshanov N.

Deputy Editors:

Aripov M.M., Shadimetov Kh.M., Akhmedov D.D.

Executive Secretary:

Ubaydullaev M.Sh.

Editorial Council:

Azamov A.A., Aloev R.D., Amirgaliev E.N. (Kazakhstan), Arushanov M.L.,
Burnashev V.F., Djumayozov U.Z., Zagrebina S.A. (Russia), Zadorin A.I. (Russia),
Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia), Imankulov T.S. (Kazakhstan), Ismagilov I.I. (Russia),
Kabanikhin S.I. (Russia), Karachik V.V. (Russia), Kurbonov N.M., Mamatov N.S.,
Mirzaev N.M., Mukhamadiev A.Sh., Nazirova E.Sh., Normurodov Ch.B., Nuraliev F.M.,
Opanasenko V.N. (Ukraine), Rasulov A.S., Sadullaeva Sh.A., Starovoitov V.V. (Belarus),
Khayotov A.R., Khaldjigitov A., Khamdamov R.Kh., Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh.,
Chye En Un (Russia), Shabozov M.Sh. (Tajikistan), Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA),
Mascagni M. (USA), Min A. (Germany), Singh D. (South Korea), Singh M. (South
Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the
Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.

The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.

Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

Address:

100125, Tashkent, Buz-2, 17A.

Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

E-mail: journals@airi.uz.

Web-site: <https://journals.airi.uz>.

Layout design:

Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.

Signed for print 29.08.2025

Format 60x84 1/8. Order No. 6. Print run of 100 copies.

Содержание

<i>Халдусигитов А., Адамбаев У., Тилозов О., Рахмонова Р., Махмадиерова М.</i> Сравнительный анализ численных методов решения задач теории упругости в напряжениях	8
<i>Нуралиев Ф.М., Тохиров Б.Н.</i> Комплексное математическое моделирование термо-электро-магнито-упругих процессов в анизотропных тонких пластинах сложной формы на основе ме- тода RFM	17
<i>Нормуродов Ч.Б., Зиякулова Ш.А.</i> Численное моделирование изгиба тонкой пластины с применением дискрет- ного варианта метода предварительного интегрирования	26
<i>Равшанов Н., Журабоева О., Боборахимов Б., Шарипов Х.</i> Моделирование распространения загрязняющих веществ в атмосфере с уче- том рельефа и метеорологических условий	38
<i>Саидов У., Жураев И., Туракулов Ж.</i> Моделирование процесса фильтрования малоконцентрированного раствора через пористую среду	47
<i>Муминов С.Ю.</i> Построение автомодельного решения системы нелинейных дифференциаль- ных уравнений, представляющих задачи взаимной диффузии.	56
<i>Ахмедов Д.М., Буваширов Д.С.</i> Оптимальная квадратурная формула для гиперсингулярных интегралов ти- па Адамара с высокой осцилляцией в пространстве Соболева	65
<i>Алоев Р.Д., Алимова В.</i> Исследование экспоненциальной устойчивости численного решения гипербо- лической системы с отрицательными нелокальными характеристическими скоростями	75
<i>Шадиметов Х.М., Нуралиев Ф.А., Едилбекова Р.М.</i> Система для нахождения оптимальных коэффициентов квадратурных фор- мул типа Эрмита с производными третьего порядка	88
<i>Нормуродов Ч.Б., Джураева Н.Т., Норматова М.М.</i> Исследование динамики производных дифференциального уравнения чет- вертого порядка с малым параметром при старшей производной	97
<i>Шадиметов Х.М., Нуралиев Ф.А., Миркомиллов Д.М.</i> Оптимальные квадратурные формулы для приближенного вычисления быст- роосциллирующих интегралов	110
<i>Игнатъев Н.А., Рамазонов Ш.Ш.</i> Отношение связанности в метрических алгоритмах классификации и анализ его свойств	122

Contents

<i>Khaldjigitov A., Adambaev U., Tilovov O., Rakhmonova R., Makhmadiygorova M.</i>	
Numerical solution of plane problems of the theory of elasticity directly in stresses	8
<i>Nuraliyev F.M., Tokhirov B.N.</i>	
Comprehensive mathematical modeling of thermo-electro-magneto-elastic processes in anisotropic thin plates of complex shape based on the RFM method	17
<i>Normurodov Ch.B., Ziyakulova Sh.A.</i>	
Numerical modeling of thin plate bending using a discrete version of the pre-integration method	26
<i>Ravshanov N., Juraboeva O., Boborakhimov B., Sharipov Kh.</i>	
Modeling the dispersion of pollutants in the atmosphere, accounting for terrain and meteorological conditions	38
<i>Saidov U., Juraev I., Turakulov J.</i>	
Modeling the process of filtering a low-concentration solution through a porous medium	47
<i>Muminov S.Y.</i>	
Construction of a self-similar solution to mutual diffusion problems.	56
<i>Akhmedov D.M., Buvasheev D.S.</i>	
An optimal quadrature formula for Hadamard-type hypersingular integrals with high oscillation in the Sobolev space	65
<i>Aloev R.D., Alimova V.</i>	
Investigation of the exponential stability of the numerical solution of a hyperbolic system with negative nonlocal characteristic velocities	75
<i>Shadimetov Kh.M., Nuraliev F.A., Edilbekova R.M.</i>	
System for finding optimal coefficients of Hermite-type quadrature formulas with third-order derivatives	88
<i>Normurodov Ch.B., Juraeva N.T., Normatova M.M.</i>	
Study of the dynamics of derivatives of a fourth-order differential equation with a small parameter at the highest derivative	97
<i>Shadimetov X.M., Nuraliyev F.A., Mirkomilov D.M.</i>	
Optimal quadrature formulas for approximate calculation of fast oscillating integral	110
<i>Ignatiev N.A., Ramazonov Sh.Sh.</i>	
Relationship in metric classification algorithms and analysis of its properties	122