

УДК 519.6:622.276+622.279

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ АЭРОЗОЛЬНЫХ ЧАСТИЦ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ АТМОСФЕРЫ С УЧЕТОМ ИХ ПОГЛОЩЕНИЯ И ЗАХВАТА РАСТИТЕЛЬНОМ ПОКРОВОМ

^{1*}Равшанов Н., ^{1,2}Таштемирова Н., ³Каршиев Д.А.
*ravshanzade-09@mail.ru

¹Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта,
100125, Узбекистан, Ташкент, м-в. Буз-2, 17А;

²Ташкентский университет информационных технологий,
100200, Узбекистан, Ташкент, ул. А. Тимура, 108;

³Ташкентский педиатрический медицинский институт,
100140, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Богишамол, 223.

Для исследования и прогнозирования процесса переноса и диффузии вредных веществ в приземном слое атмосферы разработаны математическая модель основанная на основных законах гидромеханики (сохранения массы, количества движения и импульса) и консервативный численный алгоритм, в котором помимо погодноклиматических факторов учитывается явление поглощения и захвата аэрозольных частиц элементами растительности, взаимодействия с поверхностью земли, изменения коэффициента турбулентности по высоте и направления ветра со временем. В работе источниками загрязняющих веществ являются точечные источники, мощности которых изменяются со временем $\theta(x, y, z, t)$. Алгоритм решения задачи основан на методе прямых и конечно-разностной полунеявной схеме с обеспечением высокого порядка точности по времени и пространственным переменным. В зависимости от значения $(w - w_g)$ используются разностные схемы по потоку и против потока.

Ключевые слова: математическая модель, аэрозольные частицы, метод прямых, разностная схема, перенос и диффузия вредных веществ.

Цитирование: Равшанов Н., Таштемирова Н., Каршиев Д.А. Моделирование процесса распространения аэрозольных частиц в пограничном слое атмосферы с учетом их поглощения и захвата растительным покровом // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2024. – № 2(56). – С. 41-57.

1 Введение

Развитие промышленных объектов, заводов, фабрик, транспортных средств, добычи и переработки энергоносителей прямым образом воздействует на экологическое состояние атмосферы и окружающей среды крупных промышленных регионов и мегаполисов с большим темпов развивающихся стран Мира. В результате увеличения количества и мощностей промышленных объектов увеличивается объем выбросов в атмосферу вредных веществ, углекислых газов, активных и пассивных аэрозольных частиц.

Вопрос об оценке загрязнения атмосферы и подстилающей поверхности пассивными и активными аэрозольными выбросами, и примесями, размещения промышленных предприятий с соблюдением санитарных норм, определение количества взвешенных частиц над регионом и выпавших частиц на подстилающую поверхность являются актуальными в проблеме охраны окружающей среды.

Одним из экономичных и легко реализуемых эффективных инструментов для проведения комплексного исследования в широком диапазоне изменения основных параметров и внешних возмущений, действующие на процесс переноса и диффузии являются: – математическая модель (ММ), численный алгоритм (ЧА) и программный комплекс (ПК), используя которых можно проводить вычислительный эксперимент (ВЭ) на вычислительной системе (ВС), можно прогнозировать и принимать управленческие решения по экологическому состоянию рассматриваемого промышленного региона.

Задачами ММ процессов, связанных с загрязнением окружающей среды, и защите состояния пограничного слоя атмосферы, посвящен большой цикл исследований, выполненных в нашей стране и за рубежом и получены результаты теоретического и прикладного характера.

Фундаментальные аспекты методологии ММ процесса переноса и диффузии вредных мелкодисперсных частиц и углекислых газов в атмосфере сформулированы в работах Марчука Г.И., Р.И.Оникула, Ф.Б. Абуталиева, Н.Л.Бызовой, Ю.А.Анохиной, М.Е. Берлянда, А.Солодкова, Е.Л.Гениховича, Т.Iversen, Т.Е.Nordeng, М.Рekar, G.A. Briggs, S.R. Hanna, E. Weber, P. Zambelli, R. Lange, и их учеников.

В работе [1] статистический подход привлекает простотой своего математического аппарата и получил экспериментальное подтверждение в относительно простых условиях - над гладкой поверхностью и в отсутствии стоков примеси. Для учета влажного вымывания примеси осадками, поглощения ее деревьями и т.п в рамках данного метода понадобилось введение искусственных функций "истощения" что резко уменьшает его теоретическую ценность. Кроме того, нормальный характер распределения примеси по вертикали, постулируемый статистическим методом, не выдержал экспериментальной проверки.

В работе [2] анализируется взаимодействие растительных массивов с потоками примесей от источников загрязняющих веществ трех типов. В первом случае рассматривается удаленное предприятие, когда в потоке воздуха загрязняющее вещество распределено относительно равномерно по высоте приземного слоя. Второй случай - загрязнение от локального кратковременно действующего источника. В этом случае через растительный массив проходит облако интенсивного загрязнения, имеющее конечные размеры. Третий тип - наземный источник загрязнения. В качестве примера рассматривается автомобильная трасса. Теоретическое и натурное исследование переноса и рассеяния примесей, выбрасываемых потоком движущихся автомобилей и переносимых воздушным потоком сквозь растительные массивы, представляет существенные сложности, обусловленные нестационарностью рассматриваемого процесса и случайным характером появления автомобилей. Концентрации примесей в произвольной точке изучаемой области зависят от объемов отработанных газов, выбрасываемых всеми автомобилями, одновременно находящимися на рассматриваемом участке и являющимися подвижными точечными источниками загрязнения. В настоящей работе исследуется зависимость от времени и координат концентрации выхлопных газов, определяются ее стохастические характеристики.

Работа [3] посвящена разработке методов математического моделирования диффузии аэрозоля в растительном покрове и их апробация при оптимизации технологии применения ядохимикатов, распыляемых наземными источниками. Для математического моделирования турбулентного переноса аэрозоля с учетом его частичного поглощения на разных уровнях растительного покрова автор рассматривает модель

пограничного слоя атмосферы, детально учитывающей аэродинамические свойства растительного сообщества.

В данной работе [4] разработана математическая модель, численный алгоритм процесса переноса и диффузии вредных веществ, учитывающая скорость ветра в трех направлениях и скорость осаждения аэрозольных частиц на подстилающую поверхность, а также захват частиц элементами растительности, которые играют значительную роль в динамике объекта исследования. Для исследования адекватности разработанного математического аппарата были проведены вычислительные эксперименты на ЭВМ, результаты которых сравнивались с натурными данными реального производственного объекта, расположенного в Ташкентской области Узбекистана.

Работа [5] оценивает влияние городских деревьев на рассеивание угарного газа (СО), выбрасываемого дорожным движением, из-за вызванного изменения характеристик ветрового потока. С этой целью стандартные уравнения течения с замыканием $k-\epsilon$ для турбулентности были расширены возможностью учета аэродинамического воздействия деревьев на поле ветра. Результаты показывают, что качество городского воздуха можно оптимизировать на основе научно обоснованного планирования зеленых насаждений.

В статье [6] изучается двумерная модель, которая объясняет взаимодействие воздушного потока с разнообразным растительным покровом в приземном слое атмосферы. Результаты численных экспериментов с использованием этой модели показали, что поле скорости ветра в приземном слое над лесополосой и лесным массивом с вырубкой. Неявные разностные схемы используются для численного решения уравнений модели.

Анализируя литературные источники по проблеме математического моделирования процесса масса и теплопереноса в пористых и сложных системах пришли к выводу, что при разработке адекватного математического аппарата для мониторинга и прогнозирования концентрации вредных веществ в атмосфере по мимо учета погодно-климатических факторов необходимо учитывать изменения концентрации вредных веществ в атмосфере: во первых, за счет изменения степени влажности воздушной массы атмосферы; во вторых, за счет захвата частиц растительными покровами в приземном слое атмосферы (0,5-200 м); в третьих, за счет взаимодействия вредных веществ с поверхностью земли (0,002-0,005 м); в четвертых, за счет изменения направления ветра со временем.

2 Постановка задачи

Для исследования, прогнозирования и анализа процесса распространения аэрозольных выбросов в атмосферу с учетом указанных выше факторов разработана математическая модель распространения вредных веществ в атмосфере, описываемая уравнением переноса и диффузии, основанное на законе сохранения массы, количества движения [7, 8]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial t} + u \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial x} + v \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial y} + (w - w_g) \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial z} + \\ + (\sigma + \eta) \theta(x, y, z, t) = \kappa_d \left(\frac{\partial^2 \theta(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta(x, y, z, t)}{\partial y^2} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa_t \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial z} \right) + \delta(x, y, z) Q(x, y, z, t); \end{aligned} \quad (1)$$

с начальными и краевыми условиями:

$$\theta(x, y, z, 0) = \theta_0(x, y, z), \quad (2)$$

$$\begin{cases} u \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial x} \Big|_{x=0, x=L_x} = \chi (\theta(x, y, z, t) - \theta_a(x, y, z, t)); \\ v \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial y} \Big|_{y=0, y=L_y} = \chi (\theta(x, y, z, t) - \theta_a(x, y, z, t)); \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \varkappa_t \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = \beta(x, y, z) \theta(x, y, z, t); \\ w \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=H} = \chi (\theta(x, y, z, t) - \theta_a(x, y, z, t)). \end{cases} \quad (4)$$

Задача (1)-(4) решается в области

$$G = (0 \leq x \leq L_x; 0 \leq y \leq L_y; 0 \leq z \leq H, t > 0).$$

Здесь: $\theta(x, y, z, t)$ – концентрация распространяющегося вещества; $Q(x, y, z, t)$ – мощность источников вредных веществ; t – время; x, y, z – координаты; u, v, w – составляющие скорости ветра по направлениям x, y, z соответственно; w_g – скорость осаждения частицы; \varkappa_t – коэффициент турбулентного перемешивания; \varkappa_d – коэффициент диффузии; σ – коэффициент поглощения; η – коэффициент захвата аэрозольных частиц растительным покровом; β – коэффициент взаимодействия с подстилающей поверхностью; χ – параметр для приведения в размерность краевые условия.

Из постановки задачи следует, что для учета взаимодействия аэрозольных частиц с растительным покровом подстилающей поверхности земли коэффициент β [9] необходимо вычислить с помощью формулы

$$\beta(x, y, z) = \begin{cases} 0, & z > z_k; \\ 0.264u(z)^{1,65}w_g s(z), & z < z_h. \end{cases}$$

Здесь z_h, z_k – высота растительности и критического слоя, $s(z)$ – удельная поверхность растительности, w_g – скорость осаждения аэрозольных частиц.

Для вычисления коэффициента захвата мелкодисперсных аэрозольных частиц в пограничном слое можно использовать соотношение [7, 10]

$$\eta(x, y, z, U) = \begin{cases} -\rho C_d L(x, y, z) U u_i, & \text{при } z \succ z_k; \\ 0, & \text{при } z \succ z_{r \max}. \end{cases}$$

где ρ – плотность воздуха ($\text{кг}/\text{м}^3$); C_d – коэффициент лобового сопротивления; $L(x, y, z)$ – профиль плотности листовой поверхности растительности (или показатель площади поверхности листьев на единицу объема); U – скорость воздушного потока; u_i – скорость потока в интересующем направлении.

Плотность листовой поверхности – это параметр, который используется для описания структуры зеленого покрова и характеризует количество листьев, находящихся на определенной площади или в объеме растительной массы. $L(x, y, z)$ определяется как общая площадь листовой поверхности, приходящаяся на единицу объема или площадь растительной массы. Обычно выражается в единицах площади листовой поверхности на единицу объема или площади, например, квадратных метров на кубический метр ($\text{м}^2/\text{м}^3$) [11–13]:

$$L(x, y, z) = L_m \left(\frac{z_h - z_m}{z_h - z} \right)^\gamma / \exp \left[\gamma \left(1 - \frac{z_h - z_m}{z_h - z} \right) \right],$$

где

$$\gamma = \begin{cases} 6 & 0 \leq z < z_m; \\ 0,5 & z_m \leq z \leq h; \end{cases}$$

L_m – коэффициент максимальной плотности площади листьев в пределах растительности; z_m – высота, на которой $L_m z_m = 0.4h$.

Для вычисления коэффициента поглощения вредных веществ в атмосфере, за счет изменения содержания влаги в атмосфере, можно использовать функциональную зависимость

$$\sigma(t) = \sigma_0 + \Delta\sigma \sin(\omega t),$$

где σ_0 – среднесуточное изменение коэффициента поглощения аэрозольных выбросов в атмосферу; $\Delta\sigma$ – амплитуда изменения коэффициента поглощения за сутки; ω – циклическая частота суточного изменения.

Надо подчеркнуть, что среднесуточное изменение коэффициента поглощения аэрозольных выбросов в атмосферу и амплитуда изменения коэффициента поглощения за сутки зависит от времени года и географического расположения местности и влажности атмосферной массы рассматриваемого региона.

Обмен аэрозолей между приземным слоем и атмосферой реализуется с помощью первого условия краевого условия (4). Мощность источников загрязняющих выбросов в атмосфере зависит от типов объекта производства и используемых мокрых, сухих фильтров и сепараторов для разделения мелкодисперсных частиц от основного потока.

В математической модели процесса распространения вредных веществ в атмосфере коэффициент турбулентности, который является одним из основных параметров, зависит от высоты, времени протекания рассматриваемого процесса и от неоднородностистилающей поверхности земли.

Анализ метеонаблюдений показал, что как правило, ночью и подутреннее время наблюдается устойчивая и безразличная стратификация в атмосфере, а в дневное время – неустойчивая стратификация атмосферы за счет неравномерного нагревания слоев атмосферы и подстилающей поверхности земли. Поэтому для вычисления значения коэффициента турбулентности пользуются метеорологическими характеристиками в приземном пограничном слое атмосферы, которые функционально связывают вертикальное распределение коэффициента турбулентности от стратификации атмосферы и числа Россби.

Так как задача (1)-(4), описывается с помощью многомерных дифференциальных уравнений в частных производных со средоточенными параметрами, получить точное или аналитическое решение затруднительно и необходимо разработать эффективный, легко реализуемый численный алгоритм.

Таким образом, задача переноса и диффузии солепылевых частиц, распространения аэрозолей от осушенных зон морей, водохранилищ, промышленных площадок и выбросов промышленных предприятий сводится к решению многомерных дифференциальных уравнений в частных производных. Для ее решения надо задать соответствующие начальные и краевые условия и входные данные.

Входными данными для решения поставленной задачи являются начальные поля концентрации загрязняющих вредных веществ в атмосфере, скорости и направления воздушного потока воздуха в рассматриваемой территории региона, коэффициенты диффузии и вертикальной турбулентности, коэффициенты взаимодействия с поверхностью земли и поглощения вредных веществ в атмосфере и другие сопутствующие параметры действующие на процесс в целом.

При распространении вредных веществ огромную роль играет стратификация атмосферы. Подутреннее время часто наблюдается устойчивая и безразличная стратификация, а днем неустойчивая стратификация. Коэффициент турбулентности \varkappa_t зависит от распределения стратификации атмосферы. Распределению коэффициента турбулентности по вертикали посвящены многочисленные экспериментальные работы.

Как отмечено в работе Б.М. Гальперина коэффициент турбулентности \varkappa_t при устойчивой, безразличной стратификации изменяется от 0 до 0,4 м²/с на 100 м, а при неустойчивой стратификации растет от нуля до 50 м²/с и быстро изменяется по высоте. При устойчивой стратификации также до высоты 20 м растет и быстро убывает, а скорость осаждения частиц вычисляется по формуле [14]:

$$w_g = \frac{2g\rho}{9\eta}r^2,$$

где g – ускорения свободного падения;

ρ – плотность воздуха; η – коэффициент динамической вязкости газа; r – радиус частицы.

Для вычисления коэффициента диффузии использована формула

$$\varkappa_d = |\mathbf{v}| (\varkappa_0 + R\lambda_0^2),$$

где λ_0^2 выражает дисперсию возмущений направления ветра, осреднённой за достаточно большой промежуток времени, R – расстояние от источника, \varkappa_0 – параметр, определяемый по характеристикам приземного слоя, $|\mathbf{v}|$ – известная величина скорости потока воздушной массы атмосферы.

Как было отмечено в работе [9] коэффициент взаимодействия с подстилающей поверхностью β изменяется в пределах $0 \leq \beta \leq 1$. Если частица попадает в твердую стенку, то считается $\beta \approx 0$, если в водную поверхность $\beta \approx 1$. Обычно часть аэрозольных выбросов, в зависимости от своих масс, метеорологических и климатических условий, характеристики подстилающей поверхности и географического расположения области распространения попадает на подстилающую поверхность, а часть из них опять попадает в атмосферу. Обычно считают, что β является постоянной величиной в рассматриваемой области. Это искажает прогноз распределения попадания и осаждения частиц на подстилающую поверхность. Чтобы избежать такой проблемы, при разработке математической модели процесса в краевых условиях (4) учитывают варианты $\beta = const$ и $\beta = \beta(x, y, z)$.

Таким образом, построена математическая модель распространения и переноса вредных веществ в атмосфере с учетом климатических факторов, неоднородности подстилающей поверхности земли и характеристики пограничного слоя атмосферы.

Для интегрирования уравнения основные параметры математической модели процесса $u, v, w, \varkappa_t, \varkappa_d$ будем определять в виде степенных функций:

$$u(z, t) = |v_1| \left(\frac{z}{z_1}\right)^n \cos \beta; \quad v(z, t) = |v_1| \left(\frac{z}{z_1}\right)^n \sin \beta; \quad w(z, t) = |v_1| \left(\frac{z}{z_1}\right)^n;$$

$$\varkappa_t(z, t) = \varkappa_0(z, t) + \overline{\varkappa}(z, t); \quad \varkappa_d(z, t) = \overline{\varkappa}_d \left| \vec{V}(z, t) \right|.$$

Здесь $\left| \vec{V}(z, t) \right|$ – модуль скорости ветра при $z = 1$ м.

В таком случае, изменение составляющих скорости ветра близко к логарифмическому закону, а профиль коэффициента турбулентности в пограничном слое изменяется в соответствии от температурной стратификации, а коэффициент диффузии растет с увеличением скорости ветра.

Для учета скорости и направления ветра, которые являются одними из основных факторов в разработанной математической модели процесса, введены вспомогательные функции

$$V_n = v(z_2)/w(z), \quad w(z) = \sqrt{u(z)^2 + v(z)^2}$$

и умножив оба части уравнения (1) на $v(z_2)/w(z)$ получим

$$\begin{aligned} & \frac{v(z_2)}{\omega(z)} \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial t} + \frac{v(z_2)}{\omega(z)} u \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial x} + \frac{v(z_2)}{\omega(z)} v \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial y} + \\ & + \frac{v(z_2)}{\omega(z)} (w - w_g) \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial z} + \frac{v(z_2)}{\omega(z)} (\sigma + \eta) \theta(x, y, z, t) = \\ = & \frac{v(z_2)}{\omega(z)} \kappa_d \left(\frac{\partial^2 \theta(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta(x, y, z, t)}{\partial y^2} \right) + \frac{v(z_2)}{\omega(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa_t(z, t) \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{v(z_2)}{\omega(z)} \delta(x, y, z) Q(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (5)$$

или

$$\begin{aligned} & V_n \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial t} + v(z_2) \cos \alpha(z) \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial x} + v(z_2) \sin \alpha(z) \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial y} + \\ & + V_n (w - w_g) \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial z} + V_n (\sigma + \eta) \theta(x, y, z, t) = \\ = & V(z_2) \kappa_d \left(\frac{\partial^2 \theta(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta(x, y, z, t)}{\partial y^2} \right) + V_n \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa_t(z, t) \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial z} \right) + \\ & + V_n \delta(x, y, z) Q(x, y, z, t). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $u(z) = \omega(z) \cos \alpha(z)$; $v(z) = \omega(z) \sin \alpha(z)$;

$$u(z) \frac{v(z_2)}{\omega(z)} = \omega(z) \cos \alpha(z) \frac{v(z_2)}{\omega(z)} = v(z_2) \cos \alpha(z); \quad v(z) \frac{v(z_2)}{\omega(z)} = v(z_2) \sin \alpha(z).$$

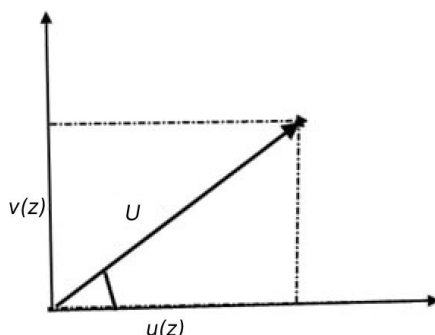


Рис. 1 Зависимость скорости от направления ветра

Разработана математическая модель процесса распространения вредных аэрозольных выбросов в атмосфере, с учетом: направление и скорости ветра как со временем, так и по высоте; коэффициента захвата частиц растительными покровами;

коэффициента поглощения аэрозольных частиц в атмосфере; коэффициента взаимодействия с постилающей поверхностью земли и других погодно-климатических факторов.

3 Метод решения задачи

Для решения и повышения порядка аппроксимации по пространственным переменным и обеспечения устойчивости конечно-разностных схем в поставленной задаче (1)-(4) воспользуемся монотонной полунеевной схемой, то есть в уравнении (1) конвективные члены, $u \frac{\partial \theta}{\partial x}$, $v \frac{\partial \theta}{\partial y}$ берутся из предыдущего момента времени $t = t_n$, остальные члены в момент времени $t = t_{n+1}$ и вводя сетку по временной переменной получим [15]:

$$\begin{aligned} V_n \frac{\theta^{n+1} - \theta^n}{\Delta t} + V_n(w - w_g) \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial z} + V_n(\sigma + \eta) \theta^{n+1} = \\ = V(z_2) \varkappa_d \left(\frac{\partial^2 \theta^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta^{n+1}}{\partial y^2} \right) + \\ + V_n \frac{\partial}{\partial z} \left(\varkappa_t(z, t) \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial z} \right) + V_n Q(x, y, z, t)^{n+1} + F^n, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$Q(x, y, z, t) = \sum_{i=0}^{N_o} \delta_i(x - x_i, y, z) q_i(x_i, y, z); F^n = v(z_2) \cos \alpha(z) \frac{\partial \theta^n}{\partial x} + v(z_2) \sin \alpha(z) \frac{\partial \theta^n}{\partial y}.$$

Из (7) видно, что все коэффициенты уравнения не зависят от x, y , следовательно, для решения его можно применить метод прямых [16].

В дальнейшем, отпуская верхний индекс $(n + 1)$ и введя сетку по x и y

$$\begin{aligned} \omega_{x,y} = (x_i = ih_x, i = 0, 1, 2, \dots, N_1 + 1, h_x = \frac{L_1}{(N_1 + 1)}; \\ y_j = jh_y, j = 0, 1, 2, \dots, N_2 + 1, y_j = \frac{L_2}{(N_2 + 1)}), \end{aligned}$$

записывая уравнение при $x = x_i$ получим разностную систему линейных алгебраических уравнений $N_1 - 20$ порядка.

$$\begin{aligned} \frac{V_n(z)}{\Delta t} \theta_i + V_n(z)(w - w_g) \frac{\partial \theta_i}{\partial z} + V_n(z)(\sigma + \eta) \theta_i = \\ = V(z) \varkappa_d \frac{\theta_{i-1} - 2\theta_i + \theta_{i+1}}{h_x^2} + V_n(z) \varkappa_d \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial y^2} + \\ + V_n(z) \frac{\partial}{\partial z} \left(\varkappa_t(z, t) \frac{\partial \theta_i}{\partial z} \right) + V_n(z) \sum_{i=0}^{N_o} \delta_i(x - x_i, y, z) q_i(x_i, y, z) - (F_i + \frac{V_n(z)}{\Delta t} \bar{\theta}_i) \end{aligned} \quad (8)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{V_n(z)}{\Delta t} \theta_i + V_n(z)(w - w_g) \frac{\partial \theta_i}{\partial z} + V_n(z)(\sigma + \eta) \theta_i = V(z) \varkappa_d \frac{M_1}{h_x^2} + V_n(z) \varkappa_d \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial y^2} + \\ + V_n(z) \frac{\partial}{\partial z} \left(\varkappa_t(z, t) \frac{\partial \theta_i}{\partial z} \right) + V_n(z) \sum_{i=0}^{N_o} \delta_i(x - x_i, y, z) q_i(x_i, y, z) - (F_i + \frac{V_n(z)}{\Delta t} \bar{\theta}_i). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь

$$M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Из свойства матрицы M_1 известно, что она является матрицей простой структуры и ее можно представить в виде $M_1 = B_1 \lambda_1 B_1^*$, $\lambda_1 = B_1^* M_1 B_1$; $B_1^{-1} = B_1^*$, $\lambda_{1,i}$ – диагональная матрица, элементы которой являются собственными значениями матрицы M_1 ,

$$\lambda_{1,i} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \lambda_{N_1} \end{pmatrix},$$

$\lambda_{1,i}$ и элементы матрицы B_1 вычисляются формулами

$$\lambda_{1,i} = -2 \left(1 - \cos \frac{i\pi}{N_1 + 1} \right); \quad b_{1,i,j} = (-1)^{i+j} \sqrt{\frac{2}{N_1 + 1}} \sin \frac{ij\pi}{N_1 + 1}; \quad (i, j = \overline{1, N_1}).$$

Умножая уравнение (10) слева на матрицу B_1^* и обозначая, $B_1^* \theta_i = \theta_i^{(1)}$ и после несложных преобразований получим:

$$\begin{aligned} & \frac{V_n(z)}{\Delta t} \theta_i^{(1)} + V_n(z)(w - w_g) \frac{\partial \theta_i^{(1)}}{\partial z} + V_n(z)(\sigma + \eta) \theta_i^{(1)} = \alpha_i^2 \theta_i^{(1)} + V(z_2) \mu \frac{\partial^2 \theta_i^{(1)}}{\partial y^2} + \\ & + V_n(z) \frac{\partial}{\partial z} \left(\varkappa_t(z, t) \frac{\partial \theta_i^{(1)}}{\partial z} \right) + V_n(z) \sum_{i=0}^{N_o} \delta_i(x - x_i, y, z) q^{(1)}_i(x_i, y, z) - \\ & - (F_i^{(1)} + \frac{V_n(z)}{\Delta t} \overline{\theta_i^{(1)}}), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\alpha_i^2 = -\frac{\lambda_{1,i} V(z) \varkappa_d}{h_x^2}.$$

В уравнении (11) дифференциальные операторы по y также заменяя на конечно-разностную получим:

$$\begin{aligned} & \frac{V_n(z)}{\Delta t} \theta_i^{(1)} + V_n(z)(w - w_g) \frac{\partial \theta_i^{(1)}}{\partial z} + \\ & + V_n(z)(\sigma + \eta) \theta_i^{(1)} = \alpha_i^2 \theta_i^{(1)} + V(z_2) \mu \frac{\partial^2 \theta_i^{(1)}}{\partial y^2} + \\ & + V_n(z) \frac{\partial}{\partial z} \left(\varkappa_t(z, t) \frac{\partial \theta_i^{(1)}}{\partial z} \right) + \\ & + V_n(z) \sum_{i=0}^{N_o} \delta_i(x - x_i, y, z) q^{(1)}_i(x_i, y, z) - (F_i^{(1)} + \frac{V_n(z)}{\Delta t} \overline{\theta_i^{(1)}}), \end{aligned} \quad (11)$$

где M_2 является трехдиагональной матрицей с диагональным преобладанием:

$$M_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

и ее можно представить в виде $M_2 = B_2 \lambda_2 B_2^*$; $B_2^{-1} = B_2^*$ [3].

Аналогично, из свойства матрицы M_2 известно, что она является матрицей простой структуры и ее можно представить в виде $M_2 = B_2 \lambda_2 B_2^*$, $\lambda_2 = B_2^* M_2 B_2$; $B_2^{-1} = B_2^*$, $\lambda_{2,k}$ – диагональная матрица, элементы которой являются собственными значениями матрицы M_2

$$\lambda_{2,k} = \begin{pmatrix} \lambda_{2,1} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{2,2} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{2,3} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \lambda_{2,N_2} \end{pmatrix},$$

$\lambda_{2,k}$ и элементы матрицы B_2 вычисляются формулами

$$\lambda_{2,k} = -2 \left(1 - \cos \frac{k\pi}{N_2 + 1} \right); \quad b_{2,i,k} = (-1)^{i+k} \sqrt{\frac{2}{N_1 + 1}} \sin \frac{ik\pi}{N_1 + 1}; \quad (i, k = \overline{1 \dots N_2}).$$

Умножая уравнение (12) слева на матрицу B_2^* и обозначая, $B_2^* \theta_{i,k}^{(1)} = \theta_{i,k}^{(2)}$; получим:

$$\begin{aligned} & \frac{V_n(z)}{\Delta t} \theta_i^{(1)} + V_n(z)(w - w_g) \frac{\partial \theta_i^{(1)}}{\partial z} + \\ & + V_n(z)(\sigma + \eta) \theta_i^{(1)} = \alpha_i^2 \theta_i^{(1)} + V(z_2) \mu \frac{\partial^2 \theta_i^{(1)}}{\partial y^2} + \\ & + V_n(z) \frac{\partial}{\partial z} \left(\varkappa_t(z, t) \frac{\partial \theta_i^{(1)}}{\partial z} \right) + \\ & + V_n(z) \sum_{i=0}^{N_o} \delta_i(x - x_i, y, z) q_i^{(1)}(x_i, y, z) - (F_i^{(1)} + \frac{V_n(z)}{\Delta t} \overline{\theta_i^{(1)}}), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_k^2 &= \frac{\lambda_{2,k} V(z_2) \mu}{h_y^2}; \quad \lambda_{2,k} = -2 \left(1 - \cos \frac{k\pi}{N_2 + 1} \right); \\ b_{2,i,k} &= (-1)^{i+k} \sqrt{\frac{2}{N_2 + 1}} \sin \frac{ik\pi}{N_2 + 1}; \quad (i, k = \overline{1 \dots N_2}). \end{aligned}$$

После некоторых преобразований и с учетом краевых условий получим:

$$\begin{aligned} & V_n(z) \frac{\partial}{\partial z} \left(\varkappa_t(z, t) \frac{\partial \theta_{i,k}^{(2)}}{\partial z} \right) + V_n(z)(w - w_g) \frac{\partial \theta_{i,k}^{(2)}}{\partial z} + \\ & + (V_n(z)(\sigma + \eta) + V_n(z) \frac{1}{\Delta t}) \theta_{i,k}^{(2)} = (\alpha_i^2 + \beta_k^2) \theta_{i,k}^{(2)} + \\ & + V_n(z) \sum_{i=0,j}^{N_o} \delta_i(x - x_i, y - y_j, z) q_{i,k}^{(2)}(x - x_i, y - y_j, z) - (F_{i,k}^{(2)} + \frac{V_n(z)}{\Delta t} \overline{\theta_{i,k}^{(2)}}); \end{aligned} \quad (13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varkappa_t \frac{\partial \theta_{i,k}^{(2)}(x_i, y_k, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = \beta(x_i, y_k, z) \theta_{i,k}^{(2)}(x_i, y_k, z, t); \\ w \frac{\partial \theta_{i,k}^{(2)}(x_i, y_k, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=H} = \chi \left(\theta_{i,k}^{(2)}(x_i, y_k, z, t) - \theta_{a,i,k}^{(2)}(x_i, y_k, z, t) \right). \end{array} \right. \quad (14)$$

Здесь $F_{i,k}^{(2)}$ вычисляется с помощью формулы

$$F_{i,k}^{(2)} = V(z_2) \cos \alpha(z) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\theta_{i-1,k}^{(2)} - \theta_{i,k}^{(2)}}{h_x}, \cos \alpha(z) \geq 0 \\ \frac{\theta_{i+1,k}^{(2)} - \theta_{i,k}^{(2)}}{h_x}, \cos \alpha(z) < 0 \end{array} \right. + V(z_2) \sin \alpha(z) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\theta_{i,k-1}^{(2)} - \theta_{i,k}^{(2)}}{h_y}, \sin \alpha(z) \geq 0; \\ \frac{\theta_{i,k+1}^{(2)} - \theta_{i,k}^{(2)}}{h_y}, \sin \alpha(z) < 0. \end{array} \right.$$

Итак, получено обыкновенное дифференциальное уравнение с соответствующими краевыми условиями, описывающее процесс распространения аэрозольных частиц по вертикальному направлению, относительно переменной z .

Для решения полученной задачи введем сетку по z ($w_z = (z_j = z_{j-1} + h_z,)$ ($j = 2, 3, 4, \dots, h_{z_j} = h_{z_1}, h_{z_2}, \dots$) и заменив дифференциальный оператор разностным

$$\left(\frac{\partial \theta_{i,k}^{(2)}}{\partial z} \right)_j = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\theta_{i,k,j-1}^{(2)} - \theta_{i,k,j}^{(2)}}{h_{z,j}}, (w - w_g) \geq 0; \\ \frac{\theta_{i,k,j}^{(2)} - \theta_{i,k,j+1}^{(2)}}{h_{z,j+1}}, (w - w_g) < 0; \end{array} \right. ,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\varkappa_t(z, t) \frac{\partial \theta_{i,k}^{(2)}}{\partial z} \right) = \frac{\varkappa_t(z_{j-0,5}, t)}{\frac{h_{z,j+1} + h_{z,j}}{2}} \theta_{i,k,j-1}^{(2)} -$$

$$- \left(\frac{\varkappa_t(z_{j-0,5}, t)}{h_{z,j}} + \frac{\varkappa_t(z_{j+0,5}, t)}{h_{z,j+1}} \right) \frac{\theta_{i,k,j}^{(2)}}{\frac{h_{z,j} + h_{z,j+1}}{2}} + \frac{\varkappa_t(z_{j+0,5}, t) \theta_{i,k,j+1}^{(2)}}{\frac{h_{z,j} + h_{z,j+1}}{2} h_{z,j+1}},$$

получим:

$$\bar{a}_j \theta_{i,k,j-1}^{(2)} - \bar{b}_j \theta_{i,k,j}^{(2)} + \bar{c}_j \theta_{i,k,j+1}^{(2)} + \left\{ \begin{array}{l} \frac{d_1}{h_{z,j}} \theta_{i,k,j-1}^{(2)} - d_1 \theta_{i,k,j}^{(2)} \\ \frac{d_2}{h_{z,j}} \theta_{i,k,j+1}^{(2)} - d_2 \theta_{i,k,j}^{(2)} \end{array} \right| \begin{array}{l} (w - w_g) \geq 0 \\ (w - w_g) < 0 \end{array} +$$

$$+ \left(\frac{V_n(z_j)}{\Delta t} + V_n(z_j) G - V_n(z_j) \varkappa_d \alpha_i^2 - V_n(z_j) \varkappa_d \beta_k^2 \right) \theta_{i,k,j}^{(2)} =$$

$$= V_n(z_j) f^{(2)}(x_i, y_k, z_j, t_n) - \left(F_{i,k,j}^{(2)} + \frac{V_n(z)}{\Delta t} \right) \bar{\theta}_{i,k,j}^{(2)}$$

или

$$(\bar{d}_1 + \bar{a}_j) \theta_{i,k,j-1}^{(2)} - (\bar{d}_1 + \bar{b}_j + \bar{c}_j) \theta_{i,k,j}^{(2)} + \bar{c}_j \theta_{i,k,j+1}^{(2)} = V_n(z_j) f^{(2)}(x_i, y_k, z_j, t_n) -$$

$$- \left(F_{i,k,j}^{(2)} + \frac{V_n(z)}{\Delta t} \right) \bar{\theta}_{i,k,j}^{(2)} \quad \text{при } (w - w_g) \geq 0,$$

$$\bar{a}_j \theta_{i,k,j-1}^{(2)} - (\bar{d}_2 + \bar{b}_j + \bar{c}_j) \theta_{i,k,j}^{(2)} + (\bar{d}_2 + \bar{c}_j) \theta_{i,k,j+1}^{(2)} =$$

$$= V_n(z_j) f^{(2)}(x_i, y_k, z_j, t_n) - \left(F_{i,k,j}^{(2)} + \frac{V_n(z)}{\Delta t} \right) \bar{\theta}_{i,k,j}^{(2)} \quad \text{при } (w - w_g) < 0,$$

где

$$\bar{a}_j = \frac{2 \varkappa_t(z_{j+0,5})}{h_{z,j} (h_{z,j+1} + h_{z,j})}; \quad \bar{b}_j = 2 \left(\frac{\varkappa_t(z_{j-0,5})}{h_{z,j}} + \frac{\varkappa_t(z_{j+0,5})}{h_{z,j+1}} \right) (h_{z,j} + h_{z,j+1});$$

$$\bar{c}_j = \frac{2 \varkappa_t(z_{j+0,5})}{(h_{z,j} + h_{z,j+1}) h_{z,j+1}}; \quad \bar{e}_j = \left(\frac{V_n(z)}{\Delta t} + V_n(z) G - V_n(z) \varkappa_d \alpha_i^2 - V_n(z) \varkappa_d \beta_k^2 \right).$$

Векторная форма поставленной задачи имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \vec{A}_j \theta_{i,k,j-1}^{(2)} - \vec{B}_j \theta_{i,k,j}^{(2)} + \vec{C}_j \theta_{i,k,j+1}^{(2)} &= \vec{\Phi}_j; \\ \vec{A}_j &= \bar{a}_j; \vec{B}_j = (\bar{b}_j + \bar{d}_2 - \bar{e}_j); \vec{C}_j = (\bar{d}_2 + \bar{c}_j); \text{ при } (w - w_g) < 0; \\ \vec{A}_j &= (\bar{d}_1 + \bar{a}_j); \vec{B}_j = (\bar{b}_j + \bar{d}_1); \vec{C}_j = \bar{c}_j; \text{ при } (w - w_g) \geq 0; \\ \vec{\Phi}_j &= V_n(z_j) f^{(2)}(x_i, y_k, z_j, t_n) - \left(F_{i,k,j}^{(2)} + \frac{V_n(z)}{\Delta t} \right). \end{aligned}$$

Для аппроксимации краевых условия при $j = 0$ настилающую поверхность земли интегрируем уравнение (15) от нуля до $h_z, 1/2$

$$\begin{aligned} \int_0^{h_z, 1/2} [V_n(z) \frac{\partial}{\partial z} (\varkappa_t(z) \frac{\partial \theta_{i,k}^{(2)}}{\partial z}) - V_n(z)(w - w_g) \frac{\partial \theta_{i,k}^{(2)}}{\partial z} - (V_n(z) \frac{1}{\Delta t} + V_n(z)(\sigma + \eta) \theta_{i,k}^{(2)} - \\ - (\alpha_i^2 \theta_{i,k}^{(2)} + \beta_k^2 \theta_{i,k}^{(2)})] dz = \int_0^{h_z, 1/2} [[\bar{F}_{i,k}^{(2)}] dz, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\bar{F}_{i,k}^{(2)} = V_n(z) f_{0,k}^{(2)}(x_i, y_k, t) - (F_{i,k}^{(2)} + \frac{V_n(z)}{\Delta t} \bar{\theta}_{i,k}^{(2)}).$$

С учетом краевых условий уравнение (15) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \int_0^{h_z/2} [V_n(z) \frac{\partial}{\partial z} (\varkappa_t(z) \frac{\partial \theta_{i,k}^{(2)}}{\partial z}) dz &= (V_n(z_{1/2}) [\varkappa_t(z_{1/2}) \frac{\partial \theta_{i,k}^{(2)}}{\partial z}]_{1/2} - \varkappa_t(z_{1/2}) \frac{\partial \theta_{i,k}^{(2)}}{\partial z}]_0 = \\ &= (V_n(z) [\varkappa_t(z_{1/2}) \frac{\theta_{2,k}^{(2)} - \theta_{1,k}^{(2)}}{\Delta z_1} - (\beta_k - w_g) \theta_{1,k}^{(2)} + V_n(z_{1/2}) f_{0,k}^{(2)}]); \\ \int_0^{h/2} [V_n(z)(w - w_g) \frac{\partial \varphi_{i,k}^{(2)}}{\partial z}] dz &= (V_n(z_{1/4})(w - w_g)_{1/4} (\varphi_{i,k,1/2}^{(2)} - \varphi_{i,k,0}^{(2)}) = \\ &= V_n(z)(w - w_g)_{1/4} (\frac{\theta_{i,k,1}^{(2)} - \theta_{i,k,0}^{(2)}}{2} - \theta_{i,k,0}^{(2)}) = V_n(z)(w - w_g)_{1/4} \frac{1}{2} (\theta_{i,k,0}^{(2)} - \theta_{i,k,1}^{(2)}); \\ \int_0^{h/2} [V_n(z)(w - w_g) \frac{\partial \theta_{i,k}^{(2)}}{\partial z}] dz &= (V_n(z_{1/4})(w - w_g)_{1/4} (\theta_{i,k,1/2}^{(2)} - \theta_{i,k,0}^{(2)}) = \\ &= V_n(z)(w - w_g)_{1/4} (\frac{\theta_{i,k,1}^{(2)} - \theta_{i,k,0}^{(2)}}{2} - \theta_{i,k,0}^{(2)}) = V_n(z)(w - w_g)_{1/4} \frac{1}{2} (\theta_{i,k,0}^{(2)} - \theta_{i,k,1}^{(2)}); \\ \int_0^{h/2} \bar{F}_{i,k}^{(2)} dz &= \bar{F}_0^{(2)} \frac{\Delta z_1}{2}. \end{aligned}$$

Итак при $i = 0$ имеем разностное уравнение вида:

$$\begin{aligned} & -[V_n(z_{1/4})(w - w_g)/\Delta z_1 + \frac{2}{\Delta z_1^2} \varkappa_t(z_{1/2})V_n(z_{1/4}) + \frac{2(\beta - w_g)}{\Delta z_1} + V_n(z_{1/4})\frac{1}{\Delta t}] \theta_{i,k,0}^{(2)} - \\ & -(\alpha_i^2 \theta_{i,k}^{(2)} + \beta_k^2 \theta_{i,k}^{(2)}) + [-(V_n(z_{1/4})(w - w_g)_{1/4}/\Delta z_1 + \frac{2}{\Delta z_1^2} \varkappa_t(z_{1/2})V_n(z_{1/4}))] \theta_{i,k,2}^{(2)} = \\ & = -(V_n(z_{1/4})f_{i,k,0}^{(2)} - \bar{F}_{i,k,0}^{(2)}); \end{aligned}$$

$$\bar{F}_{i,k,0}^{(2)} = V_n(z_{1/4})\frac{1}{\Delta t} \theta_{i,k,0}^{(2)} - \bar{F}_{i,k,1/4}^{(2)}$$

или

$$\begin{aligned} & -[\frac{2}{\Delta z_1^2} \varkappa_t(z_{1/2})V_n(z_{1/4}) - (w - w_g)_{1/4}/\Delta z_1 + V_n(z_{1/4}) + \\ & + \frac{2}{\Delta z_1^2}(\beta - w_g) + \frac{1}{\Delta t}V_n(z_{1/4}) + V_n(z_{1/4})](\sigma + \eta) + \\ & -(\alpha_i^2 + \beta_k^2)] \theta_{i,k,0}^{(2)} + [(V_n(z_{1/4})\frac{2}{\Delta z_1^2} - (w - w_g)_{1/4}/\Delta z_1 V_n(z_{1/4}))] \theta_{i,k,2}^{(2)} = \\ & = -(V_n(z_{1/4})f_{i,k,0}^{(2)} - \bar{F}_{i,k,0}^{(2)}). \end{aligned}$$

Так же интегрируя уравнение (15) от $(N + 1/2) \Delta z_N$ до $(N + 1)\Delta z_N$ получим

$$\begin{aligned} & \int_{H-1/2\Delta z_N}^N [V_n(z) \frac{\partial}{\partial z} (\varkappa_t(z) \frac{\partial \theta_{i,k}^{(2)}}{\partial z})] dz = \\ & = (V_n(z_{H-1/4\Delta z}) [\varkappa_t(z_H) \frac{\partial \theta_{i,k,N}^{(2)}}{\partial z} - \varkappa_t(z_{H-1/4\Delta z_N}) \frac{\partial \theta_{i,k,H-1/2\Delta z_N}^{(2)}}{\partial z}]) = \\ & = [\varkappa_t(z_{1/2}) \frac{\theta_{i,k,N+1}^{(2)} - \theta_{i,k,N}^{(2)}}{\Delta z_N}] V_n(z_{H-1/4\Delta z_N}) = \\ & = (V_n(z_{H-1/4\Delta z_N}) \frac{\varkappa_t(z_{H-1/2\Delta z_N})}{\Delta z_N} \theta_{i,k,N}^{(2)} + V_n(z_{H-1/2\Delta z_N}) \frac{\varkappa_t(z_{H-1/4\Delta z_N})}{\Delta z_N} \theta_{i,k,N+1}^{(2)}); \\ & \int_{z_{H-1/2\Delta z_N}}^H z A(w - w_g) \frac{\partial \theta}{\partial z} dz = (z A(w - w_g))_{z_{H-1/4\Delta z_N}} * (\theta_{i,k,N-1}^{(2)} - \theta_{i,k,N+1/2}^{(2)}) = \\ & = \theta_{i,k,N+1}^{(2)} - \theta_{i,k,N+1/2}^{(2)} = \theta_{i,k,N+1}^{(2)} - \frac{\theta_{i,k,N+1}^{(2)} - \theta_{i,k,N}^{(2)}}{2} = \frac{\theta_{i,k,N+1}^{(2)} - \theta_{i,k,N}^{(2)}}{2} = \\ & = \frac{\theta_{i,k,N+1}^{(2)} - \theta_{i,k,N}^{(2)}}{\Delta z_N} \cdot \frac{\Delta z_N}{2} \approx (\frac{\partial \theta_{j,k}}{\partial z}) \cdot \frac{\Delta z_N}{2}. \end{aligned}$$

Итак, при $z = H$ имеем

$$\begin{aligned} & -[\frac{2}{h^2} z A(z_{H-1/2\Delta z_N}) \varkappa_t(z_{H-1/2\Delta z_N}) + (\frac{1}{\Delta t} + (\sigma + \eta)t A(z_{H-1/2\Delta z_N}))] \cdot \\ & \cdot \theta_{i,k,H+1}^{(2)} - (\rho_k^2 + \gamma_j^2) \theta_{i,k,H+1}^{(2)} + \frac{2}{h^2} z A(z_{H-1/2\Delta z_N}) \varkappa_t(z_{H-1/2\Delta z_N}) \theta_{i,k,H+1}^{(2)} = -\bar{F}_{i,k,N+1}^{(2)}. \end{aligned}$$

Для $z = z_j$, $j = 1, 2, \dots, N$ имеем

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\varkappa_t(z_j - 1/2)}{\frac{\Delta z_{j-1} + \Delta z_j}{2} \cdot \Delta z_{j-1}} + \frac{|\psi| + |\psi|}{2\Delta z_{j-1}} \right] \cdot zA(z_j) \cdot \theta_{i,k,j}^{(2)} - \\ & - \left[\frac{\varkappa_t(\Delta z_{j-1/2})}{\frac{\Delta z_{j-1} + \Delta z_j}{2} \cdot \Delta z_{j-1}} + \frac{\varkappa_t(\Delta z_{j+1/2})}{\frac{\Delta z_{j-1} + \Delta z_{j+1}}{2} \cdot \Delta z_j} + \frac{|\psi|}{\Delta z_j} + \frac{1}{\Delta t} + (\sigma + \eta) \right] zA(z_i) \cdot \theta_{i,k,j-1}^{(2)} + \\ & + \left[\frac{\varkappa_t(z_i - 1/2)}{\frac{\Delta z_{j-1} + \Delta z_j}{2} \cdot \Delta z_1} + \frac{|\psi| - \psi}{2\Delta z_i} \right] zA(z_j) \cdot \theta_{i,k,j+1}^{(2)} - (\alpha_i^2 + \beta_k^2) \theta_{i,k,j}^{(2)} = -\bar{F}_{i,k,j}^{(2)}; \end{aligned} \quad (16)$$

где $\psi = (w - w_g)$.

Для определения $\theta_{i,k,j}^{(2)}$ получим систему

$$\begin{cases} -B_{i,k,1} \theta_{i,k,1}^{(2)} + C_1 \theta_{i,k,2}^{(2)} = -\bar{F}_{i,k,1}^{(2)}; \\ A_2 \theta_{i,k,1}^{(2)} + B_{i,k,2} \theta_{i,k,2}^{(2)} + C_2 \theta_{i,k,3}^{(2)} = -\bar{F}_{i,k,2}^{(2)}; \\ \dots \\ \dots \\ A_{N_1} \theta_{i,k,N_1-1}^{(2)} - B_{i,k,N_1} \theta_{i,k,N_1-1}^{(2)} + C_{N_1} \theta_{N_i,k,1+1}^{(2)} = -\bar{F}_{i,k,N_1}^{(2)}; \\ A_{N_1+1} \theta_{i,k,N_1}^{(2)} - B_{i,k,N_1+1} \theta_{i,k,N_1+1}^{(2)} = -\bar{F}_{i,k,N_1+1}^{(2)}. \end{cases} \quad (17)$$

Здесь:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{2\varkappa_t(z_{1/2})}{\Delta z_1^2} zA(z_{1/4}) - \frac{(w - w_g)}{\Delta z_1} zA(z_{1/4}), \\ B_{i,k,1} &= C_1 + \frac{2(\beta - w_g)}{\Delta z_1} V_n(z_{1/4}) + (\sigma + \eta) + \frac{1}{B\Delta t} V_n(z_{1/4}) + \alpha_i^2 + \beta_k^2, \\ \tilde{F}_{1,j,k}^{(2)} &= -(\bar{f}_{i,k,0}^{(2)} + \bar{F}_{i,k,0}^{(2)}) V_n(z_{1/4}), \\ A_i &= \left(\frac{\varkappa_t(z_{i-1/2})}{\frac{\Delta z_{i-1} + \Delta z_i}{2} \Delta z_{i-1}} + \frac{|\psi| + \psi}{2 \cdot \Delta z_{i-1}} \right) \cdot V_n(z_i), \\ C_i &= \left(\frac{\varkappa_t(z_{i+1/2})}{\frac{\Delta z_{i-1} + \Delta z_i}{2} \Delta z_{i-1}} + \frac{|\psi| - \psi}{2 \cdot \Delta z_i} \right) \cdot V_n(z_i), \\ B_{i,k,j} &= A_i + C_i + \left(\frac{1}{\Delta t} + (\sigma + \eta) \right) V_n(z_i) + \alpha_i^2 + \beta_k^2, \\ A_{N_1+1} &= \frac{2\varkappa_t(z_{N_1+1/2})}{\Delta z_{N_1}^2} V_n(z_{N_1+1/2}), \\ B_{N_1+1,j,k} &= A_{N_1+1} + \left(\frac{1}{\Delta t} + (\sigma + \eta) \right) V_n(z_{N_1+1/2}) + \alpha_i^2 + \beta_k^2, i = 1, 2, \dots, N_1. \end{aligned}$$

Решая систему (17), находим $\theta_{i,k,j}^{(2)}$ при $i = 0, 1, 2, \dots, N_1 + 1$, $k = 0, 1, 2, \dots, N_2$, $j = 1, 2, \dots, N_3$ с помощью (13), (11) от функции $\theta_{i,j,k}^{(2)}$ переходим к функции $\theta^{(1)}_{i,j,k}$ с помощью (11) от функцию $\theta^{(1)}_{i,j,k}$ переходим к численному решению задачи (8) в области в момент времени $t = t_{n+1}$.

4 Заключение

На основе законов гидромеханики (сохранения массы, количества движения и импульса) разработаны математическая модель, где учитываются поглощения и захват аэрозольных частиц элементами растительности, взаимодействие с поверхностью земли, изменение коэффициента турбулентности по высоте и направлению ветра со временем и консервативный численный алгоритм основанный на методе прямых и конечно-разностной полунейной схеме, где будет обеспечен высокий порядок точности по времени и пространственным переменным.

Предложенный математический инструмент служит для исследования, прогнозирования и принятия управленческого решения по оптимальному размещению промышленных объектов в регионах в последствии чего можно смягчить отрицательное влияние на состояние приземного слоя атмосферы и окружающую среду.

Литература

- [1] Колесников Е.Ю. Исследование процессов распространения атмосферных примесей в условиях леса : дисс. канд. ф.-м.н. : ВАК РФ04.00.23. – 1998. – URL: <https://shorturl.at/mryVI>.
- [2] Бояришинов М.Г. Математическое моделирование переноса и рассеяния газообразных примесей в растительных массивах : дисс. ... д.т.н. : 05.13.18. – Пермь, 2000. – 334 с. – URL: <https://shorturl.at/gMU59>.
- [3] Воронов Г.И., Кригель А.М. Диффузия монодисперсного аэрозоля в растительных покровах // Прикладные вопросы физики атмосферы : сб. науч. трудов. – Ленинград, 1989. – С. 51-57. – URL: <https://shorturl.at/mqKT5>.
- [4] Ravshanov N. et al. Development of a mathematical model of aerosol particles' distribution process in the surface layer of the atmosphere taking into account the earth's heterogeneous surface // AIP Conf. Proc. – 2024. – Vol. 3004. – doi: <http://dx.doi.org/10.1063/5.0200769>.
- [5] Amorim J.H. et al. CFD modelling of the aerodynamic effect of trees on urban air pollution dispersion // Sci. Total Environ. – 2013. – Vol. 461. – P. 541-551.
- [6] Левашова Н., Мухартова Ю., Ольчев А. Два подхода к описанию турбулентного переноса в приземном слое атмосферы // Математическое моделирование. – 2017. – Т. 29, №5. – С. 46-60.
- [7] Равшанов Н., Назаров Ш.Э., Боборахимов Б. Моделирование процесса переноса и диффузии аэрозольных частиц в атмосфере с учетом захвата частиц элементами растительности // Экологические чтения – 2022 : материалы XIII нац. науч.-практ. конф. – Омск, 2022. – С. 282-288.
- [8] Равшанов Н., Назаров Ш.Э. Разработка математической модели процесса распространения аэрозольных частиц в приземном слое атмосферы // Проблемы применения современных информационных, коммуникационных технологий и IT-образования: сб. док. респ. науч.-практ. конф. – Самарканд, 2022. – С. 94-96.
- [9] Равшанов Н. и др. Системная методология математического моделирования процесса массопереноса в атмосфере. – Ташкент: Навруз, 2021. – 280 с.
- [10] Shafiev T., Nazarov Sh. Studies of the influence of vegetation cover on the process of transfer and diffusion of harmful substances in the atmosphere // E3S Web of Conferences. – 2023. – Vol. 431. – doi: <http://dx.doi.org/10.1051/e3sconf/202343101059>.
- [11] Almeida D. et al. Optimizing the Remote Detection of Tropical Rainforest Structure with Airborne Lidar: Leaf Area Profile Sensitivity to Pulse Density and Spatial Sampling // Remote Sens. – 2019. – Vol. 11. – P. 92. – doi: <http://dx.doi.org/10.3390/rs11010092>.

- [12] *Beland M. et al.* On seeing the wood from the leaves and the role of voxel size in determining leaf area distribution of forests with terrestrial LiDAR // *Agric. For. Meteorol.* – 2014. – Vol. 184. – P. 82-97.
- [13] *Mihailovic D., Lalic B., Mihailovic D.* An empirical relation describing leaf area density inside the forest for environmental modelling // *Journal of Applied Meteorology.* – 2004. – Vol. 43, Issue 4. – P. 641-645.
- [14] *Мурадов Ф.А., Ахмедов Д.Д.* Моделирование процесса распространения аэрозолей в приземном слое атмосферы с учетом скорости осаждения частиц // *Экологические чтения – 2019 : материалы X Нац. науч.-практ. конф. с междунар. участием.* – Омск, 2019. – С. 271-276.
- [15] *Abutaliev F.B., Karimberdieva S., Sharipov D.K.* Mathematical model for optimal siting of the industrial plants // *Proceeding of World Conference on Intelligent Systems for Industrial Automation : Tashkent (June 4–5, 2002).* – Kaufering: b-Quadrat Verlag, 2002. – P. 201-206.
- [16] *Фаддеева В.Н.* Метод прямых в применении к некоторым краевым задачам // *Труды Математического института АН СССР им. В.А. Стеклова.* – 1949. – Т. 28. – С. 73-103.
- [17] *Равшанов Э., Тоштемирова Н., Мухаммадиев А.* Усовершенствованная математическая модель процесса распространения мелкодисперсных частиц в атмосфере // *Theoretical & Applied Science.* – 2018. – №09(65). – С. 63-68.
- [18] *Ravshanov N., Shertaev M., Toshtemirova N.* Mathematical Model for the Study and Forecast of the Concentration of Harmful Substances in the Atmosphere // *American Journal of Modeling and Optimization.* – 2015. – Vol. 3, № 2. – P. 35-39.
- [19] *Шарипов Д., Тоштемирова Н.* Компьютерное моделирование процесса переноса и диффузий аэрозольных выбросов в атмосфере // *Информатика: проблемы, методология, технологии: тез. докл.* – Воронеж, 2013. – С. 427-432.

Поступила в редакцию 19.04.2024

UDC 519.6:622.276+622.279

MODELING OF AEROSOL PARTICLES DISPERSION IN THE ATMOSPHERIC BOUNDARY LAYER, CONSIDERING THE FACTORS OF ABSORPTION AND CAPTURING BY VEGETATIVE COVER

^{1*}*Ravshanov N.*, ^{1,2}*Tashtemirova N.*, ³*Karshiev D.A.*

*ravshanzade-09@mail.ru

¹Research Institute for the Development of Digital Technologies and artificial intelligence, 17A, Buz-2, Tashkent, 100124 Uzbekistan;

²Tashkent University of Information Technologies, 108, Amir Temur ave., Tashkent, 100200 Uzbekistan;

³Tashkent Pediatric Medical Institute, 223, Bogishamol str., Tashkent, 100140 Uzbekistan.

A mathematical model has been developed for studying and predicting the process of transport and diffusion of harmful substances in the surface layer of the atmosphere. The model is based on the fundamental laws of fluid mechanics (conservation of mass, momentum, and energy) and utilizes a conservative numerical algorithm. In addition to meteorological factors, the model takes into account the phenomenon of aerosol particle

absorption and capture by vegetative elements, interactions with the Earth's surface, variation of turbulence coefficient with altitude, and temporal changes in wind direction. In the study, the sources of pollutants are point sources, the intensities of which vary over time. The solution algorithm is based on the method of lines and a finite-difference semi-implicit scheme, ensuring high accuracy in both time and spatial variables. Both upwind and downwind differencing schemes are employed depending on the flow value.

Keywords: mathematical model, aerosol particles, method of lines, finite-difference scheme, transport and diffusion of harmful substances.

Citation: Ravshanov N., Tashtemirova N., Karshiev D.A. 2024. Modeling of aerosol particles dispersion in the atmospheric boundary layer, considering the factors of absorption and capturing by vegetative cover. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 2(56): 41-57.

HISOBLASH VA AMALIY
МАТЕМАТИКА
MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
PROBLEMS OF COMPUTATIONAL
AND APPLIED MATHEMATICS



ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 2(56) 2024

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Азамов А.А., Арипов М.М., Шадиметов Х.М.

Ответственный секретарь:

Ахмедов Д.Д.

Редакционный совет:

Азамова Н.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Бурнашев В.Ф.,
Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия), Игнатъев Н.А.,
Ильин В.П. (Россия), Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия),
Карачик В.В. (Россия), Курбонов Н.М., Маматов Н.С., Мирзаев Н.М.,
Мирзаева Г.Р., Мухамадиев А.Ш., Назирова Э.Ш., Нормуродов Ч.Б.,
Нуралиев Ф.М., Опанасенко В.Н. (Украина), Расулмухамедов М.М., Расулов А.С.,
Садуллаева Ш.А., Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А.,
Хамдамов Р.Х., Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Чье Ен Ун (Россия),
Шабозов М.Ш. (Таджикистан), Dimov I. (Болгария), Li Y. (США),
Mascagni M. (США), Min A. (Германия), Schaumburg H. (Германия),
Singh D. (Южная Корея), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(99871) 263-41-98.

E-mail: journals@airi.uz.

Сайт: www.pvpm.uz.

Дизайн и компьютерная вёрстка:

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 30.04.2024 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №2. Тираж 100 экз.

Содержание

<i>Алимов Х.Т., Паровик Р.И.</i>	
Некоторые аспекты численного анализа дробной математической модели Макшерри для описания искусственной ЭКГ	7
<i>Халджигитов А.А., Адамбаев У.Э., Джумаёзов У.З., Хасанова З.З.</i>	
Новые модельные уравнения в деформациях для анизотропных тел	17
<i>Нуралиев Ф.М., Султанов Б.Ж., Дауытова Ж.К.</i>	
Математическое моделирование процессов деформированного состояния сетчатых пластин со сложной формой	30
<i>Равшанов Н., Таштемирова Н., Каршиев Д.А.</i>	
Моделирование процесса распространения аэрозольных частиц в пограничном слое атмосферы с учетом их поглощения и захвата растительным покровом	41
<i>Назирова Э.Ш., Неъматов А., Исмаилов Ш., Артикбаева Г.</i>	
Математическое моделирование фильтрации газа с учетом изменения пористости породы в зависимости от давления	58
<i>Равшанов Н., Холматова И.И., Курбонов Н.М., Исламов Ю.Н.</i>	
Математическое моделирование процесса подземного выщелачивания с учетом изменения гидродинамических параметров пористой среды	72
<i>Адылова Ф.Т., Давронов Р.Р.</i>	
Генеративный искусственный интеллект для разработки лекарств de novo: новые рубежи в области молекул	85
<i>Мадатов Х.А.</i>	
Математическая модель автоматического определения несущественных слов текстов на узбекском языке	99
<i>Сулуюкова Л.Ф., Ёркулов Б.А.</i>	
Методика оценки имеющегося уровня информационной безопасности образовательной информационной системы	106