

УДК 519.652

ОБ ОДНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ФУНКЦИИ НАТУРАЛЬНЫМИ СПЛАЙНАМИ

^{1,2*} *Болтаев А.К.*, ³ *Пардаева О.Ф.*

*aziz_boltayev@mail.ru

¹Международный Университет Нордик,
ул. Бунедкор, 8/2, 100043, Ташкент, Узбекистан;²Институт математики им. В.И. Романовского АН РУз,
100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская 9;³Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,
100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская 4.

Сплайн-функции являются одним из ключевых инструментов современной вычислительной математики, находящих широкое применение в задачах аппроксимации функций, интерполяции данных, численного моделирования и решения прикладных задач. В теории сплайнов существуют алгебраический и вариационный подходы. В алгебраическом подходе сплайны рассматриваются как некоторые гладкие кусочно-полиномиальные функции. В вариационном подходе сплайны понимаются как элементы гильбертова или банахова пространства, минимизирующие определенные функционалы. Затем изучаются проблемы существования, единственности и сходимости сплайнов и алгоритмы их построения на основе собственных свойств сплайнов. В настоящей работе изучается задача построения натуральных сплайн функций в гильбертовом пространстве. Здесь используя метод Соболева приведено алгоритм для решений системы линейных алгебраических уравнений для коэффициентов натуральных сплайн функций. При $m = 2$ получено явное выражение оптимальных коэффициентов натуральных сплайн функции в гильбертовом пространстве $W_2^{(2,0)}(0, 1)$.

Ключевые слова: пространство Гильберта, экстремальная функция, функционал погрешности, сплайн функция.

Цитирование: *Болтаев А.К., Пардаева О.Ф.* Об одной интерполяции функции натуральными сплайнами // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2025. – № 3(67). – С. 97-106.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.3_67.2025.08.

1 Введение и постановка задач

Сплайн-функции являются одним из ключевых инструментов современной вычислительной математики, находящих широкое применение в задачах аппроксимации функций, интерполяции данных, численного моделирования и решения прикладных задач. Сплайны представляют собой функции, которые разбивают заданный интервал на более мелкие сегменты, где аппроксимация осуществляется с помощью полиномов низкой степени (обычно первой, второй или третьей), обеспечивая при этом гладкость переходов между сегментами. Основное преимущество сплайнов заключается в их высокой гибкости, вычислительной простоте и способности точно моделировать сложные функции, сохраняя непрерывность производных. Эти свойства сделали сплайны незаменимым инструментом в таких областях, как компьютерная графика, обработка сигналов, медицинская визуализация, инженерный дизайн и анализ данных.

Теория сплайнов начала активно развиваться в середине XX века благодаря работам выдающихся математиков. Одним из пионеров в этой области является И. Шенберг, чьи исследования заложили фундамент современной теории сплайнов [1, 2]. Его работы по интерполяционным сплайнам и их свойствам стали отправной точкой для последующих исследований. Среди различных типов сплайнов особую популярность приобрели кубические сплайны, которые обеспечивают оптимальный баланс между гладкостью (непрерывностью первой и второй производных) и вычислительной эффективностью. Вклад в развитие кубических сплайнов внесли такие ученые, как Д. Холлидей и Карл де Бура [3–5].

Современные исследования в области сплайнов продолжают расширять их возможности. Например, работы Л. Шумахера [6] по адаптивным сплайнам и их применению в аппроксимации данных внесли значительный вклад в развитие методов сглаживания. Также стоит отметить исследования Г.В. Миловановича и его коллег, посвященные сплайнам в пространствах Соболева и их применению в численных методах [7]. Сплайн-функции находят применение в самых разнообразных дисциплинах. Например, в компьютерной графике они используются для построения гладких кривых и поверхностей [8], в обработке сигналов — для сглаживания данных и реконструкции сигналов [9], а в медицинской визуализации — для повышения качества изображений в компьютерной томографии [10].

В этом контексте активно разрабатываются альтернативные методы аппроксимации, которые преодолевают ограничения предыдущих. Одним из таких методов, доказавшим свою эффективность как в теоретических исследованиях, так и в практических приложениях, является использование сплайнов.

Теория сплайнов, основанная на вариационных методах, была изучена и получила развитие в работах С.Б. Стечкина и Ю.Н. Субботина [11], В.А. Василенко [12] и других.

В настоящей работе изучается задача построения натурального L -сплайна, $L \equiv d^m/dx^m + 1$ на интервале $[0, 1]$ в

$$W_2^{(m,0)}(0, 1) = \left\{ \varphi : [0, 1] \rightarrow R \mid \varphi^{(m-1)} \text{ абсолютно непр. и } \varphi^{(m)} \in L_2(0, 1) \right\}.$$

Класс $W_2^{(m,0)}(0, 1)$, снабженный полунормой

$$\|\varphi\|_{W_2^{(m,0)}} = \left(\int_0^1 (\varphi^{(m)}(x) + \varphi(x))^2 dx \right)^{1/2}, \quad (1)$$

является гильбертовым пространством, если мы отождествляем функции, которые отличаются решением уравнения $\varphi^{(m)}(x) + \varphi(x) = 0$.

Предположим, нам даны значения y_β , $\beta = 0, 1, \dots, N$ в точках $x_\beta \in [0, 1]$, $\beta = 0, 1, \dots, N$. Рассмотрим следующую задачу интерполяции.

Задача 1. Среди всех функций $\varphi(x)$ в $W_2^{(m,0)}(0, 1)$ (m — четная), удовлетворяющих условиям

$$\varphi(x_\beta) = y_\beta, \quad \beta = 0, 1, \dots, N, \quad (2)$$

найти функцию $S_m(x)$, которая дает минимум норме (1), где $x_\beta \in [0, 1]$ — узлы интерполяции.

Решение $S_m(x)$ задачи 1 является обобщенным сплайном и однозначно определяется относительно сетки $\Delta : 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$ на интервале $[0, 1]$ следующим образом:

(i) $S_m(x)$ - линейная комбинация экспоненциально-тригонометрических функций, удовлетворяющих равенству $L^*LS_m = 0$ на каждом интервале открытой сетки $(x_\beta, x_{\beta+1})$, $\beta = 0, 1, \dots, N-1$, где L^* - сопряженная функция L ;

(ii) $S_m(x)$ - линейная комбинация экспоненциально-тригонометрических функций, удовлетворяющих равенству $LS_m = 0$ на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(1, \infty)$;

(iii) $S_m^{(\alpha)}(x_\beta^-) = S_m^{(\alpha)}(x_\beta^+)$, $\alpha = 0, 1, \dots, m$ и $\beta = 1, 2, \dots, N-1$;

(iv) $S_m(x_\beta) = y_\beta$, $\beta = 0, 1, \dots, N$;

(v) $S_m(x)$ удовлетворяет следующим граничным условиям

$$\begin{aligned} S_m^{(m+i)}(1) + S_m^{(i)}(1) &= 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-2, \\ S_m^{(m+i)}(0) + S_m^{(i)}(0) &= 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-2. \end{aligned}$$

Мы рассматриваем фундаментальное решение

$$\begin{aligned} G_m(x) = \frac{\text{sign}(x)}{2m^2} \sum_{k=1}^m \left[(1-m)e^{x \cos \frac{(2k-1)\pi}{m}} \cos \left(x \sin \left(\frac{(2k-1)\pi}{m} \right) + \frac{(2k-1)\pi}{m} \right) + \right. \\ \left. + x e^{x \cos \frac{(2k-1)\pi}{m}} \cos \left(x \sin \left(\frac{(2k-1)\pi}{m} \right) + \frac{2\pi \cdot (2k-1)}{m} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + 2\frac{d^m}{dx^m} + 1$ для четных натуральных чисел m , т.е. решение уравнения

$$G_m^{(2m)}(x) - G_m(x) = \delta(x), \quad (4)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Эта работа является прямым продолжением работы [13]. Следуя ([12], С.46, теорема 2.2), получаем

$$S_m(x) = \sum_{\gamma=0}^N C_\gamma G_m(x - x_\gamma) + Y_m(x), \quad (5)$$

где $C_\gamma, \gamma = 0, 1, \dots, N, G_m(x)$ определяется как (3) и

$$Y_m(x) = \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} e^{x \cos \frac{(2k-1)\pi}{m}} \left[r_{1,k} \cos \left(x \sin \frac{(2k-1)\pi}{m} \right) + r_{2,k} \sin \left(x \sin \frac{(2k-1)\pi}{m} \right) \right], \quad (6)$$

где $r_{1,k}, r_{2,k}, k = 1, 2, \dots, \frac{m}{2}$ — действительные числа.

Известно, что (см., например, [12]) решение $S_m(x)$ вида (5) задачи 1 существует, единственно при $N+1 \geq m$ и коэффициенты $C_\gamma, r_{1,k}$ и $r_{2,k}$ уравнения $S_m(x)$ определяются следующей системой $N+m+1$ линейных уравнений

$$\sum_{\gamma=0}^N C_\gamma G_m(x_\beta - x_\gamma) + Y_m(x_\beta) = \varphi(x_\beta), \quad \beta = 0, 1, \dots, N, \quad (7)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_\gamma e^{x_\gamma \cos \frac{(2k-1)\pi}{m}} \cos \left(x_\gamma \sin \frac{(2k-1)\pi}{m} \right) = 0, \quad k = \overline{1, \frac{m}{2}}, \quad (8)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_\gamma e^{x_\gamma \cos \frac{(2k-1)\pi}{m}} \sin \left(x_\gamma \sin \frac{(2k-1)\pi}{m} \right) = 0, \quad k = \overline{1, \frac{m}{2}}. \quad (9)$$

Легко показать, что сплайн $S_m(x)$, определяемый уравнением (5) с коэффициентами $C_\gamma, r_{1,k}$ и $r_{2,k}(k = \overline{1, \frac{m}{2}})$, удовлетворяет условиям (i)-(v).

Следует отметить, что система (7) - (9) имеет единственное решение. Доказательство единственности решения системы (7) - (9) аналогично доказательству единственности решения системы для оптимальных коэффициентов в пространстве $L_2^{(m)}$, полученному в работах Соболева [14, 15].

Далее, рассмотрим случай равноотстоящих узлов. Предположим, что $x_\beta = h\beta, \beta = 0, 1, 2, \dots, N, h = \frac{1}{N}$.

Теперь предположим, что $C_\beta = 0$ при $\beta < 0$ и $\beta > N$. Тогда, используя свертку двух дискретных аргументов-функций $\varphi(h\beta)$ и $\psi(h\beta)$ (см. [14, 15]):

$$\varphi(h\beta) * \psi(h\beta) = \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} \varphi(h\gamma) \cdot \psi(h\beta - h\gamma),$$

перепишем систему (7) - (9) в следующей форме свертки

$$C_\beta * G_m(h\beta) + Y_m(h\beta) = \varphi(h\beta), \quad \beta = 0, 1, \dots, N, \quad (10)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_\gamma e^{h\gamma \cos \frac{(2k-1)\pi}{m}} \cos \left(h\gamma \sin \frac{(2k-1)\pi}{m} \right) = 0, \quad k = 1, \frac{m}{2}, \quad (11)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_\gamma e^{h\gamma \cos \frac{(2k-1)\pi}{m}} \sin \left(h\gamma \sin \frac{(2k-1)\pi}{m} \right) = 0, \quad k = 1, \frac{m}{2}. \quad (12)$$

Для решения системы (10) - (12) методом Соболева нам понадобится дискретный аналог дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + 2\frac{d^m}{dx^m} + 1$ при четных m . Следующий параграф посвящен построению этого дискретного оператора $D_m(h\beta)$.

2 Дискретный оператор $D_m(h\beta)$

В настоящем параграфе для четного натурального числа m строится функция $D_m(h\beta)$ дискретного аргумента, удовлетворяющая уравнению

$$D_m(h\beta) * G_m(h\beta) = \delta_d(h\beta), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} G_m(h\beta) = & \\ = \frac{\text{sign}(h\beta)}{2m^2} \sum_{k=1}^m & \left[(1-m)e^{h\beta \cos \frac{(2k-1)\pi}{m}} \cos \left(h\beta \sin \left(\frac{(2k-1)\pi}{m} \right) + \frac{(2k-1)\pi}{m} \right) + \right. \\ & \left. + h\beta e^{h\beta \cos \frac{(2k-1)\pi}{m}} \cos \left(h\beta \sin \left(\frac{(2k-1)\pi}{m} \right) + \frac{2\pi \cdot (2k-1)}{m} \right) \right], \end{aligned}$$

$\delta_d(h\beta)$ – дискрет дельта-функция, т.е., $\delta_d(h\beta) = \begin{cases} 1, & \beta = 0, \\ 0, & \beta \neq 0. \end{cases}$

Следует отметить, что метод построения дискретной функции аргумента $D_m(h\beta)$ аналогично методу построения дискретных аналогов дифференциальных операторов $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}, \frac{d^{2m}}{dx^{2m}} - \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}, \frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + 2\omega^2 \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + \omega^4 \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ и $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} - 1$ в работах [16–19].

Дискретная функция $D_m(h\beta)$ играет важную роль при вычислении коэффициентов оптимальных интерполяционных в пространстве $W_2^{(m,0)}$. Отметим, что уравнение (13) является дискретным аналогом следующего уравнения

$$\left(\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + 2 \frac{d^m}{dx^m} + 1 \right) G_m(x) = \delta(x), \quad (14)$$

где $G_m(x)$ определяется равенством (3), δ - дельта-функция Дирака.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Дискретный аналог дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + 2 \frac{d^m}{dx^m} + 1$ удовлетворяющий равенству (13), при m - четном, имеет вид*

$$D_m(h\beta) = \frac{m^2}{K} \cdot \begin{cases} \sum_{k=1}^{m-1} A_k^* \cdot \lambda_k^{|\beta|-1}, & |\beta| \geq 2, \\ 1 + \sum_{k=1}^{m-1} A_k^*, & |\beta| = 1, \\ M_1 - \frac{K_1}{K} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{A_k^*}{\lambda_k}, & \beta = 0. \end{cases} \quad (15)$$

где K, K_1, M_1, A_k^* и λ_k определены в работе [20].

Теорема 2. *Дискретный аналог $D_m(h\beta)$ дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + 2 \frac{d^m}{dx^m} + 1$ удовлетворяет равенствам*

$$\begin{aligned} 1) \quad & D_m(h\beta) * e^{h\beta \cos \frac{(2k-1)\pi}{m}} \cos \left(h\beta \sin \frac{(2k-1)\pi}{m} \right) = 0, \\ 2) \quad & D_m(h\beta) * e^{h\beta \cos \frac{(2k-1)\pi}{m}} \sin \left(h\beta \sin \frac{(2k-1)\pi}{m} \right) = 0, \\ 3) \quad & D_m(h\beta) * h\beta e^{h\beta \cos \frac{(2k-1)\pi}{m}} \cos \left(h\beta \sin \frac{(2k-1)\pi}{m} \right) = 0, \\ 4) \quad & D_m(h\beta) * h\beta e^{h\beta \cos \frac{(2k-1)\pi}{m}} \sin \left(h\beta \sin \frac{(2k-1)\pi}{m} \right) = 0, \end{aligned}$$

где $k = 1, 2, \dots, \frac{m}{2}$, m - четное натуральное число.

Приведенные теоремы доказаны в работе [20].

3 Решение дискретной системы в сверточном виде (10) - (12)

В этом параграфе мы даем алгоритм нахождения точного решения системы (10)-(12) с помощью дискретного аналога $D_m(h\beta)$ дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + 2 \frac{d^m}{dx^m} + 1$, полученный в предыдущем разделе.

Введем функции

$$\vartheta_m(h\beta) = C_\beta * G_m(h\beta) \quad (16)$$

и

$$u_m(h\beta) = \vartheta_m(h\beta) + Y_m(h\beta, r_{1,k}, r_{2,k}), \quad (17)$$

где $Y_m(h\beta, r_{1,k}, r_{2,k})$ - дискретная функция $Y_m(x)$, определяемая как (6). Тогда, принимая во внимание (13), для коэффициентов C_β имеем

$$C_\beta = D_m(h\beta) * u_m(h\beta). \quad (18)$$

Итак, если мы находим функцию $u_m(h\beta)$, то оптимальные коэффициенты определяются из формулы (18). Для того чтобы вычислить свертку (18), нам нужно найти

представление функции $u_m(h\beta)$ для всех целочисленных значений аргумента β . Из равенства (10) ясно, что $u_m(h\beta) = \varphi(h\beta)$ для $h\beta \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} \vartheta_m(h\beta) = & -\frac{1}{2m^2} \sum_{\gamma=0}^N C_\gamma \sum_{n=1}^m \left[(1-m)e^{(h\beta-h\gamma)\cos\frac{(2n-1)\pi}{m}} \times \right. \\ & \times \cos\left((h\beta-h\gamma)\sin\frac{(2n-1)\pi}{m} + \frac{(2n-1)\pi}{m}\right) + (h\beta-h\gamma)e^{(h\beta-h\gamma)\cos\frac{(2n-1)\pi}{m}} \times \\ & \left. \times \cos\left((h\beta-h\gamma)\sin\frac{(2n-1)\pi}{m} + \frac{2\pi(2n-1)}{m}\right) \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Используя равенства (11)-(12), после некоторых упрощений при $\beta < 0$ приводим выражение (19) к виду

$$\vartheta_m(h\beta) = -Y_m(h\beta, q_{1,k}, q_{2,k}),$$

где

$$\begin{aligned} Y_m(h\beta, q_{1,k}, q_{2,k}) = & \sum_{k=1}^{m/2} \left[(m-1)e^{h\beta\cos\frac{(2k-1)\pi}{m}} \left[q_{1,k} \cos\left(h\beta\sin\frac{(2k-1)\pi}{m}\right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + q_{2,k} \sin\left(h\beta\sin\frac{(2k-1)\pi}{m}\right) \right] - R_m(h\beta) \right], \end{aligned} \quad (20)$$

где $q_{1,k}, q_{2,k}$, $k = 1, 2, \dots, \frac{m}{2}$ – неизвестные и

$$\begin{aligned} R_m(h\beta) = & h\beta \sum_{\gamma=0}^N C_\gamma e^{(h\beta-h\gamma)\cos\frac{(2k-1)\pi}{m}} \cos\left((h\beta-h\gamma)\sin\frac{(2k-1)\pi}{m} + \frac{2\pi(2k-1)}{m}\right) + \\ & + \sum_{\gamma=0}^N C_\gamma (h\gamma) e^{(h\gamma-h\beta)\cos\frac{(2k-1)\pi}{m}} \cos\left((h\gamma-h\beta)\sin\frac{(2k-1)\pi}{m} + \frac{2\pi(2k-1)}{m}\right). \end{aligned}$$

Вычисления показывают, что $\vartheta_m(h\beta)$ при $\beta > N$ имеет вид

$$\vartheta_m(h\beta) = Y_m(h\beta, q_{1,k}, q_{2,k}).$$

Используя последние два выражения для $\vartheta_m(h\beta)$ и учитывая (17), мы имеем

$$u_m(h\beta) = \begin{cases} Y_m(h\beta, r_{1,k}, r_{2,k}) - Y_m(h\beta, q_{1,k}, q_{2,k}), & \beta < 0, \\ Y_m(h\beta, r_{1,k}, r_{2,k}) + Y_m(h\beta, q_{1,k}, q_{2,k}), & \beta > N. \end{cases} \quad (21)$$

Здесь $r_{1,k}, r_{2,k}$ и $q_{1,k}, q_{2,k}$ – неизвестные.

Обозначим

$$\begin{aligned} r_{1,k}^- &= r_{1,k} - q_{1,k}, & r_{2,k}^- &= r_{2,k} - q_{2,k}, & k &= 1, 2, \dots, \frac{m}{2}, \\ r_{1,k}^+ &= r_{1,k} + q_{1,k}, & r_{2,k}^+ &= r_{2,k} + q_{2,k}, & k &= 1, 2, \dots, \frac{m}{2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Если мы найдем неизвестные $r_{1,k}^-, r_{2,k}^-$ и $r_{1,k}^+, r_{2,k}^+$, $k = 1, 2, \dots, \frac{m}{2}$, то из (22) получаем $r_{1,k}, r_{2,k}$ и $q_{1,k}, q_{2,k}$, $k = 1, 2, \dots, \frac{m}{2}$ следующим образом

$$\begin{aligned} r_{1,k} &= \frac{1}{2}(r_{1,k}^+ + r_{1,k}^-), & r_{2,k} &= \frac{1}{2}(r_{2,k}^+ + r_{2,k}^-), & k &= 1, 2, \dots, \frac{m}{2}, \\ q_{1,k} &= \frac{1}{2}(r_{1,k}^+ - r_{1,k}^-), & q_{2,k} &= \frac{1}{2}(r_{2,k}^+ - r_{2,k}^-), & k &= 1, 2, \dots, \frac{m}{2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Так как при $\beta < 0$ и $\beta > N$ коэффициенты $C_\beta = 0$, то из (18) при $r_{1,k}^-, r_{2,k}^-$ и $r_{1,k}^+, r_{2,k}^+$, $k = 1, 2, \dots, \frac{m}{2}$ получаем следующую систему $2m$ линейных уравнений

$$D_m(h\beta) * u_m(h\beta) = 0 \text{ for } \beta = -1, -2, \dots, -m \text{ and } \beta = N+1, N+2, \dots, N+m.$$

Решение последней системы с учетом (22) и (23) из равенств (10) и (21) мы получаем следующий явный вид для $u_m(h\beta)$:

$$u(h\beta) = \begin{cases} Y_m(h\beta, r_{1,k}^-, r_{2,k}^-), & \beta < 0, \\ \varphi(h\beta), & \beta = 0, 1, \dots, N, \\ Y_m(h\beta, r_{1,k}^+, r_{2,k}^+), & \beta > N. \end{cases} \quad (24)$$

Тогда мы получаем коэффициенты C_β натуральных сплайнов вида (5) следующим образом

$$C_\beta = D_m(h\beta) * u_m(h\beta), \quad \beta = 0, 1, \dots, N.$$

Таким образом, решена задача построения натуральных сплайнов вида (2) в пространстве $W_2^{(m,0)}(0,1)$ для четных натуральных чисел m . В следующем параграфе мы реализуем этот алгоритм в случае $m = 2$.

4 Тригонометрический натуральный сплайн

В данном параграфе представлен результат реализации алгоритма построения тригонометрического натурального сплайна (2) в пространстве $W_2^{(m,0)}(0,1)$ в случае $m = 2$.

Случай $m = 2$: В этом случае задача 1 выглядит следующим образом.

Задача 2. Найдите функцию $S_2(x) \in W_2^{(2,0)}$, которая минимизирует величину

$$\int_0^1 (\varphi''(x) + \varphi(x))^2 dx$$

и удовлетворяет условиям интерполяции

$$S_2(h\beta) = \varphi(h\beta), \quad \beta = 0, 1, \dots, N,$$

где $h = \frac{1}{N}$, $N = 1, 2, \dots$, $\varphi \in W_2^{(2,0)}(0,1)$.

Решением задачи 2 является тригонометрический натуральный сплайн $S_2(x)$ и он имеет следующий вид

$$S_2(x) = \sum_{\gamma=0}^N C_\gamma \frac{\operatorname{sgn}(x - h\gamma)}{4} [\sin(x - h\gamma) - (x - h\gamma) \cos(x - h\gamma)] + r_{1,1} \sin x + r_{2,1} \cos x$$

и коэффициенты C_γ , $\gamma = 0, 1, \dots, N$, $r_{1,1}$ и $r_{2,1}$ этого сплайна удовлетворяют систему

$$C_\beta * G_2(h\beta) + r_{1,1} \sin(h\beta) + r_{2,1} \cos(h\beta) = \varphi(h\beta), \quad \beta = \overline{0, N}, \quad (25)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_\gamma \sin(h\gamma) = 0, \quad (26)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_\gamma \cos(h\gamma) = 0. \quad (27)$$

где

$$G_2(h\beta) = \frac{\sin(h\beta)}{4} [\sin(h\beta) - h\beta \cos(h\beta)].$$

В работе [21] решена система (25) - (27) и доказана следующая теорема:

Теорема 3. Коэффициенты тригонометрического натурального сплайна $S_2(x)$ в пространстве $W_2^{(2,0)}(0,1)$ имеют следующий вид

$$C_0 = Cp\varphi(0) + p[\varphi(h) - r_{1,1}^- \sin h + r_{2,1}^- \cos h] + \frac{A_1 p}{\lambda_1} \left[\sum_{\gamma=0}^N \lambda_1^\gamma \varphi(h\gamma) + M_1 + \lambda_1^N N_1 \right],$$

$$C_\beta = Cp\varphi(h\beta) + p[\varphi(h(\beta-1)) + \varphi(h(\beta+1))] + \frac{A_1 p}{\lambda_1} \left[\sum_{\gamma=0}^N \lambda_1^{|\beta-\gamma|} \varphi(h\gamma) + \lambda_1^\beta M_1 + \lambda_1^{N-\beta} N_1 \right], \quad \beta = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$C_N = Cp\varphi(1) + p[\varphi(h(N-1)) + r_{1,1}^+ \sin(1+h) + r_{2,1}^+ \cos(1+h)] + \frac{A_1 p}{\lambda_1} \left[\sum_{\gamma=0}^N \lambda_1^{N-\gamma} \varphi(h\gamma) + \lambda_1^N M_1 + N_1 \right],$$

$$r_{1,1} = \frac{1}{2}(r_{1,1}^+ + r_{1,1}^-), \quad r_{2,1} = \frac{1}{2}(r_{2,1}^+ + r_{2,1}^-),$$

где

$$M_1 = \frac{\lambda_1 [d_2^-(\cos h - \lambda_1) - d_1^- \sin h]}{\lambda_1^2 - 2\lambda_1 \cos h + 1}, \quad (28)$$

$$N_1 = \frac{\lambda_1 [d_2^+(\cos(1+h) - \lambda_1 \cos 1) + d_1^+(\sin(1+h) - \lambda_1 \sin 1)]}{\lambda_1^2 - 2\lambda_1 \cos h + 1}, \quad (29)$$

и $r_{1,1}^+$, $r_{1,1}^-$, $r_{2,1}^+$, $r_{2,1}^-$, p , A_1 , C и λ_1 определены в теореме 3.1 работы [21].

Отметим, что тригонометрический натуральный сплайн вида $S_2(x)$ с коэффициентами, указанными в теореме 3, точна для тригонометрических функций $\sin(x)$ и $\cos(x)$.

5 Заключение

Таким образом, в данной работе с использованием метода Соболева представлен алгоритм решения системы алгебраических уравнений относительно коэффициентов натуральных сплайнов вида (2). Решая систему (10)-(12) в случае $m = 2$, получены явные выражения для коэффициентов C_β и с использованием этих коэффициентов построен тригонометрический натуральный сплайн вида $S_2(x)$ в пространстве $W_2^{(2,0)}(0,1)$. Отметим, что тригонометрический натуральный сплайн вида $S_2(x)$ в пространстве $W_2^{(2,0)}(0,1)$, точна для тригонометрических функций $\sin(x)$ и $\cos(x)$.

Литература

- [1] Schoenberg I.J. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Part A: On the problem of smoothing or graduation. A first class of analytic approximation formulae. Part B: On the problem of osculatory interpolation. A second class of analytic approximation formulae. Quart. Appl. Math. – 1946. – Vol. 4. – P. 45–99.

- [2] *Schoenberg I.J.* Spline interpolation and the higher derivatives. Number Theory and Analysis. New York: Plenum – 1969. – P. 279–295.
- [3] *Holladay J.C.* Smoothest curve approximation. Math. Tables Aids Comput. – 1957. – Vol. 11. – P. 223–243.
- [4] *de Boor C.* Best approximation properties of spline functions of odd degree. J. Math. Mech. – 1963. – Vol. 12. – P. 747–749.
- [5] *de Boor C.* A practical guide to splines. New York Heidelberg Berlin: Springer, – 1978. – 342 p.
- [6] *Schumaker L.L.* Spline functions: basic theory. Cambridge: Cambridge University Press, – 2007. – 600 p.
- [7] *Mastroianni G., Milovanović G.V.* Interpolation processes. Basic theory and applications. – Berlin: Springer, – 2008. – 262 p.
- [8] *Farin G.E.* Curves and Surfaces for Computer-aided Geometric Design. Fourth Edition, Academic Press, – 1997. – 429 p.
- [9] *Unser M.* Splines: a perfect fit for signal and image processing. IEEE Signal Processing Magazine, – 1999. – Vol. 16. – no. 6. – P. 22–38.
- [10] *Lehmann T.M., Gonner C., Spitzer K.* Survey: Interpolation methods in medical image processing. IEEE Transactions on Medical Imaging, – 1999. – Vol. 18. – no. 11. – P. 1049–1075.
- [11] *Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.* Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, – 1976. – 248 с.
- [12] *Василенко В.А.* Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. Новосибирск: Наука, – 1983. – 215 с.
- [13] *Shadimetov Kh.M., Boltaev A.K.* System for finding the optimal coefficients of an interpolation spline. AIP Conference Proceedings. – 2024. – 3004 p. <https://doi.org/10.1063/5.0199834>
- [14] *Соболев С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М. Наука, – 1974. – 808 с.
- [15] *Соболев С.Л., Васкевич В.Л.* Теория кубатурных формул. СО АН России. Новосибирск, – 1996. – 484 с.
- [16] *Шадиметов Х.М.* Дискретный аналог оператора и его построения. Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 1985. – № 79. – С. 22–35.
- [17] *Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R.* Optimal quadrature formulas in the sense of Sard in $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ space. Calcolo, – 2014. – №2. – P. 211–243.
- [18] *Hayotov A.R.* The discrete analogue of a differential operator and its applications. Lithuanian Mathematical Journal, – 2014. – Vol. 54. – №3. – P. 290–307.
- [19] *Boltaev A.K., Hayotov A.R., Shadimetov Kh.M.* Construction of optimal quadrature formulas exact for exponential-trigonometric functions by Sobolev's method. Acta Mathematica Sinica, English series, – 2021. – Vol. 37. – №7. – P. 1066–1088.
- [20] *Shadimetov Kh., Boltaev A., Parovik R.* Optimization of the approximate integration formula using the discrete analogue of a high-order differential operator. Mathematics, – 2023. – Vol. 11. – 3114 p.
- [21] *Hayotov A.R., Milovanović G.V., Shadimetov Kh.M.* Interpolation splines minimizing a semi-norm. Calcolo, – 2014. – Vol. 51. – no 2. – P. 245–260.

UDC 519.652

ON AN INTERPOLATION OF A FUNCTION BY NATURAL SPLINES

^{1,2*}*Boltaev A.K.*, ³*Pardaeva O.F.*

**aziz_boltayev@mail.ru*

¹International Nordic University,

8/2 Bunyodkor str., Tashkent, 100043, Uzbekistan;

²V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics AS RUz,

9 University str., Tashkent, 100174 Uzbekistan;

³National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek,

4 University str., Tashkent, 100174 Uzbekistan.

There are algebraic and variational approaches of construction in the spline theory. In algebraic approach splines are considered as some smooth piecewise polynomial functions. In the variational approach splines are elements of Hilbert or Banach spaces minimizing certain functionals. Then we study the problems of existence, uniqueness, and convergence of splines and algorithms for constructing them based on their own properties of splines. In this paper, we study the problem of natural spline functions in a Hilbert space. Here, using the Sobolev method, an algorithm is given for solving a system of linear algebraic equations for the coefficients of the natural spline functions. For $m = 2$, explicit expressions for the optimal coefficients of the natural spline function in the Hilbert space $W_2^{(2,0)}$ are obtained.

Keywords: Hilbert space, extremal function, error functional, spline function.

Citation: Boltaev A.K, Pardaeva O.F.2025. On an interpolation of a function by natural splines. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 3(67):97-106.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.3_67.2025.08.

HISOBLASH VA AMALIY MATEMATIKA MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL
AND APPLIED MATHEMATICS



ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 3(67) 2025

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Азамов А.А., Арипов М.М., Шадиметов Х.М.

Ответственный секретарь:

Ахмедов Д.Д.

Редакционный совет:

Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Арушанов М.Л., Бурнашев В.Ф.,
Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия), Игнатьев Н.А.,
Ильин В.П. (Россия), Иманкулов Т.С. (Казахстан), Исмагилов И.И. (Россия),
Кабанихин С.И. (Россия), Карачик В.В. (Россия), Курбонов Н.М., Маматов Н.С.,
Мирзаев Н.М., Мухамадиев А.Ш., Назирова Э.Ш., Нормуродов Ч.Б.,
Нуралиев Ф.М., Опанасенко В.Н. (Украина), Расулмухамедов М.М., Расулов А.С.,
Садуллаева Ш.А., Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А.,
Хамдамов Р.Х., Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Чье Ен Ун (Россия),
Шабозов М.Ш. (Таджикистан), Dimov I. (Болгария), Li Y. (США),
Mascagni M. (США), Min A. (Германия), Singh D. (Южная Корея),
Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

Дизайн и вёрстка:

Шарилов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 30.06.2025 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №5. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 3(67) 2025

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

Editor-in-Chief:

Ravshanov N.

Deputy Editors:

Azamov A.A., Aripov M.M., Shadimetov Kh.M.

Executive Secretary:

Akhmedov D.D.

Editorial Council:

Aloev R.D., Amirgaliev E.N. (Kazakhstan), Arushanov M.L., Burnashev V.F.,
Zagrebina S.A. (Russia), Zadorin A.I. (Russia), Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia),
Imankulov T.S. (Kazakhstan), Ismagilov I.I. (Russia), Kabanikhin S.I. (Russia),
Karachik V.V. (Russia), Kurbonov N.M., Mamatov N.S.,
Mirzaev N.M., Mukhamadiev A.Sh., Nazirova E.Sh., Normurodov Ch.B., Nuraliev F.M.,
Opanasenko V.N. (Ukraine), Rasulov A.S., Sadullaeva Sh.A., Starovoitov V.V. (Belarus),
Khayotov A.R., Khaldjigitov A., Khamdamov R.Kh., Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh.,
Chye En Un (Russia), Shabozov M.Sh. (Tajikistan), Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA),
Mascagni M. (USA), Min A. (Germany), Singh D. (South Korea), Singh M. (South
Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the
Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.

The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.

Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

Address:

100125, Tashkent, Buz-2, 17A.

Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

E-mail: journals@airi.uz.

Web-site: <https://journals.airi.uz>.

Layout design:

Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.

Signed for print 30.06.2025

Format 60x84 1/8. Order No. 5. Print run of 100 copies.

Содержание

Хужсайёров Б., Джиёнов Т.О., Эшдавлатов З.З.

Перенос вещества в элементе трещиновато-пористой среды с учетом эффекта памяти 5

Муминов У.Р.

Вырожденные отображения Лотки-Вольтерры и соответствующие им биграфы как дискретная модель эволюции взаимодействия двух вирусов 15

Хужсайёров Б.Х., Зокиров М.С.

Аномальная фильтрация жидкости в плоско-радиальной однородной пористой среде 28

Назирова Э.Ш., Карабаева Х.А.

Численное решение нелинейной задачи фильтрации грунтовых и напорных вод 37

Нормуродов Ч.Б., Тиловов М.А., Нормуродов Д.Ч.

Численное моделирование динамики амплитуды функции тока для плоского течения Пуазейля 53

Абдуллаева Г.Ш.

Построение алгебраически-гиперболического сплайна естественного натяжения восьмого порядка 67

Алоев Р.Д., Бердышев А.С., Нематова Д.Э.

Численное исследование устойчивости по Ляпунову противоточной разностной схемы для квазилинейной гиперболической системы 83

Болтаев А.К., Пардаева О.Ф.

Об одной интерполяции функции натуральными сплайнами 97

Хаётов А.Р., Нафасов А.Ю.

Оптимальная интерполяционная формула с производной в гильбертовом пространстве 107

Шадиметов М.Х., Азамов С.С., Кобылов Х.М.

Оптимизация приближённых формул интегрирования для классов периодических функций 116

Игнатъев Н.А., Тошпулатов А.О.

О проблемах поиска выбросов в задаче с одним классом 125

Юлдашев С.У.

Тонкая настройка AlexNet для классификации форм крыш в Узбекистане: подход с использованием трансферного обучения 133

Contents

Khuzhayorov B., Dzhiyanov T.O., Eshdavlatov Z.Z.

Anomalous solute transport in an element of a fractured-porous medium with memory effects 5

Muminov U.R.

Degenerate Lotka-Volterra mappings and their corresponding bigraphs as a discrete model of the evolution of the interaction of two viruses 15

Khuzhayorov B.Kh., Zokirov M.S.

Anomalous filtration of liquid in a plane-radial homogeneous porous medium . . 28

Nazirova E., Karabaeva Kh.A.

Numerical solution of the nonlinear groundwater and pressurized water filtration problem 37

Normurodov Ch.B., Tilovov M.A., Normurodov D.Ch.

Numerical modeling of the amplitude dynamics of the stream function for plane Poiseuille flow 53

Abdullaeva G.Sh.

Construction of an algebraic-hyperbolic natural tension spline of eighth order . . 67

Aloev R.D., Berdishev A.S., Nematova D.E.

Numerical study of Lyapunov stability of an upwind difference scheme for a quasilinear hyperbolic system 83

Boltaev A.K., Pardaeva O.F.

On an interpolation of a function by natural splines 97

Hayotov A.R., Nafasov A.Y.

On an optimal interpolation formula with derivative in a Hilbert space 107

Shadimetov M.Kh., Azamov S.S., Kobilov H.M.

Optimization of approximate integration formulas for periodic function classes . 116

Ignatiev N.A., Toshpulatov A.O.

About problems with finding outliers in a single-class problem 125

Yuldashev S.U.

Fine-tuned AlexNet for roof shape classification in Uzbekistan: a transfer learning approach 133