

УДК 519.624.3

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ АМПЛИТУДЫ ФУНКЦИИ ТОКА ДЛЯ ПЛОСКОГО ТЕЧЕНИЯ ПУАЗЕЙЛЯ

*Нормуродов Ч.Б., *Тиловов М.А., Нормуродов Д.Ч.*

*mtilovov21@gmail.com

Термезский государственный университет,
190111 Узбекистан, Термиз, ул. Баркамол авлод, дом 43.

В данной статье спектральным методом исследуется динамика комплексной амплитуды функции тока для плоского течения Пуазейля. Приближенное решение рассматриваемого течения ищется в виде конечного ряда по полиномам Чебышева первого рода с неизвестными коэффициентами разложения. Определяется спектр собственных значений для течения Пуазейля и выбирается самое неустойчивое собственное значение (максимальное по модулю), а также определяются компоненты собственного вектора, соответствующими выбранному собственному значению, которые являются комплексными неизвестными коэффициентами разложения искомого ряда. Затем используя значения этих коэффициентов вычисляются действительная и мнимая часть амплитуды функции тока для возмущающего течения. Результаты расчётов иллюстрируются как в табличном, так и в графическом виде и показывают высокую точность предлагаемого подхода.

Ключевые слова: течение Пуазейля, амплитуда функции тока, спектральный метод, полиномы Чебышева, высокая точность.

Цитирование: *Нормуродов Ч.Б., Тиловов М.А., Нормуродов Д.Ч.* Численное моделирование динамики амплитуды функции тока для плоского течения Пуазейля // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2025. – № 3(67). – С. 53-66.

DOI: https://doi.org/10.71310/psam.3_67.2025.05.

1 Введение

Построение и исследование высокоточных и эффективных численных методов для моделирования амплитуды функции тока плоского течения Пуазейля и других плоскопараллельных течений являются актуальной проблемой в области вычислительной и прикладной математики. Для плоского течения Пуазейля собственные функции являются либо симметричными, либо антисимметричными относительно точки $y=0$. В таблице 1 [1], а также в статье [2], приведено наиболее неустойчивое собственное значение (соответствующее симметричной собственной функции), рассчитанное при $k=1$ и $Re=10000$. Эти результаты показывают, что тау метод требует решения алгебраической системы размером 29×29 , в то время как решение системы размером всего 25×25 позволяет достичь приближенного «точного значения» $0.23752649 + 0.00373967i$, приведенного в [2]. Хотя это может показаться незначительным улучшением, оно имеет важное значение при решении уравнений гидродинамической устойчивости. В отличие от других методов расчета собственных значений уравнения Орра-Зоммерфельда, в статье [3] также подчёркивается нахождение двух ложных (spurious eigensolutions) собственных решений для течения Пуазейля: одно из них - симметричное, а другое - антисимметричное относительно точки $y = 0$.

В статье [4] предложен и исследован метод спектральной коллокации Чебышева для решения смешанных функциональных дифференциальных уравнений. Влияние

конвективных граничных условий на течение в пограничном слое над линейно растягивающейся плоской поверхностью исследовано в статье [5]. В исследовании [6] спектральный метод Чебышева применен для анализа виброакустических характеристик пластин произвольной формы. В статье [7] рассматриваются два спектральных метода, а именно методы Галеркина и Петрова-Галеркина, для линейного анализа устойчивости уравнений магнитной гидродинамики, описывающих течение электропроводящей жидкости в присутствии тангенциального магнитного поля. Представление нового вычислительного алгоритма для решения дробного дифференциального уравнения пантографа изложено в [8]. Алгоритм основан на введении нового семейства ортогональных многочленов, обобщающих семейство многочленов Чебышева второго рода. В статье [9] разработана полуаналитическая модель для анализа свободных колебаний вращающихся пластин с трещинами на основе расширенного спектрального метода Чебышева. Применение спектрального метода с полиномами Чебышева второго рода для решения краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной изложено в [10].

В статье [11] в качестве базисных функций используются полиномы Чебышева первого рода для представления приближений к краевым задачам восьмого порядка. Авторы статьи утверждают, что предложенный метод прост и превосходит аналогичные методы, описанные в литературе. Получение приближенного решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода с применением полиномов Чебышева первого рода является объектом исследования статьи [12]. В статье показано, что предложенный алгоритм эффективен и имеет высокую точность.

В [13] рассматривается новая расширенная система типа Линара с “поправками” основанная на многочленах Чебышева первого рода. В статье с помощью предложенного метода исследуются точечные множества в области теории сигналов и приводятся результаты иллюстрирующие эффективность метода.

В статье [14] исследуются последовательность кратных ортогональных многочленов Чебышева первого рода, найдена явная формула для ее компонентов в терминах алгебраического уравнения и сильные асимптотические свойства, изучена поведение распределений их корней.

В исследовании [15] используются приближенный спектральный метод для нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных с дробным временем и слабо сингулярным ядром. В этой статье предлагается новый подход к спектральной коллокации для получения точной численной аппроксимации с использованием новых базисных функций, основанных на сдвинутых полиномах Чебышева первого рода, показано, что новый подход является очень точным и эффективным.

В исследовании [16] находится несколько связей между балансирующими многочленами и многочленами Чебышева первого и второго рода. В этой статье многочлены Чебышева первого и второго рода выражаются как сумма двух членов уравновешивающих многочленов с гипергеометрическими коэффициентами.

В статье [17] введены некоторые новые определения и более общие пространства результатов в порядке, соответствующем функциям и особенностям конечных точек. Обсуждаются распространение полученных основных результатов на оптимальные оценки соответствующей интерполяции Чебышева, полученные численные результаты демонстрируют отличное совпадение с ошибочными оценками. Из приведенного обзора видно, что полиномы Чебышева в последние годы широко применяются при

разработке новых методов, при усовершенствовании существующих методов и для решения различных прикладных задач.

Исследование проблемы на собственные значения для подобных потоков достаточно подробно изучены в работах [10, 18, 19] и получены интересные результаты по гидродинамической устойчивости. Проблема гидродинамической устойчивости для плоского течения Пуазейля описывается краевой задачей на собственные значения для уравнения Орра-Зоммерфельда. Данное уравнение является нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением с малым параметром при старшей производной, поэтому возникают значительные трудности при получении приближенного решения близкое к точным. Уравнение Орра-Зоммерфельда получается из двумерных уравнений Навье-Стокса с введением комплексной функции тока. Амплитуда функции тока является комплексной величиной и исследование динамики которой является неисследованной научной проблемой. В данной статье динамика амплитуды функции тока исследуются спектральным методом [19]. В спектральном методе в качестве базисных функций используются полиномы Чебышева первого рода.

С этой целью кратко остановимся на те исследования, которые связаны с непосредственным применением этих полиномов.

Наряду с разностными методами, для решения сингулярно возмущенных задач успешно применяются спектральные [10, 18, 19] и спектрально-сеточные методы [19–21]. В этих методах в качестве базисных функций используются полиномы Чебышева. В спектральных и спектрально-сеточных методах решение уравнения Орра-Зоммерфельда представляется в виде конечного ряда по полиномам Чебышева. Все производные, присутствующие в уравнение, находятся с помощью дифференцирования выбранного конечного ряда. Лишь после этого ряды для решения и его производных ставятся в дифференциальное уравнение и требуется удовлетворение имеющихся дополнительных условий рассматриваемой задачи. В результате получается система алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения решения задачи в конечный ряд. Вообще говоря, при дифференцировании рядов порядок аппроксимирующих полиномов понижаются, а это влияет на точность расчётов.

2 Постановка задачи

Рассмотрим движение вязкой несжимаемой жидкости в полубесконечном плоском канале, которое описывается двумерным уравнением Навье-Стокса [19]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где u , v – продольная и поперечная компоненты вектора скорости, p – давление, $\text{Re} = \frac{\rho UL}{\mu}$ – число Рейнольдса, ρ – плотность, μ – вязкость жидкости, U и L – характерные масштабы скорости и длины соответственно.

В классической теории гидродинамической устойчивости для исследования устойчивости решение системы (1) представляется в виде суперпозиции основного ста-

онарного ламинарного течения $U(y)$, $P(x, y)$ и малого возмущения:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= U(y) + \tilde{u}(x, y, t), \\ \vartheta(x, y, t) &= \tilde{\vartheta}(x, y, t), \\ p(x, y, t) &= P(x, y) + \tilde{p}(x, y, t). \end{aligned} \quad (2)$$

Если же течение $U(y)$ задано, то ставится вопрос, устойчиво ли оно относительно бесконечно малых возмущений? Это и есть проблема гидродинамической устойчивости.

Систему (1) записываем с учётом (2) и, оставляя в полученных уравнениях только слагаемые первого порядка малости по возмущениям, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{\vartheta} \frac{dU}{dy} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{d^2 U}{dy^2} + \Delta \tilde{u} \right), \\ \frac{\partial \tilde{\vartheta}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{\vartheta}}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} &= \frac{1}{\text{Re}} \Delta \tilde{\vartheta}, \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\vartheta}}{\partial y} &= 0, \quad \Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Если учитывать, что основное течение само по себе удовлетворяет уравнениям Навье-Стокса, т.е.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{d^2 U}{dy^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0,$$

то система (3) принимает следующей вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{\vartheta} \frac{dU}{dy} &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \tilde{u}, \\ \frac{\partial \tilde{\vartheta}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{\vartheta}}{\partial x} &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \tilde{\vartheta}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\vartheta}}{\partial y} = 0. \quad (5)$$

Для возмущающего движения $\tilde{u}, \tilde{\vartheta}$ вводим функцию тока в следующем виде:

$$\Psi(x, y, t) = \psi(y) e^{i(kx - \omega t)}, \quad (6)$$

где $\psi(y) = \psi_r + i\psi_i$ – комплексная амплитуда возмущений, k – вещественная величина, она называется волновой числом и связана с длиной волны возмущения соотношением $l = 2\pi/k$. Величина ω – комплексная, $\omega = \omega_r + i\omega_i$, где ω_r – круговая частота отдельного колебания, а ω_i – коэффициент нарастания, т.е. величина позволяющая судить, нарастает или затухает колебание. Если $\omega_i < 0$, то колебание затухает и ламинарное течение устойчиво; если же $\omega_i > 0$, то имеет место неустойчивость. Кроме величин k и ω , целесообразно ввести также их отношение $\lambda = \frac{\omega}{k} = \lambda_r + i\lambda_i$. Здесь величина λ_r представляет собой скорость распространения волн в направлении x (фазовая скорость), а λ_i – опять является величиной, позволяющей судить о затухании или возрастании колебания.

Амплитуда функции тока для возмущающего движения $\psi(y)$ принята зависящей только от переменной y потому, что основное течение также зависит только от y . Для функции тока (6) имеем

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \psi'(y)e^{i(kx-\omega t)}, \\ \tilde{v} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -ik\psi(y)e^{i(kx-\omega t)},\end{aligned}$$

тем самым интегрируется уравнение неразрывности (5), а из системы (4) имеем проблему на собственные значения уравнения Орра-Зоммерфельда:

$$\frac{1}{ikRe} \left(\frac{d^4 \psi}{dy^4} - 2k^2 \frac{d^2 \psi}{dy^2} + k^4 \psi \right) - \left((U(y) - \lambda)D + \frac{d^2 U}{dy^2} \right) \psi = 0, \quad -1 < y < 1, \quad (7)$$

$$\psi(-1) = \frac{d\psi}{dy}(-1) = 0, \quad \psi(1) = \frac{d\psi}{dy}(1) = 0, \quad (8)$$

с однородными краевыми условиями, которые означают требования непроницаемости и прилипания. Здесь $D = \frac{d^2}{dy^2} - k^2$ – дифференциальный оператор, $U(y)$ – профиль скорости основного течения, y – координата, направленная поперек основного течения, k – волновое число, Re – число Рейнольдса, $\psi(y)$ – амплитуды функции тока для возмущений, $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ – собственные значения задачи, где λ_r – фазовая скорость волнового возмущения, λ_i – коэффициент нарастания. Если $\lambda_i > 0$, то течение неустойчиво, если $\lambda_i < 0$, то оно устойчиво. Если же $\lambda_i = 0$, то колебания нейтрально устойчивы.

В качестве основного течения $U(y)$ в (7) рассмотрим течение Пуазейля в плоском полубесконечном канале (рис.1), т.е. $U(y) = 1 - y^2$.

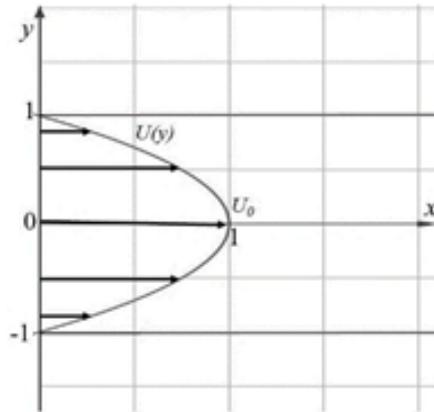


Рис. 1 Профиль скорости основного течения Пуазейля

В этом случае характерной длиной L является полуширина канала, а характерной скоростью U_0 – средняя скорость основного течения $U(y)$. Число Рейнольдса определяется по формуле $Re = \frac{\rho U_0 L}{\mu}$, краевые условия для течения Пуазейля имеют вид как в (8).

Собственные значения задачи (7)-(8) исследованы достаточном уровне. Однако, динамика амплитуды функции тока для течения Пуазейля, т.е. комплексные амплитуды функции тока $\psi(y) = \psi_r + i\psi_i$ для задачи (7)-(8) являются, малоизученной

областью научных исследований. По этой причине целью данной статьи является исследование динамики амплитуды функции тока для возмущений в широком диапазоне изменения характерных параметров задачи: k, Re .

3 Метод решения

Приближенное решение задачи (7), (8) ищем в виде следующего конечного ряда по полиномам Чебышева первого рода:

$$\psi(y) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(y). \quad (9)$$

Подставляя ряд (9) и $U(y)$ в уравнению (7) и потребуем, чтобы левая часть уравнения (7) была ортогональной к первым $(N - 4)$ - м полиномам Чебышева. В этом случае имеем следующую алгебраическую систему [19]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{24} \sum_{\substack{p=n+4 \\ p \equiv n \pmod{2}}}^N \left[p^3(p^2 - 4)^2 - 3n^2p^5 + 3n^4p^3 - pn^2(n^2 - 4)^2 \right] a_p - \\ & - \sum_{\substack{p=n+2 \\ p \equiv n \pmod{2}}}^N \left\{ \left[2k^2 + \frac{1}{4}ik\text{Re}(4 - c_n - c_{n-1}) \right] p(p^2 - n^2) - \frac{1}{4}ik\text{Re}c_n p[p^2 - (n+2)^2] - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{4}ik\text{Re}d_{n-2} p[p^2 - (n-2)^2] \right\} a_p + \{ ik\text{Re}n(n-1) + \\ & \quad + [k^4 + ik\text{Re}(k^2 - 2)]c_n - \frac{1}{4}ik^2\text{Re}c_n(c_n + c_{n-1}) \} a_n - \\ & \quad - \frac{1}{4}ik^3\text{Re}[c_{n-2}a_{n-2} + c_n a_{n+2}] - \\ & \quad - \lambda \left\{ ik\text{Re} \left[k^2 c_n a_n - \sum_{\substack{p=n+2 \\ p \equiv n \pmod{2}}}^N p(p^2 - n^2) a_p \right] \right\} = 0, \\ & \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, N - 4, \end{aligned} \quad (10)$$

где $c_n = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ 2, & n = 0, \\ 1, & n > 0 \end{cases}$ и $d_n = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$.

Граничные условия (8) записанные используя ряд (9), имеют вид

$$\sum_{\substack{n=0 \\ n \equiv 0 \pmod{2}}}^N a_n = 0, \quad \sum_{\substack{n=0 \\ n \equiv 0 \pmod{2}}}^N n^2 a_n = 0, \quad (11)$$

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 1 \pmod{2}}}^N a_n = 0, \quad \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 1 \pmod{2}}}^N n^2 a_n = 0, \quad (12)$$

При получении уравнений (11)-(12) учтены следующие свойства полиномов Чебышева:

$$T_n(\pm 1) = (\pm 1)^n, \quad T'_n(\pm 1) = (\pm 1)^{n-2} n^2.$$

Уравнение Орра-Зоммерфельда (7) и краевые условия (8) обладают свойством инвариантности относительно замены y на $-y$, поэтому решение можно искать отдельно для четных и нечетных функций $\psi(y) = \psi_r + i\psi_i$ [19]. Согласно этому свойству, система (10)-(12) распадается на следующие две независимые подсистемы (10)-(11) с четными индексами n и (10)-(12) с нечетными n . Рассмотрим для определенности случай четных n и обозначим $N = 2M$. Тогда приходим к системе $(M + 1)$ уравнений с $(M + 1)$ неизвестными:

$$(A - \lambda B)x = 0, \tag{13}$$

где комплексные матрицы A и B имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 4 & 16 & \dots & \dots & (2M)^2 \\ x & x & x & \dots & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & x & x & x \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ x & x & x & \dots & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & x & x & x \end{pmatrix},$$

а вектор $x^T = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_M)$. Видно что матрица вырожденная, поэтому используя для решения системы подход, описанный в монографии [19], имеем следующую систему:

$$(AQ - \lambda BQ)(Q^{-1}x) = 0, \tag{14}$$

где матрицы AQ и BQ имеют вид

$$AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M^2 & 0 & \dots & 0 \\ x & x & x & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & T & \dots \\ x & x & x & \dots & x \end{pmatrix}, \quad BQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x & x & x & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & W & \dots \\ x & x & x & \dots & x \end{pmatrix},$$

Из системы (14) видно, что преобразование подобия не меняет собственных значений матрицы A и по определенному закону преобразует её собственные векторы. Введя обозначения $Z = Q^{-1}x$, можно видеть, что $Z_0 = 0, Z_1 = 0$ и

$$(T - \lambda W)Y = 0, Y = (Z_2, Z_3, \dots, Z_M). \tag{15}$$

Из системе (15), можно перейти к стандартной проблеме на собственные значения следующего вида:

$$(D - \lambda E)Y = 0, D = TW^{-1}. \tag{16}$$

В результате решения стандартной проблеме на собственные значения (16), были получены следующие собственные значения в случае когда число аппроксимирующих полиномов $M = 14$. Результаты расчётов приведены в табл.1.

Таблица 1. Собственные значения для течения Пуазейля

i	λ_i	i	λ_i
0	0.01689494-2.90644968i	14	0.50817983-0.04081171i
2	0.05584990-0.50577150i	16	0.62661990-0.03476480i
4	0.04946582-0.19858474i	18	0.73781264-0.02998424i
6	0.14553112-0.13763963i	20	0.83587787-0.02701616i
8	0.23748713+0.00284820i	22	0.96749101-0.02578292i
10	0.27335505-0.07430323i	24	0.91508226-0.02540983i
12	0.38875040-0.04935159i	$max(\lambda_i)=0.23748710+0.00284820i$	

В табл. 2 Приведены данные, показывающие точность расчетов, неустойчивой моды (гармоника с наибольшей величиной λ_i) течения Пуазейля для различного числа базисных функций. Параметры Re , k фиксированы: $Re = 10^4, k = 1$. Их величина выбрана в соответствии с результатами работ [2]. Вычисления величины $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$, соответствующей $\max(\lambda_i)$, приведены в табл.2.

Таблица 2. Максимальные собственные значения при различных значениях полиномов Чебышева $M + 1$

$M+1$	Данная работа	Статья [2]
15	0.23748713+0.00284820i	0.23690887+0.00365515i
17	0.23739871+0.00368641i	0.23743315+0.00372248i
20	0.23752989+0.00373020i	0.23752676+0.00373427i
23	0.23752674+0.00374001i	0.23752670+0.00373982i
26	0.23752647+0.00373966i	0.23752648+0.00373967i
32	0.23752648+0.00373967i	0.23752649+0.00373967i
Точное значение [2]	0,23752649+0,00373967i	

Видно, что с ростом точность растет и при $M + 1 = 32$, все цифры в мантиссе совпадают с точным значением λ .

Решая стандартную проблему на собственные значения (16), находятся искомые комплексные собственные значения $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ и среди них выбирается максимальное собственное значение, т.е. максимальное по модулю собственное значение по которому можно судить об устойчивости или неустойчивости основного течения Пуазейля.

Основной целью данной статье является не только решение проблемы на собственные значения для течения Пуазейля, а исследование динамики амплитуды функции тока для возмущающего потока: $\psi(y) = \psi_r(y) + i\psi_i(y)$. Однако, данная деятельность требует своеобразного подхода при исследовании требуемой динамики. Как отмечено выше, при применении преобразование подобия собственные векторы преобразуются по определенному закону. Таким образом, вместо истинного собственного вектора, имеем преобразованную вектор $Y = (Z_2, Z_3, \dots, Z_M)$, первые две компоненты которой равны нулю, т.е. $Z_0 = 0, Z_1 = 0$. Пополняя первые две компоненты вектора Y нулями, имеем вектор $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_M)$. Из известного равенства $Z = Q^{-1}x$ определяем вектор x . Для этого последнее равенство слева умножим на матрицу преобразование подобия Q и имеем

$$x = QZ. \quad (17)$$

Для вычисления искомого собственного вектора x по формуле (17), требуется найти матрицу Q . Данная матрица определяется следующим образом.

Из вышеизложенного ясно, что матрицы A и AQ известные матрицы, тогда из соотношения

$$Q = A^{-1}(AQ), \quad (18)$$

имеем матрицу Q .

Таким образом, по известному матрицу Q и по вектору Z можно вычислить искомые собственные векторы исследуемой задачи. Найденные комплексные собственные векторы являются коэффициентами разложения $a_n = a_n^{real} + ia_n^{imag}$ ($n = 0, 1, 2, \dots, M$) в формуле (9) для амплитуды функции тока для возмущающего течения. Выделяя

действительные и мнимые части найденного собственного вектора

$$x^T = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_M), \quad (19)$$

исследуется динамика амплитуды функции тока

$$\psi(y) = \sum_{n=0}^M (a_n^{real} + ia_n^{imag}) T_n(y), \quad (20)$$

отдельно для действительной части и отдельно для мнимой части в коллокационных узлах полиномом Чебышева первого рода $y_l = \cos\left(\frac{\pi l}{M}\right)$, $l = 0, 1, 2, \dots, M$:

$$\psi_r(y_l) = \sum_{n=0}^M a_n^{real} T_n(y_l), \quad (21)$$

$$\psi_i(y_l) = \sum_{n=0}^M a_n^{imag} T_n(y_l), \quad (22)$$

где через a_n^{real} и a_n^{imag} обозначены действительные и мнимые части собственного вектора соответственно.

4 Обсуждение результатов

При $M = 14$ максимальное собственное значение имеет вид $\lambda = 0,23748713 + 0,00284820i$. Из системы (16) и (17), вычислим значения мнимой и действительной частей вектора x , а также значения амплитуды функции тока $\psi(y)$ по формулам (21)-(22).

Таблица 3. Амплитуды функции тока для течения Пуазейля

l	y_l	$\psi_r(y_l)$ (real)	$\psi_i(y_l)$ (imag)
0	-1.00000000	-2.13151006	0.90415822
1	-0.97492791	-1.64386639	0.38352702
2	-0.90096887	-2.14313613	0.91842804
3	-0.78183148	-1.67018539	0.40926681
4	-0.62348980	-2.19111938	0.95241813
5	-0.43388374	-1.74619521	0.44387459
6	-0.22252093	-2.30566541	0.98421531
7	0.00000000	-1.89874774	0.45982997
8	0.22252093	-2.51631028	1.01220340
9	0.43388374	-2.30663790	0.39790602
10	0.62348980	-3.01714536	0.65944830
11	0.78183148	-2.72433961	0.41249742
12	0.90096887	-2.65218515	1.52113664
13	0.97492791	-0.53852574	0.41939549
14	1.00000000	0.00000000	0.00000000

На основе приведённой выше таблицы построим графики зависимости $\psi(y)$ в коллокационных узлах полиномов Чебышева $y_l (l = 0, 1, 2, \dots, M)$.

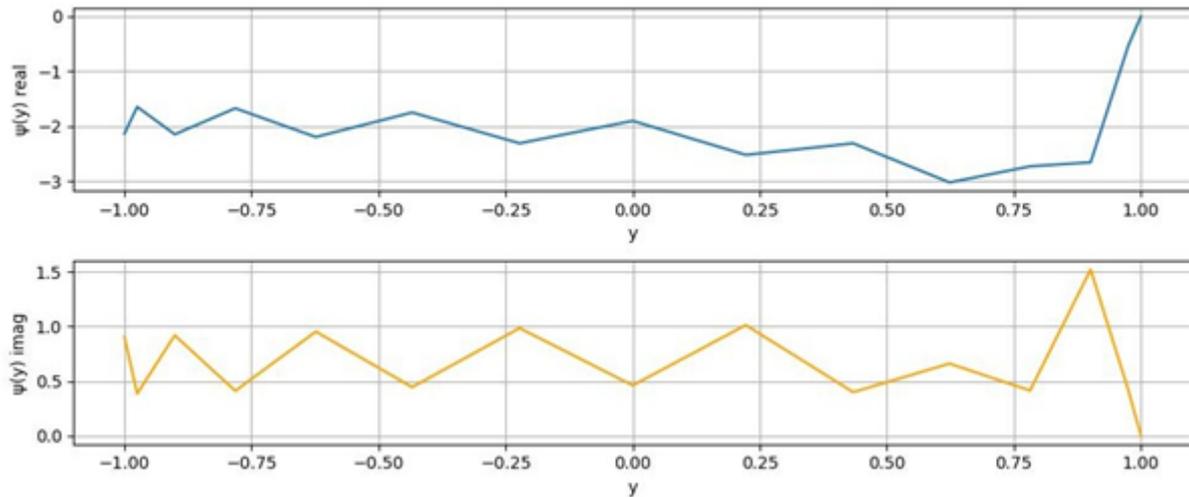


Рис. 2 Динамика амплитуды функции тока при $M = 14$, $\lambda = 0,23748713 + 0,00284820i$

Видно, что градиенты амплитуды функции тока велики вблизи границы, в так называемом пограничном слое.

Проведены также численные расчеты амплитуды функции тока $\psi(y)$ в зависимости от y , при различных числах аппроксимирующих полиномов M . Результаты расчётов при $M = 31$ изображены на рис.3.

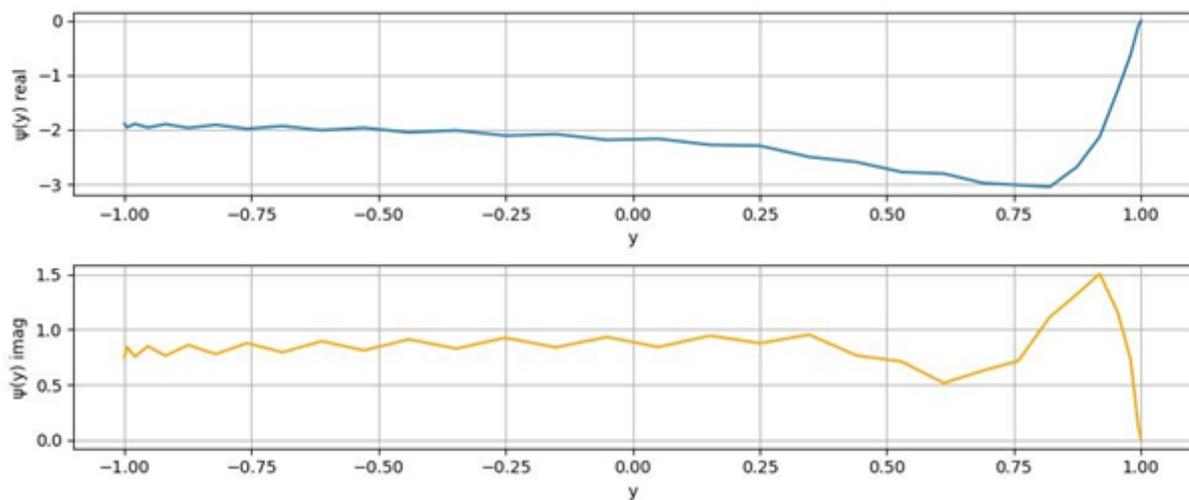


Рис. 3 Динамика амплитуды функции тока при $M = 31$, $\lambda = 0,23752648 + 0,00373967i$

В табл. 4 приведены значения амплитуды функции тока функции тока $\psi(y)$ в коллокационных узлах полиномов Чебышева $y_l (l = 0, 1, \dots, M)$ при $M = 50$.

Таблица 4. Амплитуды функции тока

l	y_l	$\psi_r(y_l)$ (real)	$\psi_i(y_l)$ (imag)
0	-1.00000000	-1.95400554	0.84255096
5	-0.95105652	-1.93361082	0.81491729
10	-0.80901699	-1.97493230	0.87032134
15	-0.58778525	-1.98953397	0.86194161
20	-0.30901699	-2.08894757	0.92159531
25	0.00000000	-2.18453587	0.89716656
30	0.30901699	-2.43747910	0.96789469
35	0.58778525	-2.81738373	0.59251333
40	0.80901699	-3.07369382	1.04676802
45	0.95105652	-1.39768618	1.25655090
50	1.00000000	-0.00021793	0.00037770

Результаты табл. 4 изображены на рис.4.

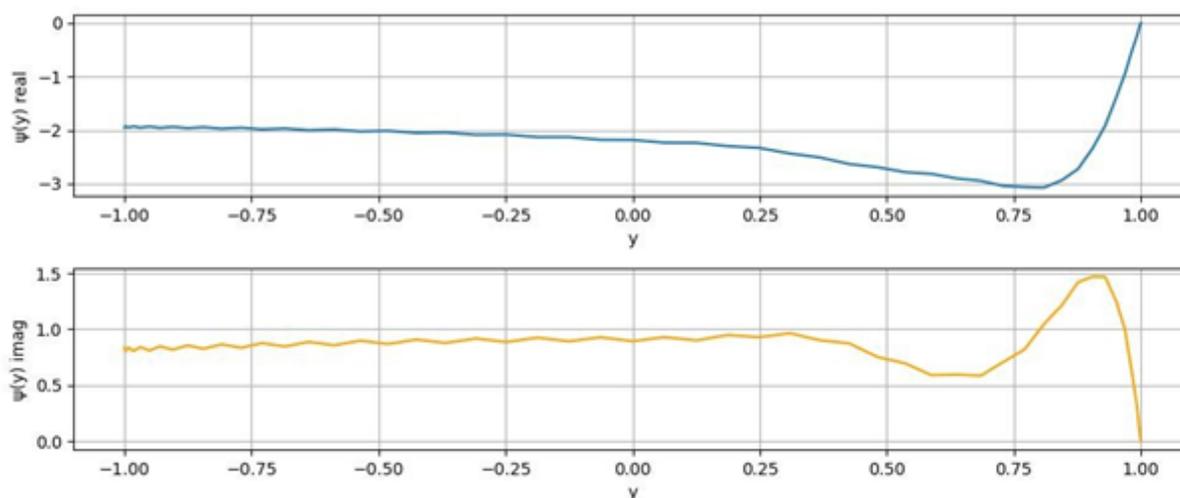


Рис. 4 Динамика амплитуды функции тока при $M = 50$, $\lambda = 0,23752648 + 0,00373967i$

Из приведенных расчётов видно, что градиенты амплитуды функции тока велики в пограничном слое.

5 Заключение

В заключении можно отметить следующие основные моменты:

1. Спектральным методом дифференциальная задача на собственные значения для течения Пуазейля сведена к обобщенной алгебраической проблеме на собственные значения.

2. Установлено, что матрица связанная с собственными значениями вырождена и содержит две нулевые строки, так как краевые условия задачи не зависят от собственных значений.

3. Построено матрица унитарных преобразований и с помощью её обобщенная алгебраическая проблема на собственные значения сведена к проблеме, где получае-

мая матрица уже является невырожденной, и систему можно свести к стандартной проблеме на собственные значения.

4. Вообще говоря, при применении матрицы унитарного преобразования собственные значения алгебраической проблеме не меняются, а собственные векторы (известные коэффициенты разложения ряда по полиномам Чебышева) становятся другими, они преобразуются согласно обратной матрицы унитарных преобразований.

5. Построен алгоритм для вычисления как матрицу унитарных преобразований, так и обратную к ней матрицу.

6. Определены компоненты собственного вектора соответствующие самому неустойчивому собственному вектору и используя их исследована динамика амплитуда функции тока для плоского течения Пуазейля.

7. Результаты расчётов представлены как в табличном так и в графическом виде показывают высокую точность расчётов.

Литература

- [1] *Zebib A.A.* Chebyshev method for the solution of boundary value problems *J.comput.phys.* – 1984. – №3(53). – P. 443–455.
- [2] *Orszag S.A.* Accurate Solution of the Orr-Sommerfeld stability equation *J.fluid mech.* – 1971. – №4(50). – P. 689–701.
- [3] *Gottlieb D., Orszag S.A.* Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics.* – SIAM, Philadelphia, – 1977. – No. 26. – P. 143–148.
- [4] *Reuben Rauch and Manfred R. Trummer and J.F. Williams.* A spectral collocation method for mixed functional differential equations *Applied Numerical Mathematics.* – 2021. – Volume 161. – P. 101–110. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2020.10.011>.
- [5] *Vishwanath B. Awati, Akash Goravar, Abeer H. Alzahrani, N.M. Bujurke and Ilyas Khan* Convective heating and mass transfer in Buongiorno model of nanofluid using spectral collocation method of shifted Chebyshev polynomial *International Journal of Thermofluids.* – 2023. – Vol 20. – P. 1–10. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijft.2023.100471>.
- [6] *Tiantong Zhao and Tianguai Ye and Yuehua Chen and Guoyong Jin and Zhigang Liu* Single domain Chebyshev spectral method for analyses of the vibroacoustic characteristics of baffled irregularly shaped plates *Journal of Sound and Vibration.* — 2024. — Vol. 592. — P. 1–16. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2024.118627>.
- [7] *Anna Piterskaya and Mikael Mortensen* A study of the Orr–Sommerfeld and induction equations by Galerkin and Petrov–Galerkin spectral methods utilizing Chebyshev polynomials *Journal of Computational and Applied Mathematics* – 2025. – Vol. 459. – P. 1–14. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2024.116374>.
- [8] *Abd-Elhameed W.M. and Alsuyuti M.M.* New spectral algorithm for fractional delay pantograph equation using certain orthogonal generalized Chebyshev polynomials *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* – 2025. – Vol. 141. – P. 1–21. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2024.108479>.
- [9] *Qizhi Mao and Yukun Chen and Guoyong Jin and Tianguai Ye and Yantao Zhang* An extended Chebyshev spectral method for vibration analysis of rotating cracked plates *Mechanical Systems and Signal Processing.* – 2025. – Vol 229. – P. 1–17. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2025.112558>.
- [10] *Normurodov Ch.B., Tursunova. B.A.* Numerical modeling of the boundary value problem of an ordinary differential equation with a small parameter at the highest derivative by Chebyshev polynomials of the second kind *Results in Applied mathematics* – 2023. – P. 1–6. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rinam.2023.100388>.

- [11] *Musiliu Tayo Raji., Christie Yemisi Ishola., Olutola Olayemi Babalola., Tawakalt Abosede Ayoola., Nasiru Muhammed Momoh., Olumuyiwa James Peter* Numerical solution of eight order boundary value problems using Chebyshev polynomials Mathematics and computational sciences. – 2023. – V. 4(1). – P. 18–28.
- [12] *Azzam S.Y. Aladool., Mohammed Abdulrazaq Kahya.* Solving Fredholm integral equations using bees algorithm based on Chebyshev polynomials International Journal of Applied Mathematics.– 2022. – V. 35. – No. 6. – P. 855–865.
- [13] *Vesselin Kyurkchiev, Anton Iliev., Asen Rahnev., Nikolay Kyurkchiev* Lienard system with first kind Chebyshev’s polynomial–correction in the light of Melnikov’s approach. Simulations and possible applications International Scientific Conference IMEA. 23–25 November – 2022. Pamporovo, Bulgaria. – P. 105–112.
- [14] *Fidalgo U.* Type I Chebyshev Polynomials // Mathematics Subject Classification. Primary 54C40, 14E20; Secondary 46E25, 20C20. Department of Mathematics and Statistics, Case Western Reserve University, Cleveland, Ohio 43403. – 2022. – P. 1–45.
- [15] *Atta A.G., Youssri Y.H.* Advanced shifted first-kind Chebyshev collocation approach for solving the nonlinear time-fractional partial integro-differential equation with a weakly singular kernel Computational and Applied Mathematics. – 2022. – P. 1–19.
- [16] *Behera A., Ray P.K.* Hypergeometric connections between balancing polynomials and Chebyshev polynomials of first and second kinds Armenian Journal of Mathematics. – 2022. – Volume 14. – P. 1–20.
- [17] *Ruiyi Xie., Boying Wu., Wenjie Liu.* Optimal Error Estimates for Chebyshev Approximations of Functions with Endpoint Singularities in Fractional Spaces Journal of Scientific Computing. – 2023.– 96(3) – P. 2–27.
- [18] *Нармурадов Ч.Б., Соловьев А.С.* О влиянии взвешенных частиц на устойчивость плоского течения Пуазейля Изв. РАН. Сер. Механика жидкости и газа. –Москва, – 1986. – №1. – С.46–50.
- [19] *Абуталиев Ф.Б., Нармурадов Ч.Б.,* Математическое моделирование проблемы гидродинамической устойчивости Ташкент : Fan va texnologiya: – 2011. – С. 173–188.
- [20] *Нормуродов Ч.Б.* Об одном эффективном методе решения уравнения Орра-Зоммерфельда Математическое моделирование. Москва, – 2005.– №9(17). – С. 35–42.
- [21] *Normurodov Ch.B., Tilovov M.A., Tursunova B.A., Djurayeva N.T.* Numerical modeling of inhomogeneous singularly perturbed fourth-order boundary value problems using the spectral method Problems of computational and applied mathematics. – 2023. – №5(52). – P.83–89.

Поступила в редакцию 23.04.2025

UDC 519.624.3

NUMERICAL MODELING OF THE AMPLITUDE DYNAMICS OF THE STREAM FUNCTION FOR PLANE POISEUILLE FLOW

*Normurodov Ch.B., *Tilovov M.A., Normurodov D.Ch.*

*mtilovov21@gmail.com

Termiz state university,

43, Barkamol Avlod Str., Termez, 190111 Uzbekistan.

This paper investigates the dynamics of the complex amplitude of the stream function for plane Poiseuille flow using the spectral method. An approximate solution of the flow under consideration is sought as a finite series expansion in terms of Chebyshev polynomials of the first kind with unknown expansion coefficients. The eigenvalue spectrum of the Poiseuille flow is determined, and the most unstable eigenvalue (with the largest modulus) is selected. The components of the corresponding eigenvector, which represent the complex unknown coefficients of the desired series expansion, are also determined. Using these coefficients, the real and imaginary parts of the amplitude of the stream function for the perturbed flow are computed. The results of the computations are presented in both tabular and graphical form and demonstrate the high accuracy of the proposed approach.

Keywords: Poiseuille flow, stream function amplitude, spectral method, Chebyshev polynomials, high accuracy.

Citation: Normurodov Ch.B., Tilovov M.A., Normurodov D.Ch. 2025. Numerical modeling of the amplitude dynamics of the stream function for plane Poiseuille flow. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 3(67): 53-66.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.3_67.2025.05.

HISOBLASH VA AMALIY
МАТЕМАТИКА
MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL
AND APPLIED MATHEMATICS



ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 3(67) 2025

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Азамов А.А., Арипов М.М., Шадиметов Х.М.

Ответственный секретарь:

Ахмедов Д.Д.

Редакционный совет:

Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Арушанов М.Л., Бурнашев В.Ф.,
Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия), Игнатъев Н.А.,
Ильин В.П. (Россия), Иманкулов Т.С. (Казахстан), Исмагилов И.И. (Россия),
Кабанихин С.И. (Россия), Карачик В.В. (Россия), Курбонов Н.М., Маматов Н.С.,
Мирзаев Н.М., Мухамадиев А.Ш., Назирова Э.Ш., Нормуродов Ч.Б.,
Нуралиев Ф.М., Опанасенко В.Н. (Украина), Расулмухамедов М.М., Расулов А.С.,
Садуллаева Ш.А., Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А.,
Хамдамов Р.Х., Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Чье Ен Ун (Россия),
Шабозов М.Ш. (Таджикистан), Dimov I. (Болгария), Li Y. (США),
Mascagni M. (США), Min A. (Германия), Singh D. (Южная Корея),
Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

Дизайн и вёрстка:

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 30.06.2025 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №5. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 3(67) 2025

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

Editor-in-Chief:

Ravshanov N.

Deputy Editors:

Azamov A.A., Aripov M.M., Shadimetov Kh.M.

Executive Secretary:

Akhmedov D.D.

Editorial Council:

Aloev R.D., Amirgaliev E.N. (Kazakhstan), Arushanov M.L., Burnashev V.F.,
Zagrebina S.A. (Russia), Zadorin A.I. (Russia), Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia),
Imankulov T.S. (Kazakhstan), Ismagilov I.I. (Russia), Kabanikhin S.I. (Russia),
Karachik V.V. (Russia), Kurbonov N.M., Mamatov N.S.,
Mirzaev N.M., Mukhamadiev A.Sh., Nazirova E.Sh., Normurodov Ch.B., Nuraliev F.M.,
Opanasenko V.N. (Ukraine), Rasulov A.S., Sadullaeva Sh.A., Starovoitov V.V. (Belarus),
Khayotov A.R., Khaldjigitov A., Khamdamov R.Kh., Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh.,
Chye En Un (Russia), Shabozov M.Sh. (Tajikistan), Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA),
Mascagni M. (USA), Min A. (Germany), Singh D. (South Korea), Singh M. (South
Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the
Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.

The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.

Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

Address:

100125, Tashkent, Buz-2, 17A.

Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

E-mail: journals@airi.uz.

Web-site: <https://journals.airi.uz>.

Layout design:

Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.

Signed for print 30.06.2025

Format 60x84 1/8. Order No. 5. Print run of 100 copies.

Содержание

<i>Хужсайёров Б., Джиьянов Т.О., Эшдавлатов З.З.</i> Перенос вещества в элементе трещиновато-пористой среды с учетом эффекта памяти	5
<i>Муминов У.Р.</i> Вырожденные отображения Лотки-Вольтерры и соответствующие им биграфы как дискретная модель эволюции взаимодействия двух вирусов	15
<i>Хужсайёров Б.Х., Зокиров М.С.</i> Аномальная фильтрация жидкости в плоско-радиальной однородной пористой среде	28
<i>Назирова Э.Ш., Карабаева Х.А.</i> Численное решение нелинейной задачи фильтрации грунтовых и напорных вод	37
<i>Нормуродов Ч.Б., Тиловов М.А., Нормуродов Д.Ч.</i> Численное моделирование динамики амплитуды функции тока для плоского течения Пуазейля	53
<i>Абдуллаева Г.Ш.</i> Построение алгебраически-гиперболического сплайна естественного натяжения восьмого порядка	67
<i>Алов Р.Д., Бердышев А.С., Нематова Д.Э.</i> Численное исследование устойчивости по Ляпунову противопоточной разностной схемы для квазилинейной гиперболической системы	83
<i>Болтаев А.К., Пардаева О.Ф.</i> Об одной интерполяции функции натуральными сплайнами	97
<i>Хаётов А.Р., Нафасов А.Ю.</i> Оптимальная интерполяционная формула с производной в гильбертовом пространстве	107
<i>Шадиметов М.Х., Азамов С.С., Кобылов Х.М.</i> Оптимизация приближённых формул интегрирования для классов периодических функций	116
<i>Игнатъев Н.А., Тоштулатов А.О.</i> О проблемах поиска выбросов в задаче с одним классом	125
<i>Юлдашев С.У.</i> Тонкая настройка AlexNet для классификации форм крыш в Узбекистане: подход с использованием трансферного обучения	133

Contents

<i>Khuzhayorov B., Dzhiyanov T.O., Eshdavlatov Z.Z.</i>	
Anomalous solute transport in an element of a fractured-porous medium with memory effects	5
<i>Muminov U.R.</i>	
Degenerate Lotka-Volterra mappings and their corresponding bigraphs as a discrete model of the evolution of the interaction of two viruses	15
<i>Khuzhayorov B.Kh., Zokirov M.S.</i>	
Anomalous filtration of liquid in a plane-radial homogeneous porous medium . .	28
<i>Nazirova E., Karabaeva Kh.A.</i>	
Numerical solution of the nonlinear groundwater and pressurized water filtration problem	37
<i>Normurodov Ch.B., Tilovov M.A., Normurodov D.Ch.</i>	
Numerical modeling of the amplitude dynamics of the stream function for plane Poiseuille flow	53
<i>Abdullaeva G.Sh.</i>	
Construction of an algebraic-hyperbolic natural tension spline of eighth order . .	67
<i>Aloev R.D., Berdishev A.S., Nematova D.E.</i>	
Numerical study of Lyapunov stability of an upwind difference scheme for a quasilinear hyperbolic system	83
<i>Boltaev A.K, Pardaeva O.F.</i>	
On an interpolation of a function by natural splines	97
<i>Hayotov A.R., Nafasov A.Y.</i>	
On an optimal interpolation formula with derivative in a Hilbert space	107
<i>Shadimetov M.Kh, Azamov S.S, Kobilov H.M.</i>	
Optimization of approximate integration formulas for periodic function classes .	116
<i>Ignatiev N.A., Toshpulatov A.O.</i>	
About problems with finding outliers in a single-class problem	125
<i>Yuldashev S.U.</i>	
Fine-tuned AlexNet for roof shape classification in Uzbekistan: a transfer learning approach	133