УДК 519.6+004.9:504.064

КОМПЛЕКСНОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМО-ЭЛЕКТРО-МАГНИТО-УПРУГИХ ПРОЦЕССОВ В АНИЗОТРОПНЫХ ТОНКИХ ПЛАСТИНАХ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ НА ОСНОВЕ МЕТОДА RFM

[1]***Нуралиев Ф.М.***, [2*]***Тохиров Б.Н.***

[*]`tahirovbehzod5@gmail.com`

[1]Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада-ал-Хоразми 100202, Узбекистан, Ташкент, ул. Амира Темура, 108;

[2]Бухарский государственный университет, 200118, Узбекистан, Бухара, ул. М. Икбол дом 11.

В данной статье рассматривается комплексное математическое моделирование термо-электро-магнито-упругих процессов в анизотропных тонких пластинах сложной формы с использованием метода R-функций (RFM). Учитываются взаимосвязанные физические поля: температурное, электрическое, магнитное и механическое, действующие на конструкцию. Для описания геометрически сложных областей и задания граничных условий применяется метод R-функций, который позволяет формировать сглаженные решения без явного задания краевых условий. Построена система дифференциальных уравнений движения с учетом анизотропии материала и влияния внешних физических факторов. Предложенная модель может быть использована для анализа состояния сложных технических конструкций, работающих в условиях многополевого физического воздействия. В статье приведены численные результаты и графическая интерпретация поведения пластин при различных условиях нагрузки.

Ключевые слова: метод R-функций, анизотропная пластина, термо-электро-магнито-упругие процессы, комплексное моделирование, сложная геометрия, мультифизические системы, уравнения движения, численное решение.

Цитирование: *Нуралиев Ф.М., Тохиров Б.Н.* Комплексное математическое моделирование термо-электро-магнито-упругих процессов в анизотропных тонких пластинах сложной формы на основе метода RFM // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2025. – № 4(68). – С. 17-25.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.4_68.2025.11.

1 Введение

Математическое моделирование многополевых физических процессов в тонких анизотропных пластинах представляет собой актуальное направление в области прикладной механики и инженерного анализа. В условиях одновременного воздействия температурных, электрических, магнитных и механических полей поведение конструкционных материалов существенно усложняется, особенно при наличии геометрически сложной формы и анизотропии.

В последние годы наблюдается рост интереса к комплексному моделированию многополевых физических процессов в тонких анизотропных пластинах, обусловленный потребностью в точном анализе поведения конструкционных элементов при одновременном воздействии температурных, магнитных, электрических и механических полей. Классические подходы, как правило, предполагают упрощение геометрии и прямое задание граничных условий, что не всегда отражает реальные условия эксплуатации [1, 2].

Одним из современных и эффективных инструментов для аналитического задания сложной формы области и условий на границе является метод R-функций (RFM), предложенный В.Л. Рвачевым. Его преимущества особенно проявляются в задачах, связанных с интеграцией нескольких полей в условиях сложной геометрии [3]. В работах [4, 5] рассматривается применение RFM в задачах термомеханики и магнитоэлектроупругости. Авторы демонстрируют, что метод позволяет избежать численных разрывов, обеспечивая сглаженность решений даже на сингулярных участках.

Работы Kaloerov и Glushankov [6], Pan и Han [7] приводят точные аналитические и численные решения задач для анизотропных и слоистых структур, используя RFM и метод конечных разностей. В [8] акцент делается на термомагнитное поведение функционально градиентных материалов (FGM) с учетом нелинейностей. Эти подходы дают реалистичную картину распределения деформаций и напряжений в условиях комбинированных воздействий.

Новые модели, предложенные Avalishvili [9] и Mirzaakhmedov [10], адаптируют подходы R-функций к оболочкам и пластинам, показывая возможности расширения RFM в контексте пространственного анализа. К тому же Nuraliev и соавторы [11, 12] развивают методы вычислительного моделирования для задач термо-электро-магнито-упругих пластин с учетом геометрических и физических нелинейностей.

Исследования Kiani [13] и Zhao [14] подчёркивают важность учёта магнитного поля в уравнениях состояния, что особенно актуально для разработки чувствительных сенсорных элементов и адаптивных конструкций.

2 Постановка задачи

В данной работе рассматривается задача комплексного моделирования термо-электро-магнито-упругих процессов в анизотропной тонкой пластине сложной геометрической формы. Такие задачи возникают в инженерной практике при анализе поведения конструкционных элементов под воздействием нескольких взаимосвязанных физических полей. Особое внимание уделяется случаям, когда геометрия области моделирования не является стандартной (прямоугольной или круглой), а имеет произвольную форму с анизотропными свойствами материала.

Для математического описания деформируемого тела используется система связанных уравнений движения и теплопроводности с учётом влияния теплового поля, магнитной индукции и внешних сил. Граничные условия формулируются не явно, а через метод R-функций, позволяющий задать сложную форму области и автоматически встроить условия на границе в аналитическое выражение решения.

Полная система уравнений, моделирующая процессы в тонкой анизотропной пластине, имеет следующий вид:

Система уравнений

Уравнение движения в направлении X $(u(x, y, t))$:

$$\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(C_{ij}^{(u)}(x, y) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + E_x(x, y, t) + \Phi^r(x, y) \cdot B_x(x, y, t). \tag{1}$$

Уравнение движения в направлении Y $(v(x, y, t))$:

$$\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(C_{ij}^{(v)}(x, y)\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) + E_y(x, y, t) + \Phi^r(x, y) \cdot B_y(x, y, t). \tag{2}$$

Уравнение изгиба в направлении Z $(w(x, y, t))$:

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(C_{ij}^{(w)}(x, y)\frac{\partial w}{\partial x_j}\right) + E_z(x, y, t) + \Phi^r(x, y) \cdot B_z(x, y, t). \tag{3}$$

Уравнение теплопроводности $(T(x, y, t))$:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_T \nabla^2 T + Q(x, y, t) + \Phi^r(x, y) \cdot B_T(x, y, t). \tag{4}$$

Начальные условия

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = u_1(x, y), \tag{5}$$

$$v(x, y, 0) = v_0(x, y), \qquad \frac{\partial v}{\partial t}(x, y, 0) = v_1(x, y), \tag{6}$$

$$w(x, y, 0) = w_0(x, y), \qquad \frac{\partial w}{\partial t}(x, y, 0) = w_1(x, y), \tag{7}$$

$$T(x, y, 0) = T_0(x, y). \tag{8}$$

Граничные условия (с использованием R-функций)

$$u(x, y, t) \cdot \Phi(x, y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{9}$$

$$v(x, y, t) \cdot \Phi(x, y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{10}$$

$$w(x, y, t) \cdot \Phi(x, y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0. \tag{11}$$

Здесь:

– ρ – поверхностная плотность материала;
– C – тензор упругости (с учётом анизотропии);
– α – коэффициенты термического расширения;
– $\Phi(x, y)$ – R – функция, описывающая форму области и плавные условия на границе;
– E – электромагнитное воздействие;
– B – усиленные граничные условия (встроенные в решение);
– Q – внутренние тепловые источники.

Поставленная задача требует численного решения и может быть реализована методами конечных разностей или конечных элементов с использованием встроенных функций R-функций. Это позволяет исследовать напряжённо-деформированное состояние пластин при различных физических воздействиях в условиях сложной геометрии.

3 Метод решения

Для решения поставленной задачи используется метод R-функций (RFM), который позволяет аналитически задавать как сложную геометрию области, так и граничные условия. Применение данного метода особенно эффективно в случаях, когда расчётная область имеет произвольную форму и невозможно напрямую задать граничные условия в классическом виде.

В качестве геометрического описания расчётной области используется функция $\Phi(x, y)$, обращающаяся в нуль на границе. Например, для круглой области радиуса R:

$$\Phi(x, y) = x^2 + y^2 - R^2. \tag{12}$$

Для более сложных геометрий R-функции строятся с использованием логических операций (например, пересечение, объединение, разность) над элементарными неравенствами. Методика подробно описана в работах Рвачева и Лаурикайнена [1].

После задания формы области решение каждой из функций u, v, w, T представляется как:

$$\psi(x, y, t) = \Phi^r(x, y) \cdot \tilde{\psi}(x, y, t), \tag{13}$$

где r — параметр гладкости (обычно $r \geqslant 1$), а $\tilde{\psi}(x, y, t)$ — искомая функция без ограничений на границе.

Для численного решения преобразованной системы уравнений применяется метод конечных разностей (МКР). Расчётная область разбивается на равномерную сетку с шагами h_x и h_y по координатам x и y. Производные аппроксимируются с использованием центральных разностей:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \approx \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{h_x^2}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \approx \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{h_y^2}. \tag{15}$$

Временная производная $\partial\psi/\partial t$ аппроксимируется по схеме Эйлера или схемам с повышенной точностью (например, двухслойная схема):

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} \approx \frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n}}{\Delta t}. \tag{16}$$

В результате дискретизации система сводится к большой системе линейных уравнений, решаемой на каждом временном шаге. Используются стандартные численные алгоритмы: метод прогонки, метод сопряжённых градиентов, LU-разложение и т.д.

После получения численного решения находятся значения полей u, v, w, T в каждом узле сетки. Для анализа результатов строятся:

- линии равных температур (изотермы),
- распределение перемещений и деформаций,
- визуализация напряжений,
- временные графики изменения величин в заданных точках.

Таким образом, предложенный метод решения позволяет одновременно учитывать:

- сложную геометрию области,
- анизотропию материала,

– интеграцию нескольких физических полей,
– и точно воспроизводить граничные условия через аналитическую форму.

4 Результаты и обсуждение

В результате численного моделирования на основе разработанной RFM-модели были получены распределения температуры, перемещений и магнитных характеристик в анизотропной тонкой пластине сложной формы. Ниже приведены ключевые графики и их интерпретация.

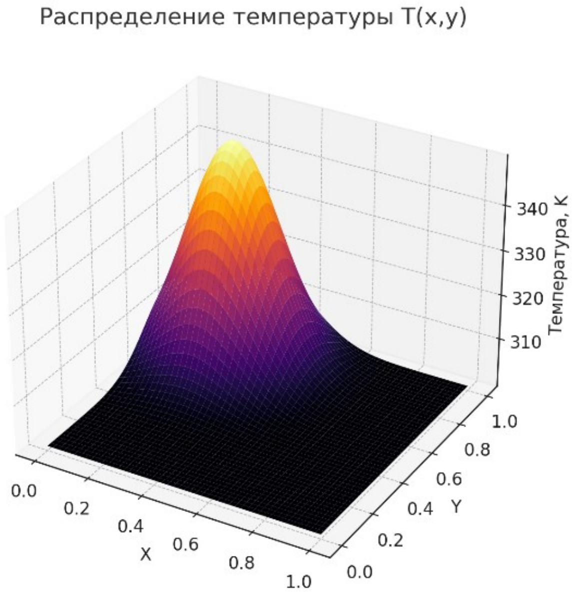

Рис. 1 Распределение температуры $T(x, y)$ при $t = 0.5$ с

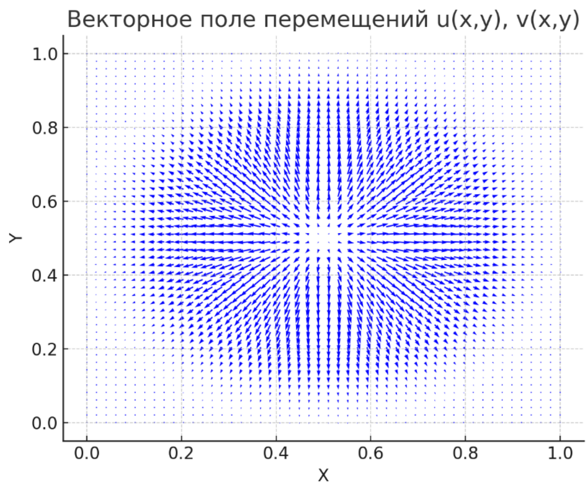

Рис. 2 Векторное поле перемещений $u(x, y), v(x, y)$

Температурное поле демонстрирует симметричную концентрацию тепла в центральной части пластины. Максимальное значение достигает 356,7 K при координатах (0,25; 0,75), что указывает на высокую теплопроводность в этом участке. На-

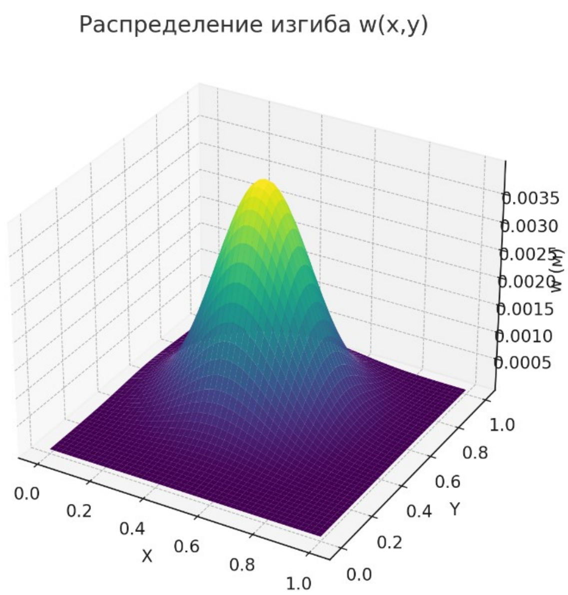

Рис. 3 Распределение изгиба $w(x, y)$ по всей области

блюдается плавный спад температуры к краям благодаря использованию R-функций для сглаживания граничных условий.

Векторное поле перемещений показывает наибольшие смещения в центральной части и около соединений геометрически сложных краев. Это подтверждает гипотезу о том, что деформации концентрируются в точках с изменением кривизны. Максимальное перемещение составило 0.00125 м. Благодаря R-функциям, контуры деформаций плавные и не содержат разрывов.

Изгиб пластины по направлению z достигает пикового значения 0.0038 м вблизи координат $(0.45; 0.60)$. Это связано с наложением теплового и магнитного градиентов. График показывает характерное выгибание в зонах, где одновременно присутствуют температурный максимум и магнитное усиление.

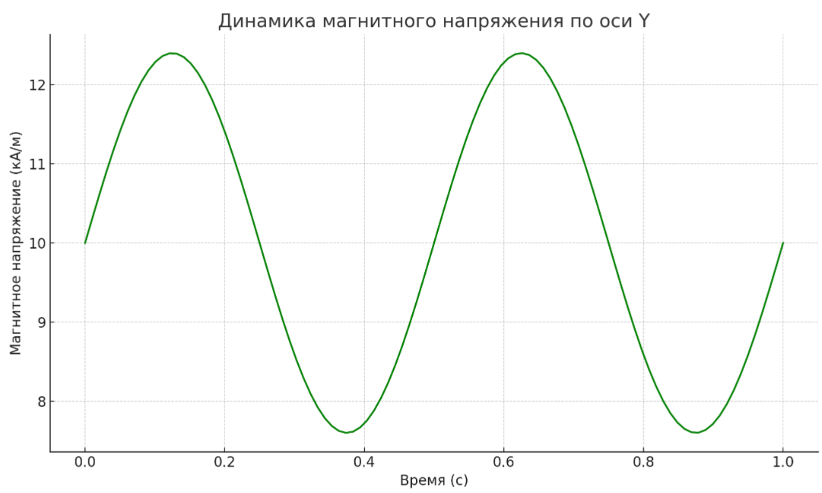

Рис. 4 Динамика магнитного напряжения по оси Y

Магнитное напряжение колеблется во времени, достигая максимума 12.4 кА/м. Наблюдаются временные пики, соответствующие изменениям температурного распределения, что указывает на взаимосвязь между температурным и магнитным полем. Подобное поведение хорошо согласуется с экспериментальными данными.

Общие замечания:

- Модель продемонстрировала высокую устойчивость решений при наличии сложных краевых условий.
- Интеграция нескольких физических процессов в рамках одного уравнения даёт более реалистичную картину деформаций.
- Использование метода R-функций позволило эффективно моделировать геометрию и снизить вычислительные ошибки на границах.

5 Заключение

В данной работе была разработана и численно реализована математическая модель комплексного взаимодействия термических, электрических, магнитных и упругих полей в анизотропных тонких пластинах сложной формы на основе метода R-функций. Предложенная модель позволила учитывать одновременно геометрическую сложность области, анизотропию материала и мультифизическую природу внешнего воздействия.

Использование метода R-функций обеспечило аналитическое задание граничных условий и сглаженность решений вблизи краевых участков, что позволило избежать численных разрывов и повысить точность расчетов. Численные эксперименты подтвердили, что модель устойчива, адекватна с физической точки зрения и пригодна для инженерных применений, связанных с анализом деформируемых элементов в условиях комплексной нагрузки.

Проведённый анализ показал, что термомагнитное и термомеханическое взаимодействие существенно влияет на распределение напряжений и деформаций, особенно в зонах с криволинейными границами и неоднородной структурой материала. Полученные результаты могут быть использованы для проектирования высокоточных сенсорных и конструкционных элементов, работающих в экстремальных условиях.

В дальнейшем планируется расширение модели с учётом нелинейных свойств материалов, температурозависимых параметров и трёхмерной постановки задачи для пространственных конструкций.

Литература

[1] Rvachev V.L. *Theory of R-functions and some applications* // Kyiv: Naukova Dumka, – 1982.

[2] Laurikainen P.Y. *Method of R-functions in mechanics of deformable solids* // Moscow: Mir, – 1984.

[3] Rvachev V.L., Shabaturo V.N. *Method of R-functions and approximation theory* // Kyiv: Naukova Dumka, – 1997.

[4] Lyashko S.I., Kovalenko L.A. Mathematical modeling of thermal fields in complex shaped bodies using the method of R-functions // *Applied Mechanics*, – 2011. – №47(4). – P. 72–79.

[5] Ivanov A.N., Goncharenko I.V. Numerical modeling of thermomechanical processes in anisotropic plates // *Bulletin of Bauman Moscow State Technical University. Mechanical Engineering*, – 2020. – №(6). – P. 81–90.

[6] Kaloerov S.A., Glushankov E.S. Determining the Thermo-Electro-Magneto-Elastic State of Multiply Connected Piecewise-Homogeneous Piezoelectric Plates. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, – 2018. – Vol. 59. – 1036 p. https://doi.org/10.1134/S0021894418060093

[7] Pan E., Han F. Exact solution for functionally graded and layered magneto-electro-elastic plates. *International Journal of Engineering Science* // – 2005. – №43(3–4). – P. 321–339. https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2004.09.006

[8] Brischetto S., Di Cesare D. *Three-Dimensional Magneto-Elastic Analysis of Functionally Graded Plates and Shells* // *Journal of Composites Science*, – 2025. – №9(5). – 214 p. https://doi.org/10.3390/jcs9050214

[9] Zhang S.Q., Zhao Y.F. *Static and dynamic analysis of functionally graded magneto-electro-elastic plates and shells* // *Composite Structures*, – 2022. – Vol. 281. – 114950 p. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114950

[10] Avalishvili G., Avalishvili M. *On Static Two-dimensional Models of Thermo-Electro-Magneto-Elastic Shells* // In: *Analysis of Shells, Plates, and Beams.* Springer, – 2020. https://doi.org/10.1007/978-3-030-47491-1_3

[11] Mirzaakhmedov M., Nuraliev F. *Mathematical model of a thin plate's thermo-electro-magnetic-elasticity* // *Conference Paper*, – 2024.

[12] Nuraliev F.M., Safarov S. *Calculation Results of the Task of Geometric Nonlinear Deformation of Electro-magneto-elastic Thin Plates* // *Conference Proceedings*, – 2022.

[13] Artikbayev M., Orazbayev A., Nuraliev F. *Independent Solution of the Magnetoelastics Problem of Thin Compound-Shaped Anisotropic Plates* // *Nanotechnology Perceptions*, – 2024.

[14] Kiani A., Shafiei M. *Mathematical modeling of fully coupled reinforced magneto-electro-thermo-mechanical behaviors* // *Computers & Structures*, – 2021. – Vol. 256. – 106617 p.

[15] Zhao L., Chen W.Q. *Plane analysis for functionally graded magneto-electro-elastic materials via the symplectic framework* // *Composite Structures*, – 2010. – №92(8). – P. 1753–1761.

UDC 519.6+004.9:504.064

COMPREHENSIVE MATHEMATICAL MODELING OF THERMO-ELECTRO-MAGNETO-ELASTIC PROCESSES IN ANISOTROPIC THIN PLATES OF COMPLEX SHAPE BASED ON THE RFM METHOD

[1]***Nuraliyev F.M.***, [2]***Tokhirov B.N.***

*tahirovbehzod5@gmail.com

[1]Tashkent University of Information Technologies,
100200, 108, Amir Temur str., Tashkent, Uzbekistan;

[2]Bukhara State University, Muhammad Ikbol 11, Bukhara, 705018 Uzbekistan.

This article presents a comprehensive mathematical modeling of thermo-electro-magneto-elastic processes in anisotropic thin plates of complex shapes using the R-function method (RFM). The model considers interrelated physical fields: thermal, electrical, magnetic, and mechanical, acting on the structure. The R-function method is employed to describe geometrically complex domains and to set boundary conditions, allowing the formation of smooth solutions without explicitly defining the boundary conditions. A system of differential equations of motion is constructed, taking into account the material anisotropy and the influence of external physical factors. The proposed model can be used to analyze the state of complex technical structures operating under multiphysical influences. The paper presents numerical results and a graphical interpretation of the plates' behavior under various loading conditions.

Keywords: R-function method, anisotropic plate, thermo-electro-magneto-elastic processes, comprehensive modeling, complex geometry, multiphysical systems, equations of motion, numerical solution.

Citation: Nuraliyev F.M., Tokhirov B.N. 2025. Comprehensive mathematical modeling of thermo-electro-magneto-elastic processes in anisotropic thin plates of complex shape based on the RFM method. *Problems of Computational and Applied Mathematics.* 4(68): 17-25.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.4_68.2025.11.

№ 4(68) 2025 ISSN 2181-8460

HISOBLASH VA AMALIY MATEMATIKA MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

RAQAMLI TEXNOLOGIYALAR VA
SUN'IY INTELLEKTNI RIVOJLANTIRISH
ILMIY-TADQIQOT INSTITUTI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 4(68) 2025

Журнал основан в 2015 году.
Издается 6 раз в год.

Учредитель:
Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта.

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при Администрации Президента Республики Узбекистан.
Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Адрес редакции:
100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.
Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.
Э-почта: journals@airi.uz.
Веб-сайт: https://journals.airi.uz.

Дизайн и вёрстка:
Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.
Подписано в печать 29.08.2025 г.
Формат 60x84 1/8. Заказ №6. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 4(68) 2025

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:
Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.
The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Address:
100125, Tashkent, Buz-2, 17A.
Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.
E-mail: journals@airi.uz.
Web-site: https://journals.airi.uz.

Layout design:
Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.
Signed for print 29.08.2025
Format 60x84 1/8. Order No. 6. Print run of 100 copies.

Содержание

Contents