

УДК 519.632.4

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗГИБА ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ С ПРИМЕНЕНИЕМ ДИСКРЕТНОГО ВАРИАНТА МЕТОДА ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

**Нормуродов Ч.Б., Зиякулова Ш.А.*

**ch.normurodov@gmail.com*

Термезский государственный университет,
190111 Узбекистан, Термиз, ул. Баркамол авлод, дом 43.

Многие прикладные задачи описываются задачей Дирихле для уравнения Пуассона. Данная задача применяется в следующих практических ситуациях: прогиб мембраны, или пластины, электрический потенциал, гравитационный и магнитный потенциал, стационарное распределение температуры (диффузии), электронно-оптические системы. Хотя для численного решения уравнения Пуассона имеются как прямые, так и итерационные методы, однако вопрос об эффективности применения тех или иных методов остается актуальной. В данной работе исследуется изгиб тонкой пластины с применением дискретного варианта метода предварительного интегрирования по многочленам Чебышева первого рода. С помощью предлагаемого метода определяются величины изгиба пластины. Проведены численные расчёты демонстрирующие зависимости величины изгиба пластины от распределенной нагрузки и показывают высокую точность предлагаемого метода.

Ключевые слова: изгиб пластины, распределение нагрузки, полиномы Чебышева, дискретный вариант метода предварительного интегрирования, высокая точность, эффективность.

Цитирование: Нормуродов Ч.Б., Зиякулова Ш.А. Численное моделирование изгиба тонкой пластины с применением дискретного варианта метода предварительного интегрирования // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2025. – № 4(68). – С. 26-37.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.4_68.2025.04.

1 Введение

В статье [1] предложен новый релаксационный анализ и две схемы ускорения для пятиточечного сглаживания Гаусса-Зейделя в многосеточном режиме для решения двумерного уравнения Пуассона. Для многосеточного V – образного цикла автором статьи обнаружено, что недостаточное расслабление применимо к половине цикла ограничения, а чрезмерное расслабление применимо к половине цикла интерполяции. Численные эксперименты с использованием модифицированных многосеточных алгоритмов V – цикла показывают, что предлагаемые простые схемы ускорения ускоряют скорость сходимости на целых 34% при незначительных затратах. Существование решения уравнения Пуассона на полных многообразиях с положительным спектром и кривизной Риччи, ограниченной снизу исследовано в [2]. Результат применен к уравнению Пуассона для изучения существования гармонических отображений между полными многообразиями, а также существования метрик Эрмита-Эйнштейна на голоморфных векторных расслоениях над полными многообразиями. В задаче об обратном источнике для уравнения Пуассона измерения на

границах области используются для восстановления источников внутри области [3], задача рассмотренная в этой статье является ошибкам моделирования области. Эти ошибки могут быть, например, ошибками границ, структуры и свойств материала. Авторами статье исследована, можно ли использовать недавно предложенный байесовский подход к погрешности аппроксимации для уменьшения ошибок оценки источника при использовании приближенной модели для предметной области. В статье [4] представлен метод дискретизации для многомерного распределения Дирака. Авторы показали применимость метода в контексте задач интегрирования и для дискретизации распределенных по Дираку исходных элементов в уравнениях Пуассона с постоянными или переменными коэффициентами диффузии. Представлены процедуры построения сходимости и приведены различные численные примеры, включая многомасштабные задачи, которые неразрешимы с однородными сетками. Идея использования дифференциальной квадратуры для построения нового алгоритма решения дифференциальных уравнений изложена в [5]. Метод основан на выборе точек, смешанных из точек сетки и средних точек однородного разбиения. В качестве тестовой задачи были решены некоторые примеры бигармонических уравнений и уравнений Пуассона в двухмерном и трехмерном формате. Результаты сравниваются с некоторыми существующими методами, чтобы показать эффективность и быстроедействие предложенного алгоритма. Диссертационная работа [6] посвящена разработке аналитических методов для эллиптических уравнений в частных производных с условиями, наложенными на внутренние границы. Внутренние границы образуются там, где материалы с различными свойствами встречаются, образуя границы раздела. Эти интерфейсы возникают в различных физических и инженерных задачах, например, при испарении капель воды, двойных сферах из диэлектрика и каплях Януса из мягких материалов. В работе основное внимание сосредоточено на четырех важных эллиптических задачах: Лапласа, Пуассона, бигармоническом потоке и потоке Стокса. В статье [7] схема распределенных источников изучается с использованием двумерного метода конечных элементов, а также проводится экспериментальная проверка. Численное решение, полученное с помощью метода конечных элементов, сравнивается с приближенным решением, полученным на основе интегральных уравнений, по всей вычислительной области для анализа ошибок. В исследовании [8] рассматривается важность усовершенствования традиционных систем расчета расхода жидкости путем внедрения процедуры машинного обучения для моделирования полей давления, вычисляемых стандартными системами расчета расхода жидкости. Традиционный подход предполагает обеспечение связи давления и скорости с помощью уравнения Пуассона, объединяющего уравнения Навье–Стокса и уравнения неразрывности. Решение уравнения Пуассона составляет существенный процент от общих вычислительных затрат при моделировании потока жидкости, поэтому повышение его эффективности его решения может привести к значительному увеличению скорости вычислений. Основной целью вышеуказанного исследования является создание универсального метода, применимого к любой геометрии, который в конечном итоге станет более эффективной альтернативой традиционному вычислителю давления. Введение нового усеченного конечного элемента, охватывающий традиционный усеченный треугольник в качестве частного примера изложено в [9]. Устанавливая идентификатор слабой непрерывности, определяется его как критический для оценки погрешности. Этот элемент используется для аппроксимации модифицированного уравнения Пуассона, определенного на выпуклом многограннике, полученного на основе нелокальной модели электростатики. Обоснована равномерная

оценка погрешности и проведены численные тесты для гладкого решения, так и для решения с резким пограничным слоем, которые согласуются с теоретическими результатами. В статье [10] анализируются модифицированные предварительные условия типа ILU (MILU) для эффективного решения уравнения Пуассона с граничными условиями Дирихле в нерегулярных областях. По мнению авторов, секторизованный MILU не только обеспечивает лучшее число условий, чем обычный MILU, но и повышает эффективность параллельных вычислений, обеспечивая очень эффективные вычисления при значительном увеличении размерности или сложности задачи. Разделение P- и S-волн играет важную роль в гибкой обратной миграции во времени, поэтому в статье [11] предлагается эффективный метод разделения волновой моды для анизотропных сред с использованием скалярного анизотропного оператора Пуассона в пространственной области. Численные примеры также показывают, что волны P и S, разложенные этим методом, не только имеют правильную амплитуду и фазу относительно входного волнового поля, но и могут значительно снизить вычислительную сложность. В работе [12] представлен контролируемый метод аппроксимации решения дискретизированного уравнения Пуассона в виде линейной системы с использованием графовых нейронных сетей. Нейронная сеть предназначена для нахождения решения уравнения Пуассона для каждого временного шага в трехмерном численном моделировании плазмы, которое моделируется с использованием большой неструктурированной сетки. Уравнение Пуассона представляет собой эллиптическую задачу, которая представляет собой одну из наиболее значительных вычислительных затрат, связанных с моделированием плазмы. Эффективные численные схемы для решения уравнения Пуассона с учетом скачкообразных условий представляют большой интерес для решения различных задач, включая моделирование явлений электропороции и нитевидных разрядов, поэтому в статье [13] предлагается модификацию схемы с конечным объемом, а именно дискретный метод двойного конечного объема, для учета условий скачка с поверхностными зарядами, т.е. с исходным членом. Проведенные численные тесты демонстрируют сходимость второго порядка даже при сильно искаженных сетках. В статье [15] предлагается локализованный метод Эрмита приближенных частных решений для решения уравнения Пуассона. Используя частные решения радиальных базисных функций, в предлагаемом методе используются смешанные базисные функции, объединяющие радиальные базисные функции и их частные решения для оператора Лапласа в локальных шаблонах для одновременного использования. Численные эксперименты показывают, что предлагаемый подход значительно повышает точность. В статье [16] предлагается разностный метод конечных элементов для решения уравнения Пуассона в четырехмерной области. Метод сочетает конечно-разностную дискретизацию, основанную на -элементе в третьем и четвертом направлениях, с дискретизацией конечных элементов, основанной на -элемент в других направлениях. Для проверки точности и эффективности предлагаемого метода авторы предоставляют три числовых примеров.

В статье [17] отлучено, что прямое измерение натяжения швартовного троса для морских ветряных труб часто сопряжено с большими затратами и для решения этой задачи в рассматриваемой статье основное внимание уделяется прогнозированию натяжения швартовного троса с использованием доступных данных о движении с платформы. С этой целью авторы предлагают использовать алгоритмы глубокого обучения, в частности усовершенствованную модель нейронной сети, для отслеживания движений платформы с шестью степенями свободы в экстремальных морских условиях. Эта модель демонстрирует надежную прогностическую эффективность в боль-

шинстве морских условий. Однако он сталкивается со значительными трудностями при работе с короткими периодами волн, когда сильная нелинейность и нестационарность системы препятствуют способности нейронной сети точно улавливать особенности и прогнозировать натяжение причального троса. Чтобы преодолеть эти трудности, авторы предлагают два метода оптимизации, которые используют полиномы Чебышева, известные своим быстрым и эффективным отслеживанием общих тенденций, особенно в отношении низких частот. В статье [18] представлена дробная версия уравнения Гинзберга–Ландау с использованием производной Капуто–Адамара. Для решения этой проблемы разработан численный метод, основанный на сдвинутых многочленах Чебышева. Сходимость разработанного метода тщательно проверена как теоретически, так и численно, что подтверждается тремя наглядными численными примерами. Для произвольного заданного диапазона многомерных многочленов Чебышева высокой размерности представлен подход к построению пространственных дискретизаций, т.е. к построению набора выборок, который позволяет однозначно реконструировать каждый многочлен этого диапазона [19]. В данной статье представленный сочетает в себе три различных типа эффективности. Во-первых, построение пространственной дискретизации должно быть вычислительно эффективным с точки зрения размерности диапазона многочленов Чебышева. Во-вторых, построенная дискретизация должна быть эффективной для выборки, т.е. количество узлов выборки в построенной дискретизации должно быть достаточно низким. В-третьих, должен существовать эффективный алгоритм для однозначного восстановления полинома из заданных значений выборки в узлах выборки дискретизации. Численные тесты, которые дискретизируют интервалы многомерных многочленов Чебышева в зависимости от более чем 50 пространственных переменных, подтверждают теоретические результаты и значимость улучшений. В статье [20] предлагается новая функция формы для метода без сетки путем объединения скользящего кригинга и интерполяции Чебышева, называемой интерполяцией движущегося кригинга Чебышева. Этот подход повышает точность численных решений за счет использования многочленов Чебышева вместо традиционных многочленов. Кроме того, полиномы Чебышева используются для представления теории сдвиговой деформации высшего порядка, называемой теорией сдвиговой деформации Чебышева. Ключевым преимуществом рассматриваемой деформации является его способность автоматически удовлетворять условию нулевого напряжения сдвига как в верхней, так и в нижней части пластины. Точность численных решений оценивается путем сравнения их с результатами трехмерной теории упругости и других теорий деформации сдвигом. В статье [21] рассматривается использование полиномов Чебышева и теории Теплица для изучения топологических метаматериалов. Рассмотрены как эрмитовы, так и неэрмитовы системы субволновых резонаторов и предоставлены математические основы для количественного объяснения и характеристики некоторых впечатляющих свойств метаматериалов. Предлагаемые характеристики основаны на свойствах трансляционной инвариантности емкостных матриц, связанных с различными исследованными системами резонаторов, а также на свойствах полиномов Чебышева. Показано, что трехчленное рекуррентное соотношение, удовлетворяющее полиномам Чебышева, является ключом к математическому анализу спектров трехдиагональных (возмущенных) обоих Теплиц (для мономерных систем) и 2-теплицевые (для димерных систем) емкостные матрицы. В статье [22] спектрально-сеточный метод по полиномам Чебышева первого рода применяется для численного решения уравнения Орра–Зомерфельда. В монографии [23] изложено спектрально-сеточный метод с

полинома Чебышева первого рода для численного моделирования проблемы гидродинамической устойчивости для однофазных и двухфазных потоков. В статье [24] теоретически обоснована спектрально-сеточный метод при решении начально-краевой задачи для уравнения Бюргерса. Сходимость непрерывного варианта метода предварительного интегрирования при решении нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка с малым параметром при старшей производной изложена в [25]. В статье [26] дискретный вариант метода предварительного интегрирования применён к численному решению эллиптических уравнений. Показано, высокая точность к эффективности предлагаемого метода.

2 Постановка задачи

Рассмотрим тонкую пластину в прямоугольной области $\bar{D} = \{-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$, расположенной в координатной плоскости. Пластина изгибается в результате распределенной нагрузки $f(x, y)$, действующей на пластину. Функция изгиба $u(x, y)$ характеризуется уравнением Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x, y). \quad (1)$$

Все края пластины плотно фиксируются. В этом случае граничными условиями являются:

$$\begin{aligned} u(-1, y) &= 0, u(1, y) = 0, \\ u(x, -1) &= 0, u(x, 1) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Точное решение дифференциальной задачи (1)- (2) ищем методом пробных функций. В качестве точного решения задачи (1)- (2) выберем функцию

$$u_a(x, y) = \sum_{n=1,3,5}^N \sum_{m=1,2,3}^M \frac{5000 \cdot 4096}{n^3 m^3 \pi^8 (n^2 + m^2)} \sin\left(\frac{n\pi(x+1)}{2}\right) \sin\left(\frac{m\pi(y+1)}{2}\right). \quad (3)$$

Вычисляем частные производные от этой функции:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= - \sum_{n=1,3,5}^N \sum_{m=1,2,3}^M \frac{5000 \cdot 4096}{n^3 m^3 \pi^8 (n^2 + m^2)} \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi(x+1)}{2}\right) \sin\left(\frac{m\pi(y+1)}{2}\right), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= - \sum_{n=1,3,5}^N \sum_{m=1,2,3}^M \frac{5000 \cdot 4096}{n^3 m^3 \pi^8 (n^2 + m^2)} \left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi(x+1)}{2}\right) \sin\left(\frac{m\pi(y+1)}{2}\right). \end{aligned}$$

Подставляя найденные выражения для частных производных в уравнению (1) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= - \sum_{n=1,3,5}^N \sum_{m=1,2,3}^M \left\{ \frac{5000 \cdot 4096}{n^3 m^3 \pi^8 (n^2 + m^2)} \left[\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 \right] \right. \\ &\quad \cdot \left. \sin\left(\frac{n\pi(x+1)}{2}\right) \sin\left(\frac{m\pi(y+1)}{2}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Затем имея в виду, что

$$\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4}(n^2 + m^2).$$

Коэффициент формулы (4) в фигурной скобке можно представить в следующем виде

$$\frac{5000 \cdot 4096}{n^3 m^3 \pi^8 (n^2 + m^2)} \cdot \frac{\pi^2}{4} (n^2 + m^2) = \frac{5000 \cdot 1024}{n^3 m^3 \pi^6}. \quad (5)$$

Согласно свойством суммы под знаком суммы в (4) стоит произведение функций, зависящих каждая от своего индекса, т.е. $\sum_{n,m} A_n B_m = (\sum_n A_n) \cdot (\sum_m B_m)$. Если коэффициент A_n не зависит от m , а B_m не зависит от n как и в нашем рассматриваемом случае $A_n = \frac{\sin(\frac{n\pi(x+1)}{2})}{n^3}$, $B_m = \frac{\sin(\frac{m\pi(y+1)}{2})}{m^3}$, двойной ряд в формуле (4) раскладывается в произведение двух одномерных рядов.

Тогда формула (4) записывается в следующем вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -5000 \cdot \sum_{n=1,3,5}^N \frac{\sin\left(\frac{n\pi(x+1)}{2}\right)}{n^3} \cdot \sum_{m=1,3,5}^M \frac{\sin\left(\frac{m\pi(y+1)}{2}\right)}{m^3} \cdot \frac{1024}{\pi^6}. \quad (6)$$

Из свойств разложения по рядов Фурье известно, что

$$\sum_{n=1,3,5}^N \frac{\sin\left(\frac{n\pi(x+1)}{2}\right)}{n^3} \cdot \frac{32}{\pi^3} = (1 - x^2), \quad (7)$$

и аналогичная формула для по переменной y имеет вид

$$\sum_{m=1,3,5}^M \frac{\sin\left(\frac{m\pi(y+1)}{2}\right)}{m^3} \cdot \frac{32}{\pi^3} = (1 - y^2). \quad (8)$$

Тогда окончательно формула (6) принимает следующей вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -5000(1 - x^2)(1 - y^2). \quad (9)$$

Отсюда имеем выражение для распределенной нагрузки

$$f(x, y) = 5000(1 - x^2)(1 - y^2). \quad (10)$$

Таким образом, для дифференциальной задачи (1)- (2) точное решение (пробная функция) определяется по формуле (3) а правая часть по формуле (10).

3 Метод решения

Для приближенного решения дифференциального уравнения (1) с краевыми условиями (2), применяем дискретный вариант метода предварительного интегрирования где частные производные в левой части уравнения (1) и функция в правой части $f(x, y)$ представляется в виде двойного ограниченного ряда по многочленам Чебишева первого рода. Граничные условия (2) также записываются в виде рядов. В результате получается система линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов приближенного решения задачи (1)- (2). Затем сравнивается точное решение $u_a(x, y)$ в узлах коллокации полиномов Чебишева и

приближенное решение $u_e(x, y)$, полученное дискретным вариантом метода предварительного интегрирования. Таким образом, частные производные и правая часть представляются в виде следующих рядов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \sum_{i=0}^N ' \sum_{j=0}^M ' a_{ij}^{(2x)} T_i(x) T_j(y), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sum_{i=0}^N ' \sum_{j=0}^M ' a_{ij}^{(2y)} T_i(x) T_j(y), \\ f(x, y) &= \sum_{i=0}^N ' \sum_{j=0}^M ' g_{ij} T_i(x) T_j(y), \end{aligned} \quad (11)$$

где $T_i(x)$, $T_j(y)$ – полиномы Чебышева первого рода, штрих над суммой означает, что коэффициенты рядов a_{ij} , g_{ij} берется со множителем $\frac{1}{4}$ когда $i = j = 0$, эти коэффициенты берется со множителем $\frac{1}{2}$ когда $i = 0$ или $j = 0$. Теперь подставляя ряды (11) в уравнению (1), имеем

$$\sum_{i=0}^N ' \sum_{j=0}^M ' a_{ij}^{(2x)} T_i(x) T_j(y) + \sum_{i=0}^N ' \sum_{j=0}^M ' a_{ij}^{(2y)} T_i(x) T_j(y) = - \sum_{i=0}^N ' \sum_{j=0}^M ' g_{ij} T_i(x) T_j(y).$$

Затем, приравнявая коэффициенты на одинаковых степенях полиномов получим следующую алгебраическую систему

$$a_{ij}^{(2x)} + a_{ij}^{(2y)} = -g_{ij}. \quad (12)$$

Для предварительного интегрирования уравнения (12) по переменным “ x ” и “ y ” существуют следующие рекуррентные формулы, которые уменьшают порядок производных:

$$\begin{aligned} a_{ij}^{((k-1)x)} &= \frac{a_{i-1,j}^{(kx)} - a_{i+1,j}^{(kx)}}{2i}, \\ a_{ij}^{((k-1)y)} &= \frac{a_{i,j-1}^{(ky)} - a_{i,j+1}^{(ky)}}{2j}. \end{aligned} \quad (13)$$

Кроме того, для определения коэффициентов в правой части g_{ij} уравнение (12) по известной функции $f(x, y)$ имеются дискретное обратное преобразование многочленов Чебышева в узлах коллокации $x_l = \cos \frac{\pi l}{N}$, ($l = 0, 1, \dots, N$) и $y_k = \cos \frac{\pi k}{M}$, ($k = 0, 1, \dots, M$):

$$g_{ij} = \frac{4}{MNc_i c_j} \sum_{l=0}^N \sum_{k=0}^M \left(\frac{1}{c_l c_k} f(x_l, y_k) T_i(x_l) T_j(y_k) \right), \quad i = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, M, \quad (14)$$

здесь $c_0 = c_N = c_M = 2$, $c_m = 1$, $m = 1, 2, \dots, N-1$, $c_t = 1$, $t = 1, 2, \dots, M-1$.

После двухкратного последовательного интегрирования уравнения (12) для частных производных формируется конечный ряд по многочленам Чебышева, который используется для определения коэффициентов приближенного решения дифференциального уравнения (1):

$$u_t(x, y) = \sum_{i=0}^N ' \sum_{j=0}^M ' a_{ij} T_i(x) T_j(y), \quad (15)$$

где a_{ij} ($i = 0, 1, \dots, N; j = 0, 1, \dots, M$) – неизвестные коэффициенты ряда (15), общая количество этих неизвестных равны $K = (N + 1)(M + 1)$. Для определения неизвестных коэффициентов уравнение (12) «интегрируется» дважды с помощью формулы (13), как по переменной “ x ”, так и по “ y ”. Здесь приведем только первый шаг интегрирования по переменной “ x ”:

$$a_{ij}^{(x)} + \frac{a_{i-1,j}^{(2y)} - a_{i+1,j}^{(2y)}}{2i} = - \left(\frac{g_{i-1,j} - g_{i+1,j}}{2i} \right).$$

После выполнения всех операций интегрирования и требования удовлетворения краевых условий для приближенного решения (15) приводит к следующей системе линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов разложения a_{ij} :

$$\left\{ \begin{array}{l} 4i(i^2 - 1)((j + 1)a_{i,j-2} - 2ja_{i,j} + (j - 1)a_{i,j+2}) + \\ + 4j(j^2 - 1)((i + 1)a_{i-2,j} - 2ia_{i,j} + (i - 1)a_{i+2,j}) = \\ = -((i + 1)((j + 1)g_{i-2,j-2} - 2jg_{i-2,j} + (j - 1)g_{i-2,j+2}) - 2i((j + 1)g_{i,j-2} - \\ - 2jg_{i,j} + (j - 1)g_{i,j+2}) + \\ + (i - 1)((j + 1)g_{i+2,j-2} - 2jg_{i+2,j} + (j - 1)g_{i+2,j+2})), (i = \overline{2, N}, j = \overline{2, M}), \\ a_{1j} + a_{3j} + \dots + a_{2M-1,j} = 0, (j = \overline{2, M}), \\ \frac{1}{2}a_{0j} + a_{2j} + a_{4j} + \dots + a_{2M,j} = 0, (j = \overline{2, M}), \\ a_{i1} + a_{i3} + a_{i5} + \dots + a_{i,2M-1} = 0, (i = \overline{0, N}), \\ \frac{1}{2}a_{i0} + a_{i2} + a_{i4} + \dots + a_{i,2M} = 0, (i = \overline{0, N}). \end{array} \right. \quad (16)$$

Систему (16) удобно записать в матричном виде

$$Ax = b, \quad (17)$$

где A – квадратная матрица порядка $K \times K$, здесь $K = (N + 1) \cdot (M + 1)$ состоящая из коэффициентов системе (16), $x^T = (a_{00}, a_{10}, \dots, a_{N0}, a_{01}, a_{11}, \dots, a_{N1}, \dots, a_{0M}, a_{1M}, \dots, a_{NM})$ искомый вектор для неизвестных, b – правая часть системы (16). Решая систему (16) определяются коэффициенты a_{ij} ($i = 0, 1, \dots, N; j = 0, 1, \dots, M$), затем по формулам (3) вычисляются значения точного решения, а по формуле (15) значения приближенного решения в коллокационных узлах полиномов Чебышева.

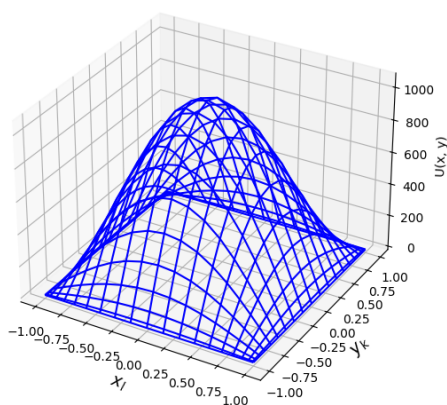
4 Обсуждение результатов

Приведем результаты численных расчётов по исследованию величины изгиба пластины вышеизложенным дискретным вариантом метода предварительного интегрирования.

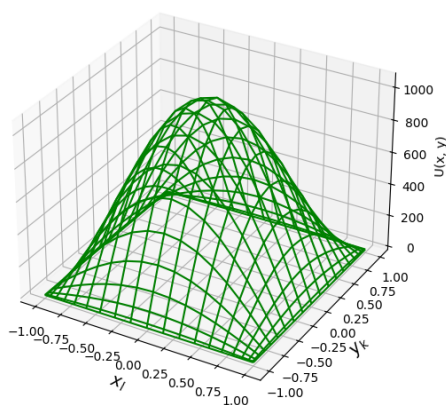
В таблица приведены результаты сравнения точного $u_e(x, y)$ и приближенного решения $u_a(x, y)$ в зависимости от количества аппроксимирующих полиномов как по переменной “ x ”, так и по переменной “ y ” изменяющихся в следующем диапазоне: $N = M = 20, 30, 40, 50$. Видно, что при выбранных значениях полиномов Чебышева максимальная абсолютная погрешность для приближенного решения уменьшаются увеличением числа аппроксимирующих полиномов.

Таблица 1. Сравнение точного и приближенного решения

Результаты расчётов для точного решения $u(x, y)$						
N	M	x_l $l = \overline{0, N}$	y_k $k = \overline{0, M}$	Значения точного решения $u_e(x, y)$	Значения приближенного решения $u_a(x, y)$	Максимальная абсолютная погрешность
20	20	2	10	84.45715415356193	84.45848983845289	0.00134
30	30	2	15	37.749559035230476	37.74984700057164	0.00029
40	40	20	2	21.27214983025499	21.27223237001555 5	$8.25 \cdot 10^{-5}$
50	50	47	25	30.601440927216924	30.60147711915051	$3.62 \cdot 10^{-5}$

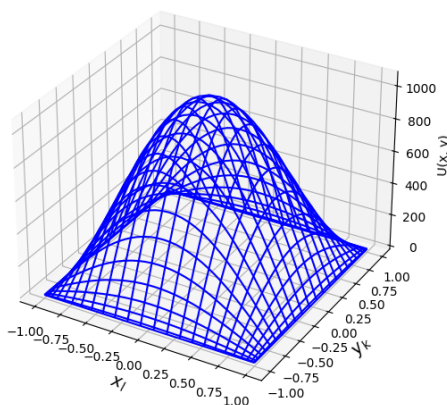


а) точное решения

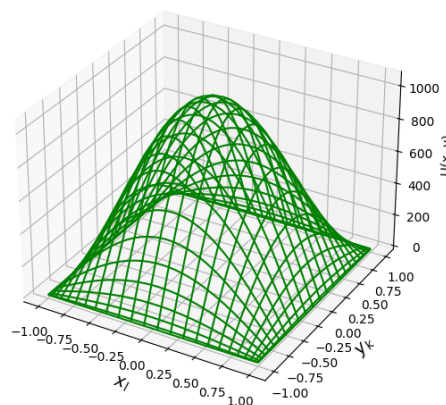


б) приближенное решение

Рис. 1 Графики пробной функции



а) точное решения



б) приближенное решение

Рис. 2 Графики функции при $N = M = 50$

Проведенные численные результаты показывают, что значения функции изгиба положительны. Это означает, что пластина загибается вверх. Результаты таблицы наиболее наглядно иллюстрируются на рис.1-2. На рис.1 приведены графики точного и приближенного решения для выбранной пробной функции $u_e(x, y)$, когда значения число полиномов равным $N = M = 20$.

Аналогичные результаты получаются и в случае когда число аппроксимирующих полиномов $N = M = 50$. Данные результаты графически иллюстрированы на рис.2.

5 Заключение

В заключении можно отметить следующие основные моменты. Задача изгиба тонкой пластины численно моделирован с применением дискретного варианта метода предварительного интегрирования с полиномами Чебышева первого рода. С помощью предлагаемого метода краевая задача для уравнения Пуассона сведена к алгебраической задачи для определения неизвестных коэффициентов разложения. Выбрано точное решение (пробная функция) для дифференциальной задачи, и оно сравнено с приближенным решением полученным предлагаемым методом в коллокационных узлах полиномов Чебышева. Вычислены максимальные абсолютные погрешности для точного и приближенного решения в зависимости от число аппроксимирующих полиномов Чебышева, которые показывают высокую точность метода. Построены графики для приближенного и точного решения, из этих графиков видно, что пластина загибается вверх при заданной распределенной нагрузке, так как значения функции изгиба положительны при произвольных числах аппроксимирующих полиномов.

Литература

- [1] *Jun Zhang* Acceleration of five-point red-black Gauss-Seidel in multigrid for Poisson equation. Applied Mathematics and Computation. – 1996. – Vol. 80. – № 1. – P. 73–93. [https://doi.org/10.1016/0096-3003\(95\)00276-6](https://doi.org/10.1016/0096-3003(95)00276-6).
- [2] *Ovidiu Munteanu, Natasa Sesum* The Poisson equation on complete manifolds with positive spectrum and applications. // Advances in Mathematics. – 2010. – Vol. 223. – № 1. – P. 198–219. <https://doi.org/10.1016/j.aim.2009.08.003>.
- [3] *Alexandra Koulouri, Ville Rimpiläinen, Mike Brookes, Jari P. Kaipio*. Compensation of domain modelling errors in the inverse source problem of the Poisson equation: Application in electroencephalographic imaging // Applied Numerical Mathematics. – 2016. – P. 24–36. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2016.01.005>
- [4] *Raphael Egan, Frédéric Gibou*. Geometric discretization of the multidimensional Dirac delta distribution – Application to the Poisson equation with singular source terms. // Journal of Computational Physics – 2017. – Vol. 346. – P. 71–90. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2017.06.003>.
- [5] *Ghasemi M.* Spline-based DQM for multi-dimensional PDEs: Application to biharmonic and Poisson equations in 2D and 3D. // Computers and Mathematics with Applications. – 2017. – Vol. 73. – P. 1576-1592. <http://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2017.02.006> .
- [6] *Zhang, Chengzhao* Analytic Solutions to the Laplace, Poisson, and Biharmonic Equations with Internal Boundaries: Theory and Application to Microfluidic Dynamics. // THES. – 2021. – P. 1–142.
- [7] *Nithin Kumar Goona, Saidi Reddy Parne* Distributed source scheme for Poisson equation using finite element method. // Journal of Computational Science. – Vol. 72. – P. 1–10. <https://doi.org/10.1016/j.jocs.2023.102103>.

- [8] *Paulo Sousa, Alexandre Afonso, Carlos Veiga Rodrigues* Application of machine learning to model the pressure poisson equation for fluid flow on generic geometries. // Neural Computing and Applications. – 2024. – Vol. 36. – P. 16581–16606. <https://doi.org/10.1007/s00521-024-09935-0>.
- [9] *Li Hongliang, Pingbing Ming* The TRUNC element in any dimension and application to a modified Poisson equation. // Book. – 2024. – P. 1–18. DOI:10.48550/arXiv.2409.00748
- [10] *Geonho Hwang, Yesom Park, Yueun Lee, Myungjoo Kang*. Analysis of efficient preconditioner for solving Poisson equation with Dirichlet boundary condition in irregular three-dimensional domains. // Journal of Computational Physics. – 2024. – Vol. 519. – P. 1–22. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2024.113418>.
- [11] *Xin-Yu Fang, Gang Yao, Qing-Qing Zheng, Ping-Min Zhang, Di Wu, Feng-Lin Niu*. Helmholtz decomposition with a scalar Poisson equation in elastic anisotropic media. // Petroleum Science – 2024. – Vol. 21. – P. 1597 –1610. <https://doi.org/10.1016/j.petsci.2023.12.007>.
- [12] *Vigot G., Cuenot B., Vermorel O. and Bauerheim M.* Graph neural networks for computational plasma physics on unstructured grids: application to approximate the Poisson equation for Hall-Effect Thrusters modeling // Journal of Electric Propulsion. – 2025. – Vol. 4(1): – P. 1–24 <https://doi.org/10.1007/s44205-025-00146-w>.
- [13] *Thomas Bonnafont, Delphine Bessieres, Jean Paillol* A finite volume method to solve the Poisson equation with jump conditions and surface charges: Application to electroporation. // Journal of Computational Physics. – 2024. – Vol. 504. – P. 1–22. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2024.112862>.
- [14] *Li X.Y., Wu B.Y.* Fast and highly accurate reproducing kernels based approach for Poisson equation. // Applied Mathematics Letters. – 2025. – Vol. 171. – P. 1–5. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2025.109636>.
- [15] *Kwesi Acheampong, Huiqing Zhu* Localized Hermite method of approximate particular solutions for solving the Poisson equation // Applied Mathematics Letters – 2025. – Vol. 164. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2025.109471>.
- [16] *Yaru Liu, Yinnian He, Dongwoo Sheen, Xinlong Feng*. A difference finite element method based on the conforming element for the 4D Poisson equation. // Computers and Mathematics with Applications. – 2024. – Vol. 174. – P. 18–30. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2024.08.016>.
- [17] *Xiwei Tang, Wei Huang, Xueyou Li, Gang Ma*. Prediction of mooring tension of floating offshore wind turbines by CNN-LSTM-ATT and Chebyshev polynomials. // Ocean Engineering. – 2025. – Vol. 331. – P. 1–18. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2025.121327>.
- [18] *Heydari M.H., Rostami F., Bayram M., Baleanu D.* Shifted Chebyshev polynomials method for Caputo-Hadamard fractional Ginzburg–Landau equation. // Results in Physics – 2025. – Vol. 74. – P. 1–16. <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2025.108289>.
- [19] *Lutz Kämmerer* An efficient spatial discretization of spans of multivariate Chebyshev polynomials. // Applied and Computational Harmonic Analysis. – 2025. – Vol. 77. – P. 1–23. <https://doi.org/10.1016/j.acha.2025.101761>.
- [20] *Lieu B. Nguyen, P. Phung-Van, Chien H. Thai*. Chebyshev polynomials in moving Kriging meshfree method for laminated composite plates. // Finite Elements in Analysis and Design. – 2025. – Vol. 245. – P. 1–14. <https://doi.org/10.1016/j.finel.2025.104312>.
- [21] *Habib Ammari, Silvio Barandun, Ping Liu*. Applications of Chebyshev polynomials and Toeplitz theory to topological metamaterials // Reviews in Physics. – 2025. – Vol. 13. – P. 1–49. <https://doi.org/10.1016/j.revip.2025.100103>.

- [22] *Нормуродов Ч.Б.* Об одном эффективном методе решения уравнения Орра – Зоммерфельда. // Математическое моделирование. Москва. –2005. – №9(17). – С. 35–42.
- [23] *Абуталиев Ф.Б., Нормуродов Ч.Б.* Математическое моделирование проблем гидродинамической устойчивости. // Ташкент: Фан ва технология. – 2011. – 188 с.
- [24] *Normurodov C., Toyirov A., Ziyakulova S., Viswanathan K.K.* Convergence of Spectral-Grid Method for Burgers Equation with Initial-Boundary Conditions. // Mathematics and Statistics. – 2024. – Vol. 12(2). – P. 115–125. DOI: 10.13189/ms.2024.120201.
- [25] *Normurodov Ch.B., Abdurakhimov B.F., Djurayeva N.T.* On Estimating the Rate of Convergence of the Initial Integration Method// International Scientific Conference on Modern Problems of Applied Science and Engineering: MPASE2024, 2–3 May 2024. Samarkand, Uzbekistan. — AIP Conf. Proc.3244,020061 – 2024. – P. 1–11. <https://doi.org/10.1063/5.0242041>.
- [26] *Нормуродов Ч.Б., Зиякулова Ш.А.* Численное моделирование уравнений эллиптического типа дискретным вариантом метода предварительного интегрирования // Проблемы вычислительной и прикладной математики. Ташкент. – 2024. – №5(61). – С. 59–68.

UDC 519.632.4

NUMERICAL MODELING OF THIN PLATE BENDING USING A DISCRETE VERSION OF THE PRE-INTEGRATION METHOD

**Normurodov Ch.B., Ziyakulova Sh.A.*

*ch.normurodov@gmail.com

Termiz state university,

43, Barkamol Avlod Str., Termez, 190111 Uzbekistan.

Many applied problems are described by the Dirichlet problem for the Poisson equations. This problem is used in the following practical situations: membrane or plate deflection, electric potential, gravitational and magnetic potential, stationary temperature distribution (diffusion), and electron-optical systems. Although there are both direct and iterative methods for numerically solving the Poisson equation, the question of the effectiveness of using these methods remains relevant. In this work, the bending of a thin plate is studied using a discrete version of the method of preliminary integration over Chebyshev polynomials of the first kind. The proposed method is used to determine the bending of the plate. Numerical calculations are performed to demonstrate the dependence of the bending of the plate on the distributed load, and the proposed method is shown to be highly accurate.

Keywords: plate bending, load distribution, Chebyshev polynomials, discrete version of the preliminary integration method, high accuracy, efficiency.

Citation: Normurodov Ch.B., Ziyakulova Sh.A. 2025. Numerical modeling of thin plate bending using a discrete version of the pre-integration method. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 4(68): 26-37.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.4_68.2025.04.

HISOBLASH VA AMALIY MATEMATIKA MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
PROBLEMS OF COMPUTATIONAL
AND APPLIED MATHEMATICS



ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 4(68) 2025

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Арипов М.М., Шадиметов Х.М., Ахмедов Д.Д.

Ответственный секретарь:

Убайдуллаев М.Ш.

Редакционный совет:

Азамов А.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Арушанов М.Л.,
Бурнашев В.Ф., Джумаёзов У.З., Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия),
Игнатъев Н.А., Ильин В.П. (Россия), Иманкулов Т.С. (Казахстан),
Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия), Карачик В.В. (Россия),
Курбонов Н.М., Маматов Н.С., Мирзаев Н.М., Мухамадиев А.Ш., Назирова Э.Ш.,
Нормуродов Ч.Б., Нуралиев Ф.М., Опанасенко В.Н. (Украина),
Расулмухамедов М.М., Расулов А.С., Садуллаева Ш.А.,
Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А., Хамдамов Р.Х.,
Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Чье Ен Ун (Россия), Шабозов М.Ш. (Таджикистан),
Dimov I. (Болгария), Li Y. (США), Mascagni M. (США), Min A. (Германия),
Singh D. (Южная Корея), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

Дизайн и вёрстка:

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 29.08.2025 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №6. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 4(68) 2025

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

Editor-in-Chief:

Ravshanov N.

Deputy Editors:

Aripov M.M., Shadimetov Kh.M., Akhmedov D.D.

Executive Secretary:

Ubaydullaev M.Sh.

Editorial Council:

Azamov A.A., Aloev R.D., Amirgaliev E.N. (Kazakhstan), Arushanov M.L.,
Burnashev V.F., Djumayozov U.Z., Zagrebina S.A. (Russia), Zadorin A.I. (Russia),
Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia), Imankulov T.S. (Kazakhstan), Ismagilov I.I. (Russia),
Kabanikhin S.I. (Russia), Karachik V.V. (Russia), Kurbonov N.M., Mamatov N.S.,
Mirzaev N.M., Mukhamadiev A.Sh., Nazirova E.Sh., Normurodov Ch.B., Nuraliev F.M.,
Opanasenko V.N. (Ukraine), Rasulov A.S., Sadullaeva Sh.A., Starovoitov V.V. (Belarus),
Khayotov A.R., Khaldjigitov A., Khamdamov R.Kh., Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh.,
Chye En Un (Russia), Shabozov M.Sh. (Tajikistan), Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA),
Mascagni M. (USA), Min A. (Germany), Singh D. (South Korea), Singh M. (South
Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the
Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.

The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.

Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

Address:

100125, Tashkent, Buz-2, 17A.

Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

E-mail: journals@airi.uz.

Web-site: <https://journals.airi.uz>.

Layout design:

Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.

Signed for print 29.08.2025

Format 60x84 1/8. Order No. 6. Print run of 100 copies.

Содержание

<i>Халдусигитов А., Адамбаев У., Тилозов О., Рахмонова Р., Махмадиерова М.</i> Сравнительный анализ численных методов решения задач теории упругости в напряжениях	8
<i>Нуралиев Ф.М., Тохиров Б.Н.</i> Комплексное математическое моделирование термо-электро-магнито-упругих процессов в анизотропных тонких пластинах сложной формы на основе ме- тода RFM	17
<i>Нормуродов Ч.Б., Зиякулова Ш.А.</i> Численное моделирование изгиба тонкой пластины с применением дискрет- ного варианта метода предварительного интегрирования	26
<i>Равшанов Н., Журабоева О., Боборахимов Б., Шарипов Х.</i> Моделирование распространения загрязняющих веществ в атмосфере с уче- том рельефа и метеорологических условий	38
<i>Саидов У., Жураев И., Туракулов Ж.</i> Моделирование процесса фильтрования малоконцентрированного раствора через пористую среду	47
<i>Муминов С.Ю.</i> Построение автомодельного решения системы нелинейных дифференциаль- ных уравнений, представляющих задачи взаимной диффузии.	56
<i>Ахмедов Д.М., Буваширов Д.С.</i> Оптимальная квадратурная формула для гиперсингулярных интегралов ти- па Адамара с высокой осцилляцией в пространстве Соболева	65
<i>Алоев Р.Д., Алимова В.</i> Исследование экспоненциальной устойчивости численного решения гипербо- лической системы с отрицательными нелокальными характеристическими скоростями	75
<i>Шадиметов Х.М., Нуралиев Ф.А., Едилбекова Р.М.</i> Система для нахождения оптимальных коэффициентов квадратурных фор- мул типа Эрмита с производными третьего порядка	88
<i>Нормуродов Ч.Б., Джураева Н.Т., Норматова М.М.</i> Исследование динамики производных дифференциального уравнения чет- вертого порядка с малым параметром при старшей производной	97
<i>Шадиметов Х.М., Нуралиев Ф.А., Миркомилев Д.М.</i> Оптимальные квадратурные формулы для приближенного вычисления быст- роосциллирующих интегралов	110
<i>Игнатъев Н.А., Рамазонов Ш.Ш.</i> Отношение связанности в метрических алгоритмах классификации и анализ его свойств	122

Contents

<i>Khaldjigitov A., Adambaev U., Tilovov O., Rakhmonova R., Makhmadiygorova M.</i>	
Numerical solution of plane problems of the theory of elasticity directly in stresses	8
<i>Nuraliyev F.M., Tokhirov B.N.</i>	
Comprehensive mathematical modeling of thermo-electro-magneto-elastic processes in anisotropic thin plates of complex shape based on the RFM method	17
<i>Normurodov Ch.B., Ziyakulova Sh.A.</i>	
Numerical modeling of thin plate bending using a discrete version of the pre-integration method	26
<i>Ravshanov N., Juraboeva O., Boborakhimov B., Sharipov Kh.</i>	
Modeling the dispersion of pollutants in the atmosphere, accounting for terrain and meteorological conditions	38
<i>Saidov U., Juraev I., Turakulov J.</i>	
Modeling the process of filtering a low-concentration solution through a porous medium	47
<i>Muminov S.Y.</i>	
Construction of a self-similar solution to mutual diffusion problems.	56
<i>Akhmedov D.M., Buvashero D.S.</i>	
An optimal quadrature formula for Hadamard-type hypersingular integrals with high oscillation in the Sobolev space	65
<i>Aloev R.D., Alimova V.</i>	
Investigation of the exponential stability of the numerical solution of a hyperbolic system with negative nonlocal characteristic velocities	75
<i>Shadimetov Kh.M., Nuraliev F.A., Edilbekova R.M.</i>	
System for finding optimal coefficients of Hermite-type quadrature formulas with third-order derivatives	88
<i>Normurodov Ch.B., Juraeva N.T., Normatova M.M.</i>	
Study of the dynamics of derivatives of a fourth-order differential equation with a small parameter at the highest derivative	97
<i>Shadimetov X.M., Nuraliyev F.A., Mirkomilov D.M.</i>	
Optimal quadrature formulas for approximate calculation of fast oscillating integral	110
<i>Ignatiev N.A., Ramazonov Sh.Sh.</i>	
Relationship in metric classification algorithms and analysis of its properties	122