

УДК 519.6

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ ВЕЩЕСТВ В АТМОСФЕРЕ С УЧЕТОМ РЕЛЬЕФА И МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ

*Равшанов Н., Журабоева О., *Боборахимов Б., Шарипов Х.*

uzbekpy@gmail.com

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта,

100125, Узбекистан, г. Ташкент, Мирзо-Улугбекский р-он, м-в Буз-2, д. 17А.

В данной работе предлагается расширенная 3D-модель Эйлера для расчета пространственно-временной эволюции концентрации загрязняющих веществ, выбрасываемых в атмосферу в изменяющихся метеорологических условиях. Модель, наряду с уравнением адвекции-диффузии, объединяет в одной системе осаждение по закону Стокса (для твердых частиц), температурно-зависимое химическое разложение по закону Аррениуса, удерживание растениями (пассивный сток), вымывание осадками (райноут), рельеф-зависимое сопротивление и параметризации турбулентной диффузии на основе классов Паскуилла-Гиффорда. Численное решение использует конвективные потоки upwind/QUICK, центральную дифференциальную диффузию и шаг времени, стабилизированный критерием CFL. В сценариях, охватывающих различные направления и скорости ветра, показана роль рельефа в направлении потока и особенности распространения, связанные с атмосферой. Модель масса бала.

Ключевые слова: адвекция-диффузия, Паскуилл-Гиффорд, длина Монины-Обухова, влажная эрозия, оседание (Стокс), растительные стоки, рельеф, Upwind/QUICK, CFL.

Цитирование: *Равшанов Н., Журабоева О., Боборахимов Б., Шарипов Х.* Моделирование распространения загрязняющих веществ в атмосфере с учетом рельефа и метеорологических условий // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2025. – № 4(68). – С. 38-46.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.4_68.2025.01.

1 Введение

Загрязнение атмосферы остаётся одной из самых актуальных экологических и медико-санитарных проблем XXI века. Интенсивное развитие промышленности, урбанизация и рост числа транспортных средств приводят к значительным выбросам в воздух вредных веществ – например, твёрдых частиц (PM), оксидов азота (NO_x), летучих органических соединений (VOC) и тяжёлых металлов. Негативное воздействие этих веществ напрямую угрожает здоровью человека, состоянию экосистем и глобальной климатической системе.

Хотя закономерности крупномасштабного загрязнения изучены относительно хорошо, распространение примесей в городах и в мезомасштабной среде существенно зависит от рельефа, метеоусловий, геометрии источников эмиссии и свойств подстилающей поверхности. В горных районах, речных долинах или плотно застроенных центрах городов движение загрязняющих веществ не всегда объяснимо простыми

теоретическими моделями. Температурные инверсии, орографические барьеры и эффект «городского теплового острова» могут вызывать локальный рост концентраций и удерживание примесей.

Для описания этих сложностей простые гауссовские подходы постепенно уступили место современным моделям рассеяния на основе эйлеровых и лагранжевых постановок. Среди них модель AERMOD, разработанная Агентством по охране окружающей среды США (EPA), занимает важное место, учитывая влияние рельефа и параметры атмосферного пограничного слоя. Однако многие действующие модели всё ещё не позволяют анализировать весь комплекс физических и химических процессов в единой интегрированной структуре.

В настоящем исследовании предлагается трёхмерная, современная и расширенная эйлерова модель адвекции-диффузии для описания распространения вредных веществ в условиях сложного рельефа и переменной погоды. Модель включает: оседание (седиментацию) по закону Стокса; химическое разложение с температурной зависимостью констант по уравнению Аррениуса; захват растительностью (как пассивный «сток»); вымывание дождём (*rainout*); рельеф-зависимое сопротивление потоку; турбулентную диффузию, параметризуемую по классам устойчивости Пасквилла-Гиффорда; учёт атмосферной устойчивости через длину Мони́на-Обухова.

Научная новизна состоит в интеграции всех перечисленных процессов в единую 3D-эйлерову модель с возможностью согласования параметров с текущими атмосферными условиями. Это обеспечивает высокоточную оценку рассеяния в рельефной местности, промышленных зонах, центрах городов и экологически уязвимых районах. В статье последовательно приводятся математическая форма записи модели, параметризации, расчётные сценарии и анализ распределения примесей в различных условиях рельефа.

2 Обзор литературы

Исследования по моделированию распространения атмосферных загрязнений охватывают широкий круг теоретических и вычислительных подходов. Ниже, опираясь на ключевые работы, излагаются научные основания применённых методов.

Arga [2] рассматривает эйлерову модель адвекции-диффузии для описания переноса примесей ветром и их перемешивания турбулентностью, включая физическую трактовку длины Мони́на-Обухова L , использование её для оценки класса устойчивости и методику расчёта коэффициентов диффузии.

Pasquill и Smith [5] разработали эмпирические параметры диффузии по классам устойчивости атмосферы (A–F); через пару (a, b) задаются зависимости поперечного и вертикального распространения, используемые до сих пор в теории и практике, включая данную работу.

Stull [6] глубоко анализирует турбулентность в приземном слое, тепловые потоки и скорость трения, что важно для прикладных расчётов в рамках теории Мони́на-Обухова. Seinfeld и Pandis [6] рассматривают фотохимические реакции и образование NO_x , VOC и O_3 ; уравнение Аррениуса используется для температурной зависимости констант реакций в членах $k_1C + k_2C^2$. Zannetti [4] показывает, как рассчитывать оседание частиц по формуле Стокса и излагает численные методы (конечно-разностные, upwind, полунейвные и др.).

Влияние сложного рельефа на ветровые поля и формирование зон повышенных концентраций изучалось Hanna et al. [8] и Holton [9]; в модели это учитывается функцией $R(x, y, z)$. Учёт захвата частиц растительностью базируется на подходе

Ravshanov et al. [1] (пассивный «сток»), мокрая депозиция – на параметризациях AERMOD [7]. Обзор Venkatram и Wyngaard [10] сопоставляет эйлеровы и лагранжевы подходы и эксперименты.

3 Постановка задачи

Загрязняющие вещества, поступающие из промышленных, транспортных или природных источников, распространяются в пространстве и времени под действием адвекции, диффузии, химических реакций, гравитационного оседания, взаимодействия с рельефом, захвата растительностью и вымывания дождём. Предлагаемая модель записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial u(x, y, z, t) C(x, y, z, t)}{\partial x} + \frac{\partial v(x, y, z, t) C(x, y, z, t)}{\partial y} + \frac{\partial w(x, y, z, t) C(x, y, z, t)}{\partial z}}_{(1)} = \\
 & = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial z} \right)}_{(2)} + \\
 & + \underbrace{S(x, y, z, t)}_{(3)} - \underbrace{(k_1 C(x, y, z, t) + k_2 C^2(x, y, z, t))}_{(4)} - \underbrace{v_s(x, y, z) \frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial z}}_{(5)} - \\
 & - \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(R(x, y, z) \frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(R(x, y, z) \frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(R(x, y, z) \frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial z} \right) \right)}_{(6)} - \\
 & - \underbrace{\Lambda(x, y, z, t) C(x, y, z, t)}_{(7)}.
 \end{aligned}$$

(1) – Адвекция, (2) – Диффузия, (3) – Эмиссия, (4) – Химические реакции, (5) – Осадконакопление, (6) – Эффект рельефа, (7) – Влажный вымывание.

Здесь $C = C(x, y, z, t)$ – концентрация; u, v, w – компоненты скорости ветра, получает из базы данных OWM; D_x, D_y, D_z – коэффициенты турбулентной диффузии; S – источник; k_1, k_2 – константы химической кинетики; v_s – скорость оседания по Стоксу; R – рельеф зависимый «сопротивляющий» член; Λ – коэффициент вымывания.

Начальные и граничные условия:

$$\begin{aligned}
 & C(x, y, z, t)|_{t=0} = C_0(x, y, z), \\
 & \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{x=L_x} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial y} \Big|_{y=L_y} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial z} \Big|_{z=L_z} = 0, \quad C|_{z=0} = 0.
 \end{aligned}$$

Параметризации. Компоненты скорости u, v, w – поля ветра. Коэффициенты диффузии берутся в виде зависимостей от расстояния с использованием пар (a, b) из классов устойчивости:

$$D_x(x) = D_y(y) = a_y^2 \cdot b_y \cdot x^{2b_y-1},$$

$$D_z(x) = a_z^2 \cdot b_z \cdot x^{2b_z-1}.$$

Коэффициенты a_y, b_y, a_z, b_z выбираются по классу устойчивости из табл. Таблица 2. Параметры Пасквилла-Гиффорта:

Класс	a_y	b_y	a_z	b_z
A	0.22	0.90	0.20	1.00
B	0.16	0.90	0.12	1.00
C	0.11	0.90	0.08	1.00
D	0.08	0.90	0.06	0.95
E	0.06	0.90	0.03	0.90
F	0.04	0.90	0.016	0.85

Оценка класса устойчивости. Используется показатель $\xi = z/L$:

$$\begin{aligned} \xi < -100 &\Rightarrow \text{A(очень неустойчиво)}, \\ -100 < \xi \leq -10 &\Rightarrow \text{B(неустойчиво)}, \\ -10 < \xi \leq -1 &\Rightarrow \text{C(слабо неустойчиво)}, \\ -1 < \xi < 0 &\Rightarrow \text{D(нейтрально, день)}, \\ 0 < \xi < 1 &\Rightarrow \text{D(нейтрально, ночь)}, \\ 1 \leq \xi < 10 &\Rightarrow \text{E(устойчиво)}, \\ \xi \geq 10 &\Rightarrow \text{F(очень устойчиво)}. \end{aligned}$$

Примечание: таблица даёт практическую шкалу; в инженерных оценках также используют схемы по ветру/облачности/инсоляции.

Длина Монины—Обухова (стр. 8):

$$L = -\frac{u_*^3 \rho c_p \bar{T}}{kgH},$$

где u_* – скорость трения; $\bar{T}$ – средняя температура (К); $k \approx 0.4$ – константа фон Кармана; $g = 9.81 \text{ м/с}^2$; H – поток явной теплоты; ρ – плотность воздуха; $c_p \approx 1005 \text{ Дж/(кг·К)}$.

Источник эмиссии (стр. 8): точечный $S(x, y, z, t) = Q \delta(x - x_s) \delta(y - y_s) \delta(z - z_s)$, где Q – мощность источника; для площадных/объёмных источников $S = \sum_i Q_i f_i(x, y, z, t)$.

Химическая кинетика:

$$k_1 = k_{1,0} \exp\left(-\frac{E_a}{RT(x, y, z, t)}\right), \quad k_2 = k_{2,0} \exp\left(-\frac{E_a}{RT(x, y, z, t)}\right),$$

где E_a – энергия активации, Дж/(моль·К).

Скорость оседания (Стокс):

$$v_s = \frac{2}{9} \frac{r_p^2 (\rho_p - \rho_a) g}{\mu},$$

r_p – радиус частицы; ρ_p – её плотность; ρ_a – плотность воздуха; μ – динамическая вязкость воздуха.

Рельеф-зависимое сопротивление:

$$R(x, y, z) = 1 + \beta \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \gamma \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2,$$

$h(x, y)$ – высота рельефа; β, γ – эмпирические коэффициенты.

Вымывание (rainout):

$$\Lambda(x, y, z, t) = \lambda_0 R_r(x, y, z, t),$$

λ_0 – эмпирический коэффициент (1/мм), R_r – интенсивность осадков (мм/ч).

4 Численное решение

Применяется конечно-разностный подход; для конвективных потоков используются схемы **Upwind** и **QUICK**, что повышает устойчивость и точность при расчёте временной эволюции. Область $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y] \times [0, L_z]$ дискретизируется равномерной сеткой: $i = 1, \dots, N_x, j = 1, \dots, N_y, k = 1, \dots, N_z$, шаги $\Delta x = L_x/N_x, \Delta y = L_y/N_y, \Delta z = L_z/N_z$, время $t^n = n\Delta t$ (стр. 10).

Для обеспечения устойчивости используется условие CFL для адвекции и диффузии (стр. 10):

$$\Delta t \leq \min \left(\frac{\Delta x}{|u|}, \frac{\Delta y}{|v|}, \frac{\Delta z}{|w|}, \frac{\Delta x^2}{2D_x}, \frac{\Delta y^2}{2D_y}, \frac{\Delta z^2}{2D_z} \right).$$

Далее уравнение дискретизируется по пространству и времени; потоковые члены в полушаговых узлах $(n + 1/2)$ аппроксимируются upwind/QUICK, диффузионные – центральными разностями; химия, оседание, рельефный и «вымывающий» члены включаются явно/полуживо.

$$\begin{aligned} C_{i,j,k}^{n+1} = & C_{i,j,k}^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} u_{i,j,k}^{n+1/2} \left(\begin{cases} 3C_{i,j,k}^n - 4C_{i-1,j,k}^n + C_{i-2,j,k}^n, u_{i,j,k}^{n+1/2} > 0 \\ -3C_{i,j,k}^n + 4C_{i+1,j,k}^n - C_{i+2,j,k}^n, u_{i,j,k}^{n+1/2} < 0 \end{cases} \right) - \\ & - \frac{\Delta t}{2\Delta y} v_{i,j,k}^{n+1/2} \left(\begin{cases} 3C_{i,j,k}^n - 4C_{i,j-1,k}^n + C_{i,j-2,k}^n, v_{i,j,k}^{n+1/2} > 0 \\ -3C_{i,j,k}^n + 4C_{i,j+1,k}^n - C_{i,j+2,k}^n, v_{i,j,k}^{n+1/2} < 0 \end{cases} \right) - \\ & - \frac{\Delta t}{2\Delta z} \left(w_{i,j,k}^{n+1/2} + v_{s,i,j,k}^{n+1/2} \right) \left(\begin{cases} *20l3C_{i,j,k}^n - 4C_{i,j,k-1}^n + C_{i,j,k-2}^n, w_{i,j,k}^{n+1/2} + v_s > 0 \\ -3C_{i,j,k}^n + 4C_{i,j,k+1}^n - C_{i,j,k+2}^n, w_{i,j,k}^{n+1/2} + v_s < 0 \end{cases} \right) + \\ & + \Delta t D_x^{n+1/2} \frac{C_{i+1,j,k}^n - 2C_{i,j,k}^n + C_{i-1,j,k}^n}{\Delta x^2} + \Delta t D_y^{n+1/2} \frac{C_{i,j+1,k}^n - 2C_{i,j,k}^n + C_{i,j-1,k}^n}{\Delta y^2} + \\ & + \Delta t D_z^{n+1/2} \frac{C_{i,j,k+1}^n - 2C_{i,j,k}^n + C_{i,j,k-1}^n}{\Delta z^2} + \Delta t S_{i,j,k}^{n+1/2} - \Delta t (k_1 C_{i,j,k}^n + k_2 (C_{i,j,k}^n)^2) - \\ & - \Delta t \Lambda_{i,j,k}^{n+1/2} C_{i,j,k}^n - \Delta t \left[\frac{1}{\Delta x^2} \left(R_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+1/2} (C_{i+1,j,k}^n - C_{i,j,k}^n) - R_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n+1/2} (C_{i,j,k}^n - C_{i-1,j,k}^n) \right) \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\Delta t \left[\frac{1}{\Delta y^2} \left(R_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+1/2} (C_{i,j+1,k}^n - C_{i,j,k}^n) - R_{i,j-\frac{1}{2},k}^{n+1/2} (C_{i,j,k}^n - C_{i,j-1,k}^n) \right) \right] - \\
 & -\Delta t \left[\frac{1}{\Delta z^2} \left(R_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+1/2} (C_{i,j,k+1}^n - C_{i,j,k}^n) - R_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{n+1/2} (C_{i,j,k}^n - C_{i,j,k-1}^n) \right) \right].
 \end{aligned}$$

Эксперименты

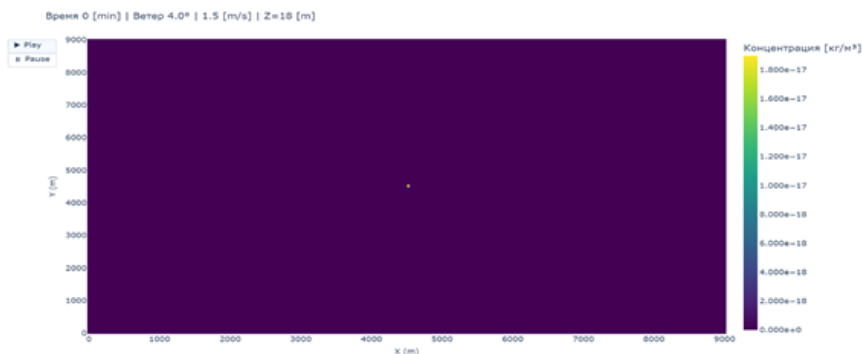


Рис. 1 Распределение концентрации по области

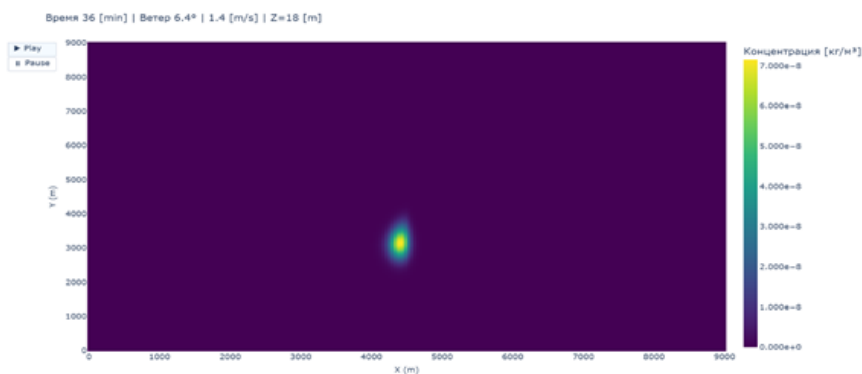


Рис. 2 Распределение концентрации по области

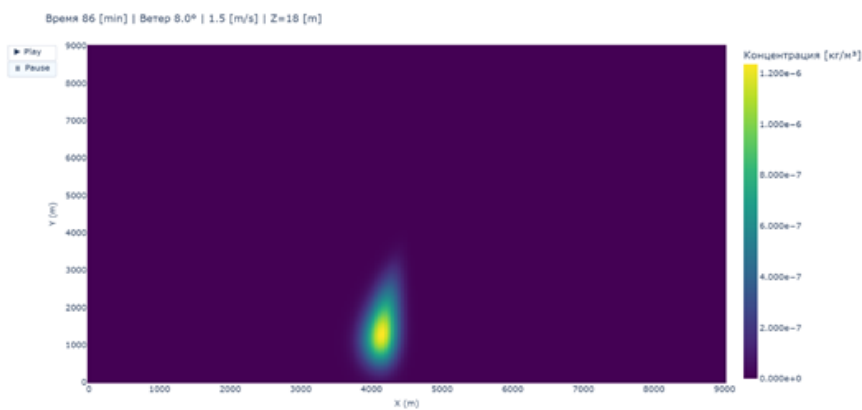


Рис. 3 Распределение концентрации по области

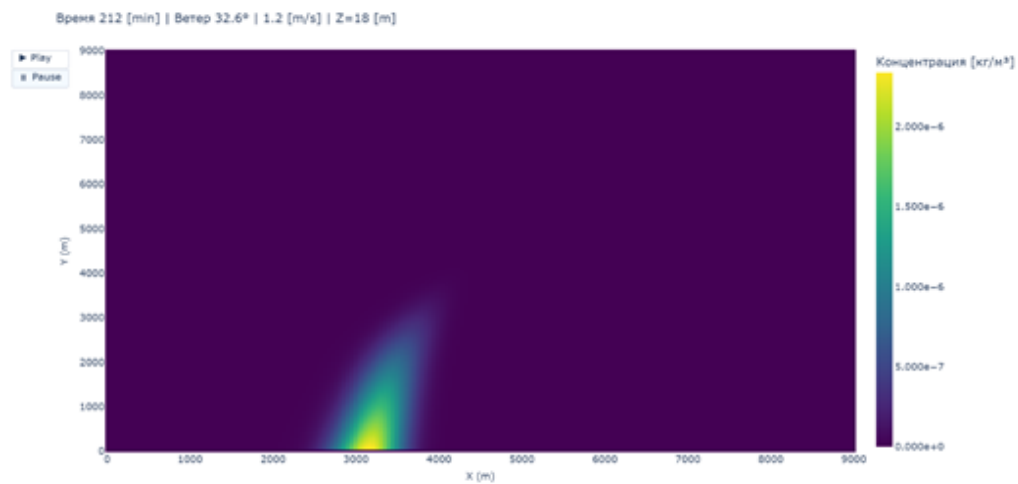


Рис. 4 Распределение концентрации по области

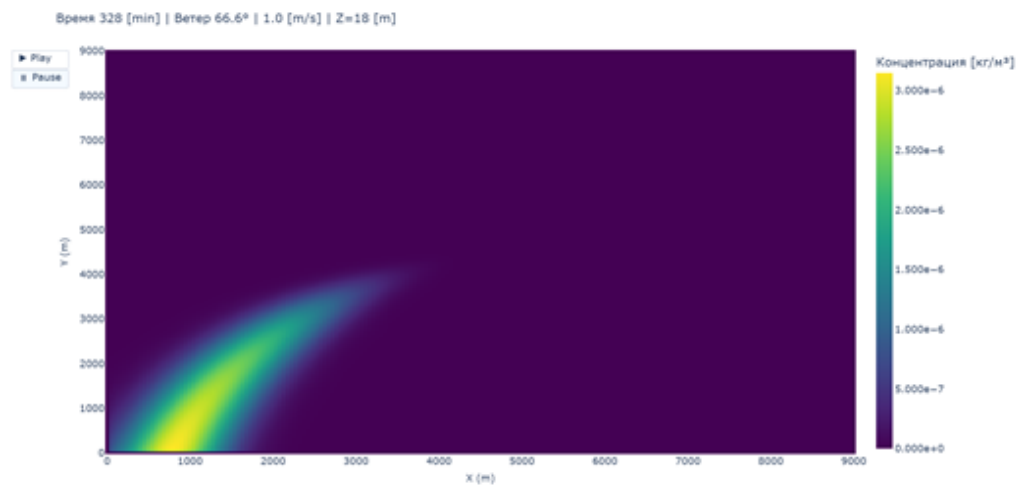


Рис. 5 Распределение концентрации по области

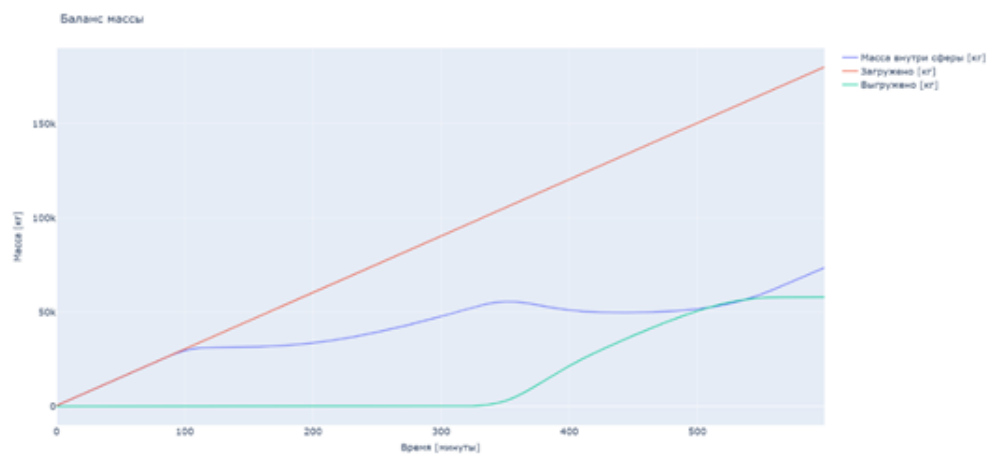


Рис. 6 Распределение концентрации по области

Рисунок 2-5: показано формирование шлейфов на 36, 56, 212, 328 минутах. Даны контурные карты для случаев, когда направления ветра приблизительно равны 6.4° , 8.0° , 32.4° и 66.4° , скорости 1.4, 1.5, 1.2 и 1.0 м/с соответственно. Видно, что с изменением направления ветра направление шлейфа также изменяется, в устойчивых условиях (Е-Ф) вертикальное распределение ослабевает, и могут появляться зоны высокой концентрации ближе к поверхности земли; в неустойчивых условиях (А-В) вертикальное смещение сильнее, и максимальные значения затухают быстрее с расстоянием. При этом на рисунке 6 мы можем видеть, что сохранение массы обеспечивает баланс как внутри области, так и для исходящих значений.

5 Заключение

Предложенная 3D-эйлерова модель дает достоверные результаты в сложных областях с параметризацией, связанной с классами Пасквилла-Гиффорда и длиной Монино-Обухова, путем добавления к уравнению адвекции-диффузии осаждения, химических реакций, вымывания, рельефа и растительных стоков. Проведены устойчивые расчеты на основе схем Upwind/QUICK и условия CFL; рисунки и графики (стр. 8-10) подтверждают гармоничное изменение геометрии шлейфа в зависимости от ветра, устойчивости и рельефа. Модель подходит для оценки риска промышленных выбросов и применения в городском планировании.

Литература

- [1] *Равшианов Н., Назаров Ш.Э., Боборахимов Б.* Моделирование процесса распространения загрязняющих веществ в атмосфере с учетом захвата частиц элементами растительности // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2024. – Т. 45, – № 3. – С. 1156–1169. (Scopus, IF=1.5).
- [2] *Арья С.П.* Метеорология и рассеяние загрязняющих веществ в атмосфере // Оксфорд: Oxford University Press, – 1999.
- [3] *Сейнфелд Дж.Х., Пандис С.Н.* Атмосферная химия и физика: от загрязнения воздуха до изменения климата // Нью-Йорк: Wiley, – 2016.
- [4] *Дзаннетти П.* Моделирование загрязнения воздуха: теории, вычислительные методы и доступное программное обеспечение // Берлин: Springer, – 1990.
- [5] *Паскуилл Ф., Смит Ф.Б.* Атмосферная диффузия // Нью-Йорк: Wiley, – 1983.
- [6] *Сталл Р.Б.* Введение в метеорологию пограничного слоя // Дордрехт: Kluwer Academic Publishers, – 1988.
- [7] Агентство по охране окружающей среды США (EPA). Модель AERMOD: формулировка и валидация // 2021. – Режим доступа: <https://www.epa.gov/scram/air-quality-dispersion-modeling>
- [8] *Ханна С.Р., Бриггс Г.А., Хоскер Р.П.* Руководство по атмосферной диффузии // – Вашингтон: Министерство энергетики США, – 1982.
- [9] *Хоултон Дж.Р.* Введение в динамическую метеорологию // Academic Press Амстердам: – 2004.
- [10] *Венкатрам А., Вингард Дж.К.* Лекции по моделированию загрязнения воздуха // American Meteorological Society. Бостон, – 1988.

UDC 519.6

MODELING THE DISPERSION OF POLLUTANTS IN THE ATMOSPHERE, ACCOUNTING FOR TERRAIN AND METEOROLOGICAL CONDITIONS

*Ravshanov N., Juraboeva O., *Boborakhimov B., Sharipov Kh.*

uzbekpy@gmail.com

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute,
17A, Buz-2, Tashkent, 100125 Uzbekistan.

This work proposes an expanded 3D Euler model for calculating the spatiotemporal evolution of pollutant concentrations released into the atmosphere under changing meteorological conditions. The model, alongside the advection-diffusion equation, combines in a single system: Stokes' law deposition (for solid particles), temperature-dependent chemical decomposition according to Arrhenius' law, retention by plants (passive sink), precipitation washout (rainout), terrain-dependent resistance, and parameterization of turbulent diffusion based on Pasquill-Gifford stability classes. The numerical solution employs upwind/QUICK convective fluxes, central difference diffusion, and a time step stabilized by the CFL criterion. Scenarios covering various wind directions and speeds demonstrate the role of terrain in flow direction and atmospheric-related dispersion characteristics. The model is mass-balanced.

Keywords: advection-diffusion, Pasquill-Gifford, Monin-Obukhov length, wet deposition, sedimentation (Stokes), vegetation sinks, terrain, Upwind/QUICK, CFL.

Citation: Ravshanov N., Juraboeva O., Boborakhimov B., Sharipov Kh. 2025. Modeling the dispersion of pollutants in the atmosphere, accounting for terrain and meteorological conditions. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 4(68):38-46.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.4_68.2025.01.

HISOBLASH VA AMALIY MATEMATIKA MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
PROBLEMS OF COMPUTATIONAL
AND APPLIED MATHEMATICS



ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 4(68) 2025

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Арипов М.М., Шадиметов Х.М., Ахмедов Д.Д.

Ответственный секретарь:

Убайдуллаев М.Ш.

Редакционный совет:

Азамов А.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Арушанов М.Л.,
Бурнашев В.Ф., Джумаёзов У.З., Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия),
Игнатъев Н.А., Ильин В.П. (Россия), Иманкулов Т.С. (Казахстан),
Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия), Карачик В.В. (Россия),
Курбонов Н.М., Маматов Н.С., Мирзаев Н.М., Мухамадиев А.Ш., Назирова Э.Ш.,
Нормуродов Ч.Б., Нуралиев Ф.М., Опанасенко В.Н. (Украина),
Расулмухамедов М.М., Расулов А.С., Садуллаева Ш.А.,
Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А., Хамдамов Р.Х.,
Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Чье Ен Ун (Россия), Шабозов М.Ш. (Таджикистан),
Dimov I. (Болгария), Li Y. (США), Mascagni M. (США), Min A. (Германия),
Singh D. (Южная Корея), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

Дизайн и вёрстка:

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 29.08.2025 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №6. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 4(68) 2025

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

Editor-in-Chief:

Ravshanov N.

Deputy Editors:

Aripov M.M., Shadimetov Kh.M., Akhmedov D.D.

Executive Secretary:

Ubaydullaev M.Sh.

Editorial Council:

Azamov A.A., Aloev R.D., Amirgaliev E.N. (Kazakhstan), Arushanov M.L.,
Burnashev V.F., Djumayozov U.Z., Zagrebina S.A. (Russia), Zadorin A.I. (Russia),
Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia), Imankulov T.S. (Kazakhstan), Ismagilov I.I. (Russia),
Kabanikhin S.I. (Russia), Karachik V.V. (Russia), Kurbonov N.M., Mamatov N.S.,
Mirzaev N.M., Mukhamadiev A.Sh., Nazirova E.Sh., Normurodov Ch.B., Nuraliev F.M.,
Opanasenko V.N. (Ukraine), Rasulov A.S., Sadullaeva Sh.A., Starovoitov V.V. (Belarus),
Khayotov A.R., Khaldjigitov A., Khamdamov R.Kh., Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh.,
Chye En Un (Russia), Shabozov M.Sh. (Tajikistan), Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA),
Mascagni M. (USA), Min A. (Germany), Singh D. (South Korea), Singh M. (South
Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the
Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.

The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.

Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

Address:

100125, Tashkent, Buz-2, 17A.

Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

E-mail: journals@airi.uz.

Web-site: <https://journals.airi.uz>.

Layout design:

Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.

Signed for print 29.08.2025

Format 60x84 1/8. Order No. 6. Print run of 100 copies.

Содержание

<i>Халдусигитов А., Адамбаев У., Тилозов О., Рахмонова Р., Махмадиерова М.</i> Сравнительный анализ численных методов решения задач теории упругости в напряжениях	8
<i>Нуралиев Ф.М., Тохиров Б.Н.</i> Комплексное математическое моделирование термо-электро-магнито-упругих процессов в анизотропных тонких пластинах сложной формы на основе ме- тода RFM	17
<i>Нормуродов Ч.Б., Зиякулова Ш.А.</i> Численное моделирование изгиба тонкой пластины с применением дискрет- ного варианта метода предварительного интегрирования	26
<i>Равшанов Н., Журабоева О., Боборахимов Б., Шарипов Х.</i> Моделирование распространения загрязняющих веществ в атмосфере с уче- том рельефа и метеорологических условий	38
<i>Саидов У., Жураев И., Туракулов Ж.</i> Моделирование процесса фильтрования малоконцентрированного раствора через пористую среду	47
<i>Муминов С.Ю.</i> Построение автомодельного решения системы нелинейных дифференциаль- ных уравнений, представляющих задачи взаимной диффузии.	56
<i>Ахмедов Д.М., Буваширов Д.С.</i> Оптимальная квадратурная формула для гиперсингулярных интегралов ти- па Адамара с высокой осцилляцией в пространстве Соболева	65
<i>Алоев Р.Д., Алимова В.</i> Исследование экспоненциальной устойчивости численного решения гипербо- лической системы с отрицательными нелокальными характеристическими скоростями	75
<i>Шадиметов Х.М., Нуралиев Ф.А., Едилбекова Р.М.</i> Система для нахождения оптимальных коэффициентов квадратурных фор- мул типа Эрмита с производными третьего порядка	88
<i>Нормуродов Ч.Б., Джураева Н.Т., Норматова М.М.</i> Исследование динамики производных дифференциального уравнения чет- вертого порядка с малым параметром при старшей производной	97
<i>Шадиметов Х.М., Нуралиев Ф.А., Миркомиллов Д.М.</i> Оптимальные квадратурные формулы для приближенного вычисления быст- роосциллирующих интегралов	110
<i>Игнатъев Н.А., Рамазонов Ш.Ш.</i> Отношение связанности в метрических алгоритмах классификации и анализ его свойств	122

Contents

<i>Khaldjigitov A., Adambaev U., Tilovov O., Rakhmonova R., Makhmadiygorova M.</i>	
Numerical solution of plane problems of the theory of elasticity directly in stresses	8
<i>Nuraliyev F.M., Tokhirov B.N.</i>	
Comprehensive mathematical modeling of thermo-electro-magneto-elastic processes in anisotropic thin plates of complex shape based on the RFM method	17
<i>Normurodov Ch.B., Ziyakulova Sh.A.</i>	
Numerical modeling of thin plate bending using a discrete version of the pre-integration method	26
<i>Ravshanov N., Juraboeva O., Boborakhimov B., Sharipov Kh.</i>	
Modeling the dispersion of pollutants in the atmosphere, accounting for terrain and meteorological conditions	38
<i>Saidov U., Juraev I., Turakulov J.</i>	
Modeling the process of filtering a low-concentration solution through a porous medium	47
<i>Muminov S.Y.</i>	
Construction of a self-similar solution to mutual diffusion problems.	56
<i>Akhmedov D.M., Buvashero D.S.</i>	
An optimal quadrature formula for Hadamard-type hypersingular integrals with high oscillation in the Sobolev space	65
<i>Aloev R.D., Alimova V.</i>	
Investigation of the exponential stability of the numerical solution of a hyperbolic system with negative nonlocal characteristic velocities	75
<i>Shadimetov Kh.M., Nuraliev F.A., Edilbekova R.M.</i>	
System for finding optimal coefficients of Hermite-type quadrature formulas with third-order derivatives	88
<i>Normurodov Ch.B., Juraeva N.T., Normatova M.M.</i>	
Study of the dynamics of derivatives of a fourth-order differential equation with a small parameter at the highest derivative	97
<i>Shadimetov X.M., Nuraliyev F.A., Mirkomilov D.M.</i>	
Optimal quadrature formulas for approximate calculation of fast oscillating integral	110
<i>Ignatiev N.A., Ramazonov Sh.Sh.</i>	
Relationship in metric classification algorithms and analysis of its properties	122