

УДК 512:519.6

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ ГРУНТОВЫХ И НАПОРНЫХ ВОД

¹Назирова Э.Ш., ^{2*}Карабаева Х.А.

*karabaeva.84@inbox.ru

¹Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада-ал-Хоразмий, 100202, Узбекистан, Ташкент, ул. Амира Темура, 108;²Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта, 100125, Узбекистан, г. Ташкент, Мирзо-Улугбекский р-он, м-в Буз-2, д. 17А.

В данной статье рассматривается численное моделирование задачи нелинейной фильтрации подземных вод с учетом испарения и инфильтрации. Особое внимание уделяется влиянию нелинейных эффектов на распределение и динамику фильтрационных потоков в пористых средах. Разработана математическая модель, основанная на системе нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих процесс фильтрации воды в грунте. Для решения применены численные методы, включая разностные схемы и итерационные алгоритмы, обеспечивающие устойчивость и сходимость вычислений. Выполнено численное моделирование различных условий, описывающих динамику подземных вод с учётом изменяющейся влажности и воздействия внешних факторов. Представлен алгоритм, разработанный на основе конечно-разностного решения системы уравнений фильтрации подземных вод в двухслойной модели водоносных пластов. Алгоритм реализован в виде программного обеспечения, предназначенного для решения различных гидрогеологических и мелиоративных задач прогноза. Программа учитывает влияние как природных, так и искусственных факторов на процесс фильтрации грунтовых и напорных вод. Результаты расчетов визуализируются в графической форме.

Ключевые слова: математическая модель, численное моделирование, подземные воды, фильтрация, инфильтрация, испарение, метод конечных разностей.

Цитирование: Назирова Э.Ш., Карабаева Х.А. Численное решение нелинейной задачи фильтрации грунтовых и напорных вод // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2025. – № 3(67). – С. 37-52.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.3_67.2025.04.

1 Введение

В настоящее время в мире широко проводятся целенаправленные исследования, направленные на изучение процессов неустановившейся фильтрации подземных вод. Вода, наряду с воздухом, является неотъемлемым и чрезвычайно важным компонентом среды обитания всего живого на нашей планете. Одним из важнейших гидрогеологических процессов является фильтрация или геофильтрация подземных вод, представляющая собой самотечное течение воды в пористой или трещиноватой среде. Движение подземных вод в основном осуществляется за счет геофильтрации. При этом правильный прогноз изменения уровня грунтовых вод при орошении оценка влияния искусственных и естественных дренажных сооружений на колебание уровня грунтовых вод имеют важное значение для гидрогеологии и мелиорации. На сегодняшний день, такие гидрогеологические исследования как, расчёты водозаборов

подземных вод, защита карьеров от затопления, охрана подземных вод от загрязнения и многие другие, не обходятся без численного моделирования геофильтрации [1].

Методы численного моделирования геофильтрационных процессов в подземных водах, а также разработка и реализация предлагаемой методики решения гидрогеологических задач в качестве примеров приведены [2] исследования геофильтрационных процессов в горных районах Республики Узбекистан, где разработаны рекомендации по оптимальному использованию подземных вод в питьевом водоснабжении и орошении, проанализированы проблемы поступления пластовых вод в подземные водоносные горизонты в виде фильтрации, а также предложены оптимальные решения по строительству дренажных систем в горных районах. Основное внимание уделяется разработке математических моделей, описывающих процессы взаимодействия подземных и поверхностных вод с учетом различных природных и антропогенных факторов. Описаны методы прогнозирования изменения уровня и состояния подземных вод, а также расчета элементов водного баланса. Также уделяется внимание использованию информационных технологий, систем математического моделирования и геоинформационных технологий для повышения точности результатов гидрогеологических исследований.

Как самостоятельная научная гидрогеологическая дисциплина динамика подземных вод оформилась в начале 1930-х годов. Основоположником ее считается Г.Н. Каменский, который первым обобщил и применил к решению гидрогеологических задач многое из того, что было разработано к тому времени в теории фильтрации. Он создал теории движения естественных потоков в неоднородных пластах и стационарного подпора грунтовых вод в различных гидрогеологических условиях, разработал гидродинамические основы изучения режима и баланса подземных вод на основе метода конечных разностей.

Первые фундаментальные разработки в области теории фильтрации относятся к середине XIX в. Они связаны с именами гидравликов А. Дарси, который эмпирически обосновал основной закон фильтрации в пористой среде, и Ж. Дюпи, применившего этот закон к изучению движения воды в песчаных пластах и к скважинам. В конце XIX начале XX вв. значительный вклад в теорию фильтрации внесли гидромеханики Н. Е. Жуковский, Ф.Форхгеймер и Ж.Буссинеск, которые предложили дифференциальные уравнения для описания фильтрации реальных жидкостей в пористой среде и применили их к решению задач водопритока к скважинам и изучению грунтовых вод. Дальнейшее развитие математических основ теории фильтрации связано с работами многих ведущих гидромехаников в области гидротехнического (Н.Н. Павловский, В.И. Аравини С.Н. Нумеров, П.Я. Полубаринова-Кочина и др.) и ирригационного (В.В. Ведерников, С.Ф. Аверьянов, Н.Н. Веригин, А.Я. Олейник и др.) строительства, а также разработки месторождений нефти и газа (Л. С. Лейбензон, И. А. Чарный, В.Н. Щелкачев и др [3–5]).

Подземные воды нельзя изучать изолированно от вод в атмосфере и на поверхности земли. Вода из атмосферы поступает на поверхность земли в виде осадков: дождя, снега и, в меньшей мере, росы и туманов. При этом одна часть осадков стекает по поверхности земли в реки, несущие свои воды в океаны и моря, а другая просачивается через почву и насыщает нижележащие слои горных пород, пополняя запасы подземных вод. Подземные воды также находятся в непрерывном движении, участвуя в питании рек, озер и болот; во многих местах они выходят на дневную поверхность в виде источников. В мире уделяется большое внимание созданию и совершенствованию, а также развитию математических моделей газо-гидродинамических

процессов, использованию возможностей численных методов и инфокоммуникационных технологий для решения линейных и нелинейных задач теории фильтрации [6, 7].

Математические модели процесса фильтрации подземных вод в многослойных пористых средах, обычно описываются системами линейных и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с соответствующими краевыми и внутренними условиями различного рода. Поэтому, к настоящему времени в области разработки математических моделей и вычислительных алгоритмов решения подобных задач уже получены значительные результаты прикладного и фундаментального характера. В частности, значительный вклад в методологию математического моделирования фильтрационных потоков в многослойных средах оказали исследования М.С. Хантуша, а также рассмотрены достаточно количество фундаментальных работ, например, В.Н.Шестакова, Н.Н.Верегина, И.А.Чарного, Ф.Б.Абуталиева и других авторах, в которых учитывается упругой режим фильтрации в слоях [8–15].

В монографиях Ф.Б.Абуталиева и др. рассматривается процесс прогнозирования и анализ динамики изменения уровня подземных и напорных вод с использованием аналитическими, приближенно-аналитическими и численными методами. Представлен краткий анализ научных работ и вычислительных экспериментов по математическому и численному моделированию исследуемого объекта. Изучено, что изменения уровня грунтовых и напорных вод, водопроницаемости, коэффициента водоотдачи и скорости фильтрации, связанной с уровнем грунтовых вод, оказывают серьезное влияние на экологический процесс.

Регионы с разной влажностью отличаются друг от друга резким перепадом температуры воздуха, количества осадков и испарения. В пустынных и полупустынных районах процесс инфильтрации может происходить круглый год (непрерывно), поскольку почвы почти никогда не промерзают.

Основная часть осадков (до 70-80%) выпадает в ноябре-марте. В полупустынных районах годовая сумма осадков за многие годы орошения увеличивается в 2-2,5 раза от средней многолетней нормы. Результаты изучения баланса ливневых стоков на территории Узбекистана показали, что 75-95% стока из района забора и транзита в регион потребления является испарением. Из-за этого почвы сильно засолены, а верхняя часть просачивающихся вод тоже соленая. Если землю орошать, уровень грунтовых вод повысится, а испарение увеличится. Без проведения полномасштабных мелиоративных мероприятий на этих землях невозможно получить урожай так как испарение приводит к сильному засолению почв.

В связи с этим анализ многолетних данных об изменении уровня подземных вод показал, что:

– максимальное значение внешних факторов (дождь, снег, влажность и т.д.) наблюдается преимущественно с середины осени до середины весны (октябрь, ноябрь, декабрь, январь, февраль, март, апрель), а минимальные значения наблюдаются с конца весны до осени, соответствующей ее началу (май, июнь, июль, август, сентябрь);

– максимальная величина испарения наблюдается с середины весны до начала осени (апрель, май, июнь, июль, август, сентябрь), а минимальные показатели - с начала осени до начала весны (октябрь, ноябрь, декабрь, январь, февраль, март месяцы).

Изменения уровня грунтовых вод под воздействием внешних факторов и испарения играют важную роль в сельскохозяйственном секторе и на территориях, используемых для потребления и промышленности.

На основе анализа и статистической обработки многолетних метеорологических данных с целью изучения влияния этих внешних факторов и испарения:

– для расчета внешних факторов получено следующее соотношение:

$$f = f_0 + \Delta f \cdot \sin(\omega t).$$

Здесь f_0 – среднемесячное изменение внешних факторов, Δf – изменение годовой амплитуды внешних факторов, ω – циклические частоты месячных изменений.

График изменения внешних факторов (дождь, снег, влажность и т.д.) во времени по результатам расчета представлен ниже (Рис. 1).

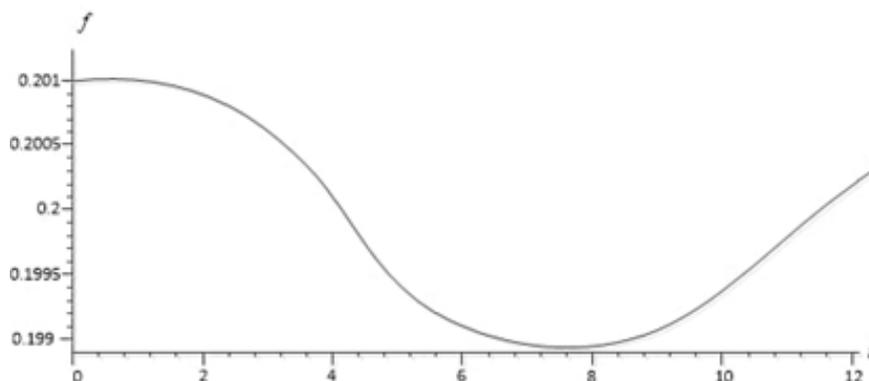


Рис. 1 Изменение внешних факторов (дождь, снег, влажность и т.д.)

Для расчета испарения получено следующее соотношение: $\omega = \omega_0 + \Delta\omega \cdot \sin(\omega t)$.

Здесь ω_0 – среднемесячные изменения испарения, $\Delta\omega$ – годовая амплитуда изменения испарения, ω – циклическая частота месячного изменения.

График испарения во времени по результатам расчета приведен ниже (Рис. 2).

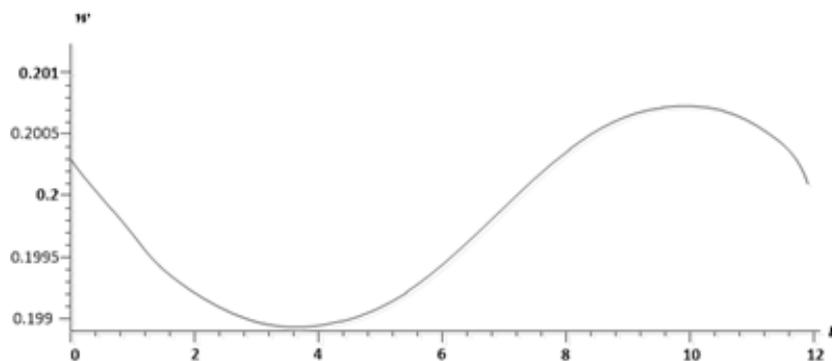


Рис. 2 Изменения испарения

Пористость почвы является одним из основных параметров, влияющих на изменение уровня грунтовых вод и концентрации солей в них. Отношение выбранного объема пор к общему объему грунта дает пористость и выражается следующим образом

$$n = \frac{V}{V_{\text{общ}}}.$$

Здесь V – объем пор, $V_{\text{общ}}$ – общий объем грунта.

Следует отметить, что в математических моделях, описывающих процесс изменения уровня грунтовых вод, предложенных Ф.Б.Абуталиевым, Э.Б.Абуталиевым, М.Б.Баклушиным, Р.Усмановым, f – принимался за каналовый расход, а ω – за инфильтрация. В наших усовершенствованных моделях, в отличие от работ этих ученых, в качестве функциональных связей для расчета были взяты f – внешние факторы (дождь, снег, влажность и т. д.) и ω – были приняты в качестве функциональных связей для расчета испарения.

Таким образом, были получены функциональные зависимости для расчета испарения и внешние факторы (дождь, снег, влажность и т.д.).

Численное решение нелинейной системы уравнений параболического типа представляет собой одну из ключевых задач в области математического моделирования процессов фильтрации, а также движения грунтовых и напорных вод. Данное решение позволяет не только получить более точное и наглядное представление о реальных процессах, происходящих в грунте, но и предсказать их дальнейшее развитие и динамику с учетом различных внешних и внутренних факторов. В данной работе рассматриваются методы численного решения такой системы, а также проводим оценку их эффективности и применимости для решения практических задач гидрогеологии и инженерной геологии.

Рассматривается неустановившееся движение грунтовых и напорных вод в динамически связанной со слабопроницаемой перемычкой. Верхний слой представлен малопроницаемым безнапорным водоносным горизонтом, который включает в себя открытую систематическую горизонтальную дренажную систему, простирающуюся до границы со слабопроницаемой прослойкой. Данная прослойка имеющей мощностью m_2 и коэффициентом фильтрации k_2 , обеспечивая связь между безнапорным горизонтом и нижележащим напорным водоносным слоем, подстилаемым водоупорным основанием (Рис.3).

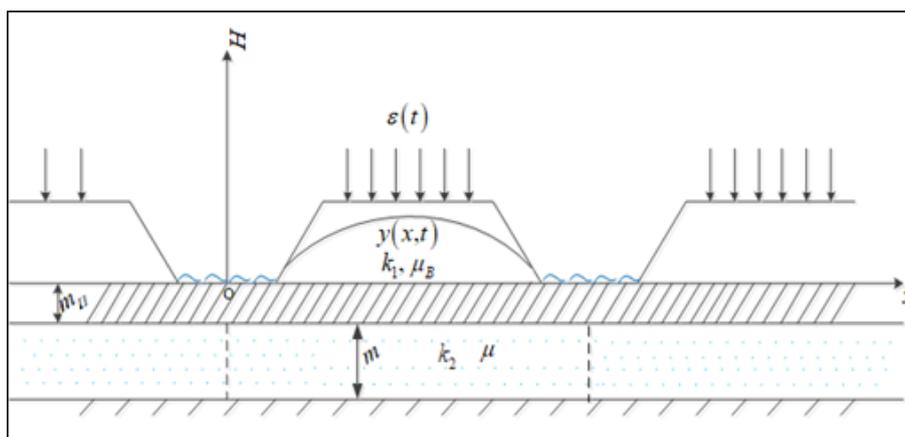


Рис. 3 Схема неустановившейся фильтрации к систематическому комбинированному дренажу в двухслойном грунте

2 Математическая модель

Математическая модель данной задачи при сделанных предположениях рассматриваемый фильтрационный процесс описывается следующей нелинейной системы

дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа:

$$\begin{cases} \mu_B \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_1(x)}{2} \frac{\partial H^2}{\partial x} \right) - k_{\Pi} \frac{H-h}{m_{\Pi}} \pm \varepsilon(t), \\ \mu \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T(x) \frac{\partial h}{\partial x} \right) + k_{\Pi} \frac{H-h}{m_{\Pi}}, \end{cases} \quad 0 < x < L, \quad t > 0. \quad (1)$$

Начальные и граничные условия будет имеет вид:

$$H(x, t_0) = H_0(x); \quad (2)$$

$$h(x, t_0) = h_0(x); \quad (3)$$

$$\begin{cases} -k_1 \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x=0} = \lambda \alpha (H - H_0), \quad x = 0, \quad t > 0; \\ k_1 \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x=L} = \lambda \alpha (H - H_0), \quad x = L, \quad t > 0; \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} -k_2 \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=0} = \lambda \alpha (h - h_0), \quad x = 0, \quad t > 0; \\ k_2 \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=L} = \lambda \alpha (h - h_0), \quad x = L, \quad t > 0. \end{cases} \quad (5)$$

Где, $T = k_2 m$.

Здесь

• $H(x, t)$, $h(x, t)$ – соответственно уровень грунтовых вод в верхнем безнапорном и напор в нижнем напорном слое;

- k_1, k_2 – коэффициентам фильтрации;
- μ – коэффициент упругой водоотдачи;
- μ_B – коэффициент свободной водоотдачи;
- m_{Π} – мощность плохопроницаемого слоя;
- m – мощность пласта;
- H_0, h_0 – начальный уровень грунтовых и напорных вод;
- k_{Π} – коэффициент фильтрации плохопроницаемого слоя;
- $\varepsilon(t)$ – интенсивность инфильтрационного питания;
- $\alpha = \begin{cases} 0, & \text{закреплен на границе,} \\ 1, & \text{не закреплен на границе;} \end{cases}$
- λ – параметр, приводящий к размерности.

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} f(t), & \text{при } t_1 \leq t \leq t_2, \\ \omega(t), & \text{при } t_2 < t \leq t_3. \end{cases}$$

Для численного решения данной краевой задачи мы делаем ее безразмерной:

$$h^* = h/H_x; \quad H^* = H/H_x; \quad x^* = x/L; \quad k_{\Pi}^* = k_{\Pi}/k_x; \quad k_1^* = k_1/k_x;$$

$$k_2^* = k_2/k_x; \quad m_{\Pi}^* = m_{\Pi}/L; \quad \tau = \frac{H_x k_x}{\mu L^2} t; \quad \lambda^* = \lambda \frac{L}{k_0}.$$

Производя эти замены в системе уравнений, приходим к следующей безразмерной системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_1(x)}{2} \frac{\partial H^2}{\partial x} \right) - \frac{k_{\Pi} L^2}{H_x} \frac{H-h}{m_{\Pi}} \pm \frac{L^2}{k_x H_x} \varepsilon; \\ \frac{\partial h}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T(x) \frac{\partial h}{\partial x} \right) + k_{\Pi} L^2 \frac{H-h}{m_{\Pi}}; \end{cases} \quad (6)$$

$$H(x, t_0) = H_0(x); \quad (7)$$

$$h(x, t_0) = h_0(x); \quad (8)$$

$$\begin{cases} -k_1 \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x=0} = \lambda \alpha (H - H_0), & x = 0, \quad t > 0; \\ k_1 \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x=1} = \lambda \alpha (H - H_0), & x = 1, \quad t > 0; \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} -k_2 \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=0} = \lambda \alpha (h - h_0), & x = 0, \quad t > 0; \\ k_2 \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=1} = \lambda \alpha (h - h_0), & x = 1, \quad t > 0. \end{cases} \quad (10)$$

3 Построение дискретной модели

Для численного решения безразмерной задачи (1)-(5), построим следующую сетку шагом Δx .

$$\omega_{\Delta x, \Delta \tau} = \{x = i \Delta x; \quad i = 0, 1, 2, \dots, N; \quad \tau = \eta \Delta \tau; \quad \eta = 0, 1, 2, \dots, N_t\}.$$

Здесь $\omega_{\Delta x, \Delta \tau}$ сетка дискретного поля; Δx – шаг по x оси; $\Delta \tau$ – шаг времени; N – количество точек.

Используя схемы переменных направлений для неявной схемы сводим дифференциальные уравнения к следующей системе конечно-разностных уравнений на l и $(l + 1)$ временном слое.

Одним из известных методов дискретизации системы уравнений параболического типа является метод конечных разностей. Применяя этот метод к краевой задаче, мы сводим систему дифференциальных уравнений к следующей системе конечно-разностных уравнений [9–11]

$$\begin{aligned} \frac{H_i - \hat{H}_i}{\Delta \tau} &= \frac{k_{1i-0.5} H_{i-1}^2 - (k_{1i-0.5} + k_{1i+0.5}) H_i^2 + k_{1i+0.5} H_{i+1}^2}{2\Delta x^2} - \frac{k_{\Pi} L^2}{H_x} \left(\frac{H_i - h_i}{m_{\Pi}} \right) \pm f; \\ \frac{h_i - \hat{h}_i}{\Delta \tau} &= \frac{T_{i-0.5} h_{i-1} - (T_{i-0.5} + T_{i+0.5}) h_i + T_{i+0.5} h_{i+1}}{\Delta x^2} + k_{\Pi} L^2 \left(\frac{H_i - h_i}{m_{\Pi}} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Здесь } f = \frac{L^2}{k_x H_x} \varepsilon.$$

Здесь первое уравнение системы нелинейное относительно искомых функций H , поэтому для решения применяется методика квазилинеаризации нелинейных членов. Согласно этому методу нелинейные члены разностного уравнения представляются в виде [3]:

$$\varphi(H) \cong \varphi(\tilde{H}) + (H - \tilde{H}) \frac{\partial \varphi(\tilde{H})}{\partial H}.$$

Здесь, \tilde{H} – приближенное значение функции H , которое уточняется в процессе итерации $\tilde{H}_i = H_i^{(s)}$, при этом $H_i^{(0)} = \hat{H}_i$.

Согласно квазилинейному методу нелинейные части уравнения можно записать в виде:

$$\begin{aligned} H_i^2 &= 2H_i \tilde{H}_i - \tilde{H}_i^2; \\ H_{i-1}^2 &= 2H_{i-1} \tilde{H}_{i-1} - \tilde{H}_{i-1}^2; \quad H_{i+1}^2 = 2H_{i+1} \tilde{H}_{i+1} - \tilde{H}_{i+1}^2. \end{aligned}$$

Используя эти соотношения в уравнениях, упрощаем их и получаем

$$\begin{aligned}
& \frac{\Delta x^2}{\Delta \tau} H_i - \frac{\Delta x^2}{\Delta \tau} \hat{H}_i = \frac{2k_{1i-0.5}}{2} H_{i-1} \tilde{H}_{i-1} - \\
& - \frac{k_{1i-0.5}}{2} \tilde{H}_{i-1}^2 - \frac{(k_{1i-0.5} + k_{1i+0.5})}{2} 4H_i \tilde{H}_i + \\
& + \frac{(k_{1i-0.5} + k_{1i+0.5})}{2} 2\tilde{H}_i^2 + \frac{k_{1i+0.5}}{2} 2H_{i+1} \tilde{H}_{i+1} - \\
& - \frac{k_{1i+0.5}}{2} \tilde{H}_{i+1}^2 - \frac{k_{ppp} L^2 \Delta x^2}{H_x m_{\Pi}} H_i + \frac{k_{\Pi} L^2 \Delta x^2}{H_x m_{\Pi}} h_i \pm f, \\
& T_{i-0.5} h_{i-1} - \left(T_{i-0.5} + T_{i+0.5} - \frac{\Delta x^2}{\Delta \tau} - \frac{\Delta x^2 k_{\Pi} L^2}{m_{\Pi}} \right) h_i + \\
& + T_{i+0.5} h_{i+1} + \frac{\Delta x^2 k_{\Pi} L^2}{m_{\Pi}} H_i = - \frac{\Delta x^2}{\Delta \tau} \hat{h}_i.
\end{aligned}$$

После упрощения этой системы уравнения, получим следующую систему уравнения где граничные условия аппроксимируется в следующем виде:

$$\begin{cases} (3k_0 - 2\Delta x \lambda \alpha) H_0 - 4k_1 H_1 + k_2 H_2 = -2\Delta x \lambda \alpha H, \\ a_i H_{i-1} - b_i H_i + c_i H_{i+1} - d_i h_i = -f_i, \\ (3k_n + 2\Delta x \lambda \alpha) H_n - 4k_{n-1} H_{n-1} + k_{n-2} H_{n-2} = 2\Delta x \lambda \alpha H, \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} (3k_0 - 2\Delta x \lambda \alpha) h_0 - 4k_1 h_1 + k_2 h_2 = -2\Delta x \lambda \alpha h, \\ a'_i h_{i-1} - b'_i h_i + c'_i h_{i+1} - d'_i H_i = -f'_i, \\ (3k_n + 2\Delta x \lambda \alpha) h_n - 4k_{n-1} h_{n-1} + k_{n-2} h_{n-2} = 2\Delta x \lambda \alpha h, \end{cases} \quad (12)$$

где, коэффициенты конечно-разностных уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned}
a_i &= k_{1i-0.5} \tilde{H}_{i+1}; \quad b_i = k_{1i-0.5} + k_{1i+0.5} \tilde{H}_i - \frac{\Delta x^2}{\Delta \tau} - \frac{k_{\Pi} L^2 \Delta x^2}{H_x m_{\Pi}}; \\
c_i &= k_{1i+0.5} \tilde{H}_{i+1}; \quad d_i = \frac{k_{\Pi} L^2 \Delta x^2}{H_x m_{\Pi}};
\end{aligned}$$

$$f_i = - \left(\frac{k_{1i-0.5}}{2} \tilde{H}_{i-1}^2 - (k_{1i-0.5} + k_{1i+0.5}) \tilde{H}_i^2 + \frac{k_{1i+0.5}}{2} \tilde{H}_{i+1}^2 - \frac{\Delta x^2}{\Delta \tau} \hat{H}_i^2 - \frac{L^2}{k_x} H_x f \right).$$

$$\begin{aligned}
a'_i &= T_{i-0.5}; \quad b'_i = T_{i-0.5} + T_{i+0.5} - \frac{\Delta x^2}{\Delta \tau} - \frac{\Delta x^2 k_{\Pi} L^2}{m_{\Pi}}; \\
c'_i &= T_{i+0.5}; \quad d'_i = \frac{\Delta x^2 k_{\Pi} L^2}{m_{\Pi}}; \quad f'_i = \frac{\Delta x^2}{\Delta \tau} \hat{h}_i.
\end{aligned}$$

Поставленную краевую задачу решаем методом конечных разностей для систем с применением квазилинеаризации для представления нелинейных членов. Тогда согласно методу прогонки, решение системы разностных уравнений (11) и (12) можно представить в виде [16–20]:

$$\begin{aligned}
H_i &= A_i H_{i+1} + B_i h_{i+1} + C_i, \\
h_i &= A'_i h_{i+1} + B'_i H_{i+1} + C'_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1.
\end{aligned} \quad (13)$$

Здесь прогоночные коэффициенты A_i, B_i, C_i и A'_i, B'_i, C'_i определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{c_i (b'_i - a'_i A'_{i-1})}{R_i}; & B_i &= \frac{c'_i (a_i B_{i-1} + d_i)}{R_i}; \\ A'_i &= \frac{(b_i - a_i A_{i-1}) c'_i}{R_i}; & B'_i &= \frac{c_i (a'_i B'_{i-1} + d'_i)}{R_i}; \\ C_i &= \frac{(a_i B_{i-1} + d_i) (a'_i C'_{i-1} + f'_i) + (a_i C_{i-1} + f_i) (b'_i - a'_i A'_{i-1})}{R_i}; \\ C'_i &= \frac{(a'_i B'_{i-1} + d'_i) (a_i C_{i-1} + f_i) + (a'_i C'_{i-1} + f'_i) (b_i - a_i A_{i-1})}{R_i}. \end{aligned}$$

Где,

$$R_i = (b_i - a_i A_{i-1}) (b'_i - a'_i A'_{i-1}) - (a_i B_{i-1} + d_i) (a'_i B'_{i-1} + d'_i), \\ i = 1, 2, \dots, N - 1.$$

Значения A_0, B_0, C_0 и A'_0, B'_0, C'_0 можно получить из левых разностных граничных условий (4) и (5)

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{(b_1 - 4c_1)}{a_1 - (3 - 2\Delta x \lambda \alpha) c_1}; & B_0 &= -\frac{d_1}{a_1 - (3 - 2\Delta x \lambda \alpha) c_1}; \\ C_0 &= \frac{f_1 + 2\Delta x \lambda \alpha c_1}{a_1 - (3 - 2\Delta x \lambda \alpha) c_1}; & A'_0 &= \frac{(b'_1 - 4c'_1)}{a'_1 - (3 - 2\Delta x \lambda \alpha) c'_1}; \\ B'_0 &= -\frac{d'_1}{a'_1 - (3 - 2\Delta x \lambda \alpha) c'_1}; & C'_0 &= \frac{f'_1 + 2\Delta x \lambda \alpha c'_1}{a'_1 - (3 - 2\Delta x \lambda \alpha) c'_1}. \end{aligned}$$

Используя формулы (11), (12) и (13) (при $i = n - 1$), правых разностных граничных условий (11) и (12) находим на правой части границы значение уровня грунтовых вод H_n и напорных вод h_n . После перестановки получим следующие системы уравнений относительно двух неизвестных H_n и h_n

$$\begin{aligned} &[(3a_{n-1} - c_{n-1}) - (4a_{n-1} - b_{n-1}) A_{n-1} - d_{n-1} B'_{n-1}] H_n + \\ &+ [(4a_{n-1} - b_{n-1}) B_{n-1} - d_{n-1} A'_{n-1}] h_n = \\ &= [d_{n-1} C'_{n-1} + f_{n-1} + (4a_{n-1} - b_{n-1})], \\ &[(3a'_{n-1} - c'_{n-1}) - (4a'_{n-1} - b'_{n-1}) A'_{n-1} - d'_{n-1} B_{n-1}] h_n + \\ &+ [(4a'_{n-1} - b'_{n-1}) B'_{n-1} - d'_{n-1} A_{n-1}] H_n = \\ &= [d'_{n-1} C_{n-1} + f_{n-1} - (4a'_{n-1} - b'_{n-1})]. \end{aligned}$$

Решая эти системы относительно по H_n и h_n , получим:

$$\begin{aligned} H_n &= (S_2 \cdot S'_3 - S_3 \cdot S'_1) / (S_1 \cdot S'_1 - S_2 \cdot S'_2); \\ h_n &= (S_3 \cdot S'_2 - S_1 \cdot S'_3) / (S_1 \cdot S'_1 - S_2 \cdot S'_2). \end{aligned}$$

где:

$$\begin{aligned} S_1 &= [(3a_{n-1} - c_{n-1}) - (4a_{n-1} - b_{n-1}) A_{n-1} - d_{n-1} B'_{n-1}]; \\ S_2 &= [-(4a_{n-1} - b_{n-1}) B_{n-1} - d_{n-1} A'_{n-1}]; \\ S_3 &= [f_{n-1} + d_{n-1} C'_{n-1} + (4a_{n-1} - b_{n-1}) C'_{n-1}]; \\ S'_1 &= [(3a'_{n-1} - c'_{n-1}) - (4a'_{n-1} - b'_{n-1}) A'_{n-1} - d'_{n-1} B_{n-1}]; \end{aligned}$$

$$S'_2 = \left[- (4a'_{n-1} - b'_{n-1}) B'_{n-1} - d'_{n-1} A_{n-1} \right];$$

$$S'_3 = \left[f'_{n-1} + d'_{n-1} C_{n-1} + (4a'_{n-1} - b'_{n-1}) C_{n-1} \right].$$

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не выполняются условия

$$\max \left| H_i^{(s)} - H_i^{(s-1)} \right| \leq \varepsilon.$$

Здесь ε – точность итерации, заранее известная малая величина; s – номер итерации.

В результате решения приведённых выше конечно-разностных уравнений был разработан алгоритм (рис.4), также на основе математической модели и алгоритма расчета разработано программное обеспечение.

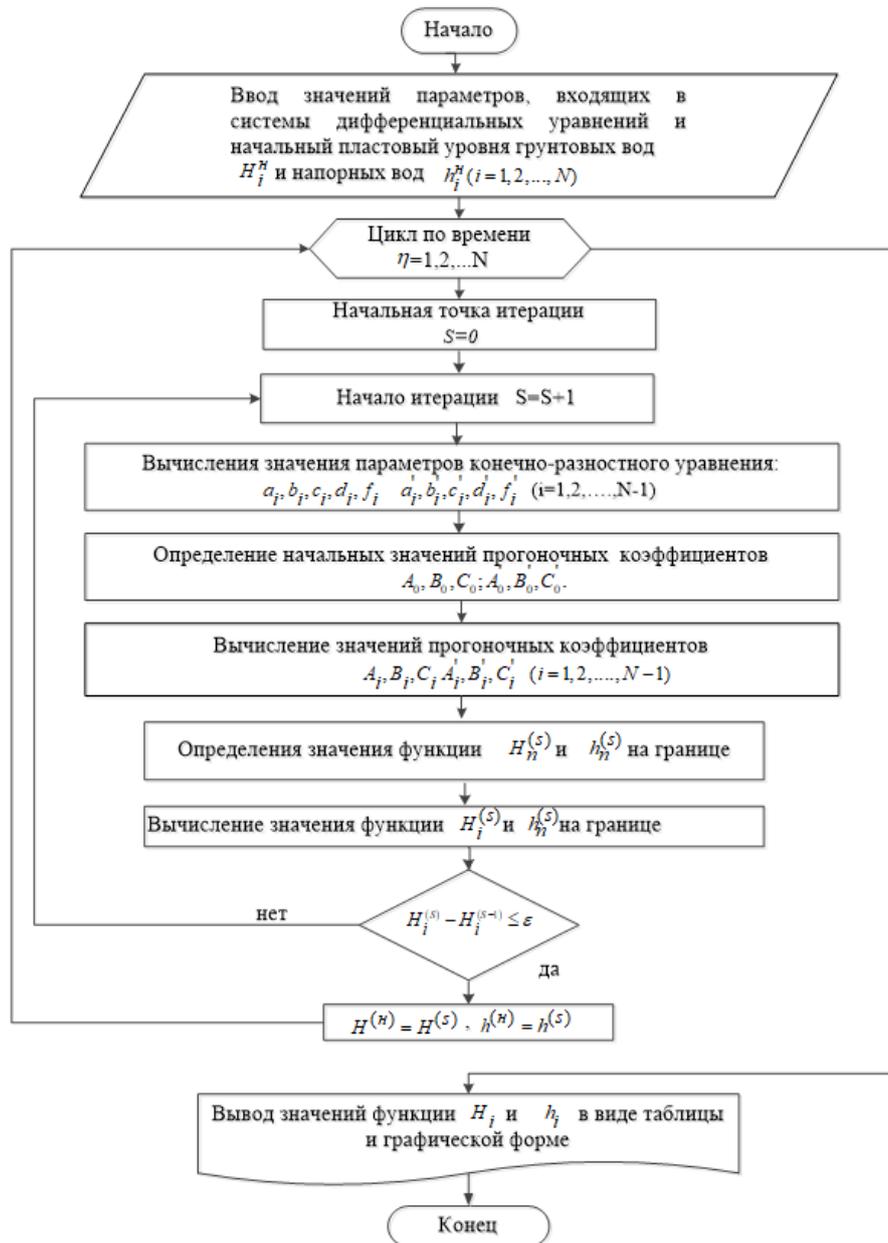


Рис. 4 Алгоритм численного решения задачи фильтрации напорных и безнапорных вод в пористой среде

С помощью программы реализуются различные гидрогеологические и мелиоративные прогнозные задачи для двухслойной модели водоносных пластов с учетом всех природных и искусственных факторов, влияющих на процесс фильтрации грунтовых и напорных вод. Результаты расчета представляются в графической форме.

4 Вычислительные эксперименты

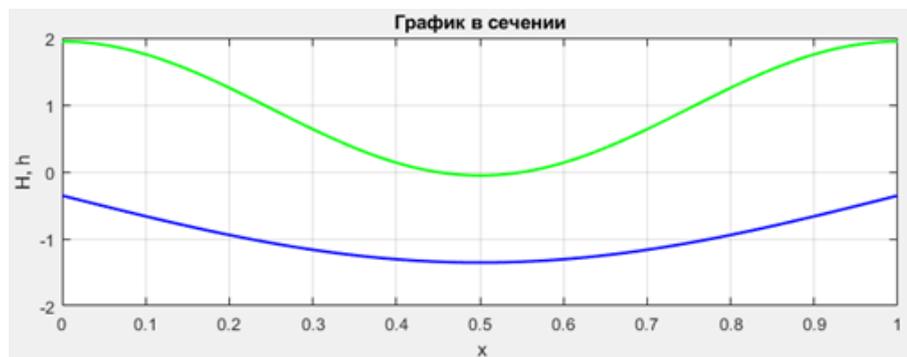


Рис. 5 Изменения уровня грунтовых (H) и напорных (h) вод

На графике (рис.5) представлена зависимость уровней грунтовых и напорных вод от координаты x при времени $t = 360$ суток. Верхняя линия отображает уровень грунтовых вод в период октябрь-декабрь, при котором максимальное значение $H = 2$ наблюдается на границах области $x = 0$ и $x = 1$ за счёт инфильтрации, а минимальное значение $H = 0$ отмечается в центральной части области $x = 0.5$, что связано испарением характерным для летнего периода июнь-август. Напорная вода $h(x)$ также увеличивается к границам области $x = 0, x = 1$ под воздействием внешних факторов, уровень достигает минимального значения $h = -1.2$. При этом её распределение симметрично относительно центральной части области примерно $x = 0.4, x = 0.6$ что показывает снижения напорных вод за счёт испарения.

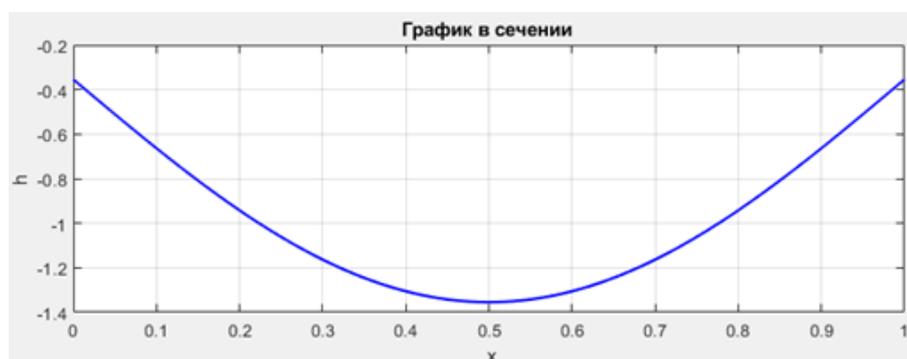


Рис. 6 Изменения уровня напорных (h) вод

График (рис.6) отображает распределение уровня напорных вод $h(x)$ вдоль пространственной координаты, демонстрирующее симметричное поведение, характерное для гидродинамических систем с равномерным давлением. Максимальные значения наблюдаются на границах области $x = 0$ и $x = 1$ уровень напорных вод достигает

примерно $h = -0.3$ что характерно в осенний-зимний период. В центральной части области при $x = 0.4, x = 0.5$ и $x = 0.6$ уровень напорных вод достигает минимального значения $h = -1.3$ за счёт испарения.

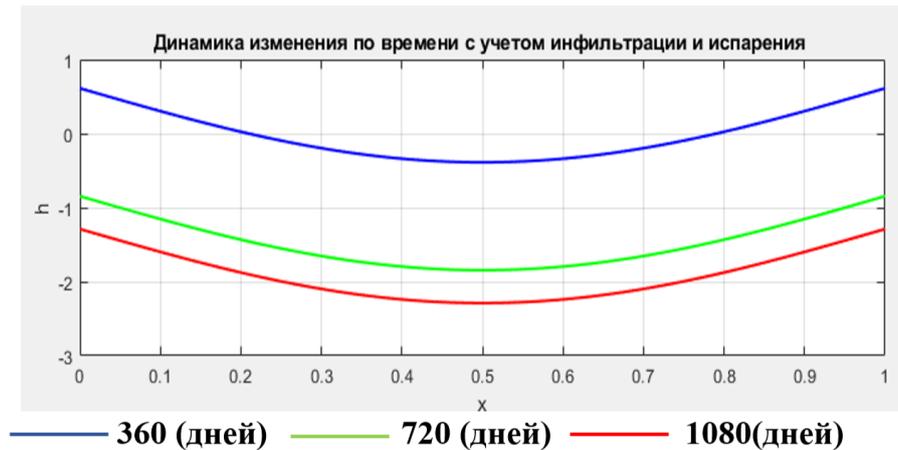


Рис. 7 Изменения уровня напорных вод с учётом инфильтрации и испарения

Динамика изменения по времени влияние инфильтрации f изменяется по закону $f = f_0 + \Delta f \cdot \sin(\omega t)$ где f_0 среднемесячное значение инфильтрации, также испарения $\omega = \omega_0 + \Delta \omega \cdot \sin(\omega t)$ и его годовая амплитуда (рис.7) Максимальное значение в начальный момент уровень $h(x)$ на границах области ($x = 0, x = 1$) примерно $h_{360} = 0.4, h_{720} = 0.8, h_{1080} = -1.3$ минимальное значение с течением времени снижается в центре ($x = 0.5$). Таким образом, изменение уровня h на графике связано с периодическими колебаниями инфильтрации и испарения во времени. Последняя линия h_{1080} соответствует более позднему времени, что указывает на испарения и уменьшение уровня грунтовых вод.

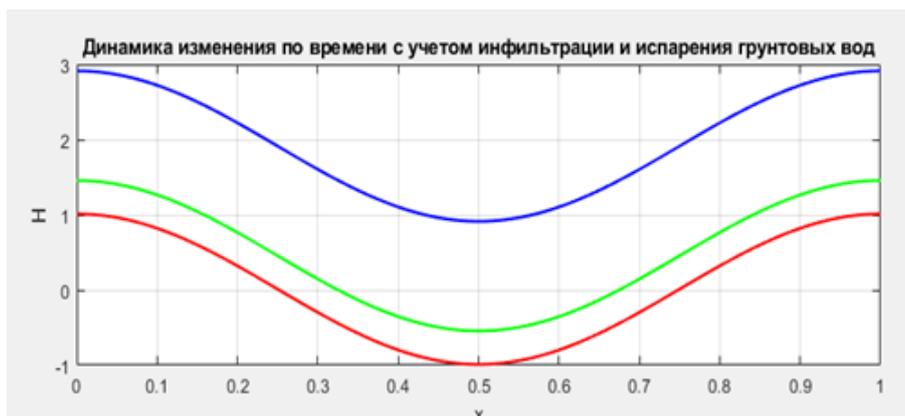


Рис. 8 Изменения уровня грунтовых вод с учётом инфильтрации и испарения

Максимальное значение (рис.8) в начальный момент времени уровень грунтовых вод максимален на границах области ($x = 0, x = 1$). Анализ первой кривой при $t = 360$ суток показывает, что уровень грунтовых вод повышается до $H = 3$, затем снижается

до $H = 1.2$ в центральной части области $x = 0.5$. Данные изменения обусловлены процессами инфильтрации и испарения.

На анализе второй $t = 720$ суток и третьей $t = 1080$ суток кривых отображается динамика изменения уровня грунтовых вод, при которой максимальные значения достигают $H = 1.5$, $H = 1$ а минимальные $H = 0.5$, $H = -1$ на границах области ($x = 0$ и $x = 1$).

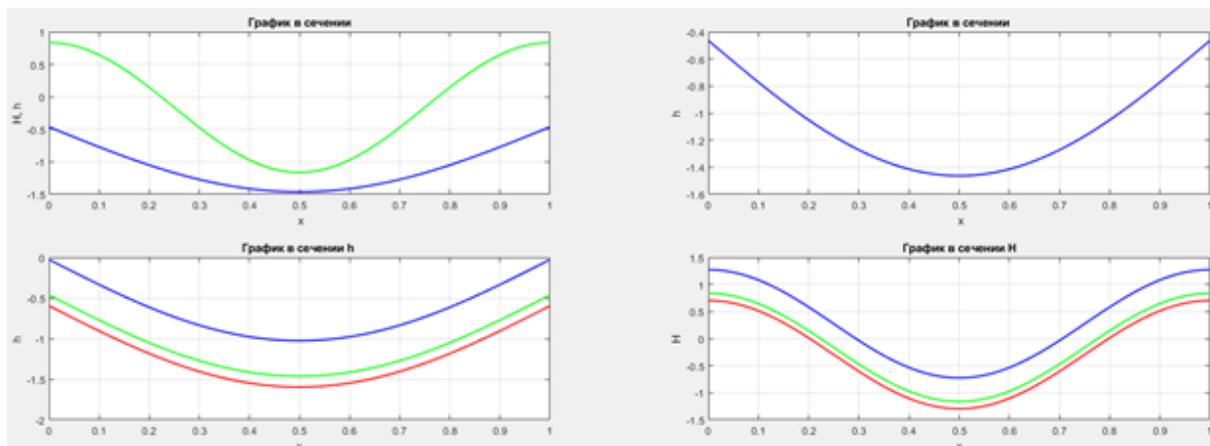


Рис. 9 Динамика изменения уровня грунтовых и напорных вод с учетом амплитуды изменения при

График (рис.9) демонстрирует симметричные изменения уровня грунтовых и напорных вод с учетом параметра $\varepsilon = 0.3$, который, определяет амплитуду колебаний уровня воды. Он отражает как пространственные, так и временные характеристики процесса, а также влияние инфильтрации и испарения на динамику уровней воды.

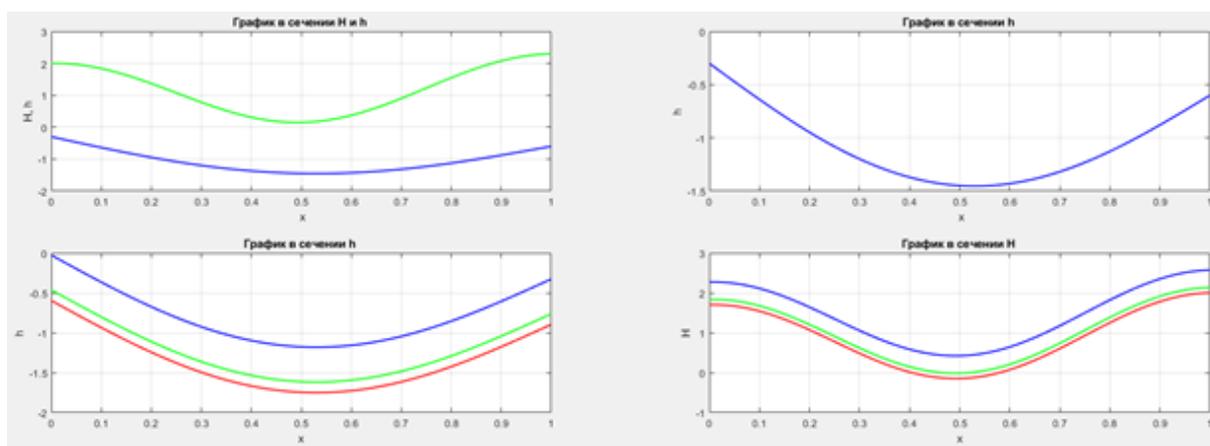


Рис. 10 Асимметричные изменения уровня грунтовых и напорных вод

На изображении (рис.10) представлены четыре графика отражающие асимметричное изменения уровня грунтовых и напорных в зависимости от времени. На графике H, h можно заметить, что на границах области $x = 0$ и $x = 1$ уровень грунтовых вод колеблется от $H = 2$ до $H = 2.3$, минимальное значение $H = 0.1$ наблюдается на границе области $x = 0.5$ что обусловлено процессами испарения. На графике в

сечении h уровень напорных вод достигает максимума примерно $H = 1$ и снижается к границе области $x = 1$ до $H = -0.7$, максимальное снижения $H = -1.4$ можно заметить примерно в центральной части области $x = 0.5$ и $x = 0.6$. График 3 и 4 отображает изменения уровня грунтовых и напорных вод в периоды $t = 360$, $t = 720$, $t = 1080$ суток. На графике можно заметить что в зимний и осенний периоды уровень воды достигает максимальных значений за счёт инфильтрации, а в летний период наблюдается снижение, обусловленное испарением.

5 Заключение

Анализ вычислительных экспериментов, представленных в работе по $t = 360$, $t = 720$, $t = 1080$ суткам позволил выявить основные закономерности изменения уровней грунтовых и напорных вод в пространственно-временном разрезе. Вычислительные эксперименты показали что распределение уровней грунтовых и напорных вод достигает максимальных значений на границах области ($x = 0$ и $x = 1$) в осенне-зимний период, а минимальное значение фокусируется в центральной части примерно $x = 0.5$ и $x = 0.6$ за счет испарения. Анализ полученных данных показал, что уровень грунтовых вод существенно изменяется под воздействием инфильтрации и испарения, особенно в регионах с резкими сезонными изменениями климатических условий. Проведенные вычисления позволяют прогнозировать изменение уровней воды в зависимости от различных параметров, что может быть полезным для инженерных решений в области водоснабжения, ирригации и мелиорации.

Разработанная математическая модель, основанная на системе нелинейных дифференциальных уравнений, позволяет учитывать ключевые факторы, влияющие на динамику движения грунтовых и напорных вод в пористых средах.

Разработанные численные подходы и алгоритмы могут быть использованы в дальнейшем для решения широкого класса задач, связанных с управлением водными ресурсами и экологическим мониторингом гидрологических процессов.

Литература

- [1] *Троянский М.С.* Компьютерное моделирование фильтрации подземных вод. Экономика, Статистика и информатика М: . – 2012. – №3. – С. 175–178.
- [2] *Egamberdiev Kh., Khidirova N., Juraev D., Ebrahim E.* Elsayed Numerical solution of groundwater modeling for mountains regions of Uzbekistan. Discover Water.25 . – 2024. – Vol.4. – 111 p. DOI:10.1007/s43832-024-00159-w 10.1007/s43832-024-00159-w
- [3] *Мусин Р.Х., Храменков М.Г.* Введение в численное моделирование геофильтрации: учебно-методическое пособие Казань: Изд-во Казан. ун-та, – 2019. – 41 с.
- [4] *Абуталиев Ф.Б., Баклушин М.Б., Ербеков Я.С., Исмаилов Н.Н., Умаров У., Ходжибаев Н.Н.* Анализ динамики подземных вод аналитическими и численными методами. – Ташкент: Фан, – 1975. – 152 с.
- [5] *Климентов П.П., Кононов М.М.* Динамика подземных вод. «Высш. школа», – 1973. – 440 с.
- [6] *Абуталиев Ф.Б. и др.* Применение численных методов на ЭВМ в гидрогеологии. Ташкент, “Фан”, – 1976. – 67 с.
- [7] *Абуталиев Ф.Б.* Решение задач нестационарной фильтрации. Численные и аналитические методы Ташкент, Фан – 1972. – 207 с.
- [8] *Абуталиев Ф.Б., Баклушин М.Б., Ербеков Я.С., Умаров У.У.* Эффективные приближенно-аналитические методы для решения задач теории фильтрации. - Ташкент: ФАН, – 1978. – 244 с.

- [9] Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений Редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», – 1978. – 591 с.
- [10] Кусковский В.С., Кашеваров А.А., Рыбакова С.Т. Оценка запасов подземных вод инфильтрационного водозабора математическое моделирование. Издательство СР РАН – 2004. – 156 с.
- [11] Баклушин М.Б. Тулаганов З.Ш. Приближенно-аналитические методы решения некоторых задач математической физики. Ташкент: Университет, – 1986. – 44 с.
- [12] Бегматов А., Белова Г.П., Шульгин Д.Ф. Расчет неустановившейся фильтрации при работе конечного числа закрытых горизонтальных дрен Изв. РАН. Сер. Механика жидкости и газа, – 1979. – №1. – С. 165–170.
- [13] Веригин Н.Н., Василев С.В., Куранов Н.П., Саркисян В.С., Шульгин Д.Ф. Методы прогноза солевого режима грунтов и грунтовых вод/ Под ред. Н.Н. Веригина М.: Колос, – 1979. – 336 с.
- [14] Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. М.: Наука, – 1997. – 316 с.
- [15] Serikova E., Strelnikova E.A. Изучение особенностей изменения уровня грунтовых вод с помощью математического моделирования. Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины ул. Дм. Пожарского, 2/10, г. Харьков, Украина, – 2013. – С. 30–35.
- [16] Звенков А.В. Системы дифференциальных уравнений и элементы теории устойчивости: Учебник Екатеринбург: УГТУ-УПИ, – 2010. – 54 с.
- [17] Равшанов. Н., Далмиев Ш.К. Математическое моделирование изменения уровней подземных вод и концентраций соли в двухслойных средах. Проблемы вычислительной и прикладной математики Учредители: Научно-инновационный центр информационно-коммуникационных технологий – 2021. – №2(32). – С. 94–116.
- [18] Nazirova E.Sh., Nematov A., Nabiyev I.M., Shukurova M.E. Construction of a numerical model and algorithm for solving two-dimensional problems of filtration of multicomponent liquids, taking into account the moving "oil-water" interface. E3S Web of Conferences 402, 14040 (2023) TransSiberia – 2023. – Vol.402–19. DOI: 10.1051/e3sconf/202340214040
- [19] Джуманов Ж.Х., Казбеков Ж.Х., Чертков Ю.Т., Базаров Д. К вопросу математического моделирования процессов взаимосвязи поверхностных и подземных вод Вестник аграрной науки Узбекистана –Ташкент, – 2002. – № 3. – С. 47–50.
- [20] Кошелева Е.Д., Кошелев К.Б. Численное моделирование совместного движения поверхностных и подземных вод в системе поддержки принятия решений Вестник Алтайского государственного аграрного университета. – 2005. – № 3(19). – С. 12–16.

Поступила в редакцию 09.05.2025

UDC 512:519.6

NUMERICAL SOLUTION OF THE NONLINEAR GROUNDWATER AND PRESSURIZED WATER FILTRATION PROBLEM

¹Nazirova E., ^{2*}Karabaeva Kh.A.

*karabaeva.84@inbox.ru

¹Tashkent University of Information Technologies,
108, Amir Temur str., Tashkent, 100200 Uzbekistan;

²Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute,

17A, Buz-2, Tashkent, 100125 Uzbekistan.

This article discusses the numerical modeling of the problem of nonlinear groundwater filtration taking into account evaporation and infiltration. Particular attention is paid to the influence of nonlinear effects on the distribution and dynamics of filtration flows in porous media. A mathematical model based on a system of nonlinear differential equations describing the process of water filtration in soil has been developed. Numerical methods, including difference schemes and iterative algorithms, ensuring the stability and convergence of calculations, have been applied to solve the problem. Numerical modeling of various conditions describing the dynamics of groundwater has been performed taking into account changing humidity and the impact of external factors. An algorithm developed on the basis of a finite-difference solution of a system of equations for groundwater filtration in a two-layer model of aquifers is presented. The algorithm is implemented as software designed to solve various hydrogeological and melioration problems of forecasting. The program takes into account the influence of both natural and artificial factors on the process of filtration of ground and pressure waters. The calculation results are visualized in graphical form.

Keywords: mathematical model, numerical modeling, groundwater, filtration, infiltration, evaporation, finite difference method.

Citation: Nazirova E., Karabaeva Kh.A. 2025. Numerical solution of the nonlinear groundwater and pressurized water filtration problem. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 3(67): 37-52.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.3_67.2025.04.

HISOBLASH VA AMALIY
МАТЕМАТИКА
MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL
AND APPLIED MATHEMATICS



ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 3(67) 2025

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Азамов А.А., Арипов М.М., Шадиметов Х.М.

Ответственный секретарь:

Ахмедов Д.Д.

Редакционный совет:

Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Арушанов М.Л., Бурнашев В.Ф.,
Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия), Игнатъев Н.А.,
Ильин В.П. (Россия), Иманкулов Т.С. (Казахстан), Исмагилов И.И. (Россия),
Кабанихин С.И. (Россия), Карачик В.В. (Россия), Курбонов Н.М., Маматов Н.С.,
Мирзаев Н.М., Мухамадиев А.Ш., Назирова Э.Ш., Нормуродов Ч.Б.,
Нуралиев Ф.М., Опанасенко В.Н. (Украина), Расулмухамедов М.М., Расулов А.С.,
Садуллаева Ш.А., Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А.,
Хамдамов Р.Х., Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Чье Ен Ун (Россия),
Шабозов М.Ш. (Таджикистан), Dimov I. (Болгария), Li Y. (США),
Mascagni M. (США), Min A. (Германия), Singh D. (Южная Корея),
Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

Дизайн и вёрстка:

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 30.06.2025 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №5. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 3(67) 2025

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

Editor-in-Chief:

Ravshanov N.

Deputy Editors:

Azamov A.A., Aripov M.M., Shadimetov Kh.M.

Executive Secretary:

Akhmedov D.D.

Editorial Council:

Aloev R.D., Amirgaliev E.N. (Kazakhstan), Arushanov M.L., Burnashev V.F.,
Zagrebina S.A. (Russia), Zadorin A.I. (Russia), Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia),
Imankulov T.S. (Kazakhstan), Ismagilov I.I. (Russia), Kabanikhin S.I. (Russia),
Karachik V.V. (Russia), Kurbonov N.M., Mamatov N.S.,
Mirzaev N.M., Mukhamadiev A.Sh., Nazirova E.Sh., Normurodov Ch.B., Nuraliev F.M.,
Opanasenko V.N. (Ukraine), Rasulov A.S., Sadullaeva Sh.A., Starovoitov V.V. (Belarus),
Khayotov A.R., Khaldjigitov A., Khamdamov R.Kh., Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh.,
Chye En Un (Russia), Shabozov M.Sh. (Tajikistan), Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA),
Mascagni M. (USA), Min A. (Germany), Singh D. (South Korea), Singh M. (South
Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the
Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.

The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.

Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

Address:

100125, Tashkent, Buz-2, 17A.

Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

E-mail: journals@airi.uz.

Web-site: <https://journals.airi.uz>.

Layout design:

Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.

Signed for print 30.06.2025

Format 60x84 1/8. Order No. 5. Print run of 100 copies.

Содержание

<i>Хужсайёров Б., Джиьянов Т.О., Эшдавлатов З.З.</i> Перенос вещества в элементе трещиновато-пористой среды с учетом эффекта памяти	5
<i>Муминов У.Р.</i> Вырожденные отображения Лотки-Вольтерры и соответствующие им биграфы как дискретная модель эволюции взаимодействия двух вирусов	15
<i>Хужсайёров Б.Х., Зокиров М.С.</i> Аномальная фильтрация жидкости в плоско-радиальной однородной пористой среде	28
<i>Назирова Э.Ш., Карабаева Х.А.</i> Численное решение нелинейной задачи фильтрации грунтовых и напорных вод	37
<i>Нормуродов Ч.Б., Тиловов М.А., Нормуродов Д.Ч.</i> Численное моделирование динамики амплитуды функции тока для плоского течения Пуазейля	53
<i>Абдуллаева Г.Ш.</i> Построение алгебраически-гиперболического сплайна естественного натяжения восьмого порядка	67
<i>Алов Р.Д., Бердышев А.С., Нематова Д.Э.</i> Численное исследование устойчивости по Ляпунову противопоточной разностной схемы для квазилинейной гиперболической системы	83
<i>Болтаев А.К., Пардаева О.Ф.</i> Об одной интерполяции функции натуральными сплайнами	97
<i>Хаётов А.Р., Нафасов А.Ю.</i> Оптимальная интерполяционная формула с производной в гильбертовом пространстве	107
<i>Шадиметов М.Х., Азамов С.С., Кобылов Х.М.</i> Оптимизация приближённых формул интегрирования для классов периодических функций	116
<i>Игнатъев Н.А., Тоштулатов А.О.</i> О проблемах поиска выбросов в задаче с одним классом	125
<i>Юлдашев С.У.</i> Тонкая настройка AlexNet для классификации форм крыш в Узбекистане: подход с использованием трансферного обучения	133

Contents

<i>Khuzhayorov B., Dzhiyanov T.O., Eshdavlatov Z.Z.</i>	
Anomalous solute transport in an element of a fractured-porous medium with memory effects	5
<i>Muminov U.R.</i>	
Degenerate Lotka-Volterra mappings and their corresponding bigraphs as a discrete model of the evolution of the interaction of two viruses	15
<i>Khuzhayorov B.Kh., Zokirov M.S.</i>	
Anomalous filtration of liquid in a plane-radial homogeneous porous medium	28
<i>Nazirova E., Karabaeva Kh.A.</i>	
Numerical solution of the nonlinear groundwater and pressurized water filtration problem	37
<i>Normurodov Ch.B., Tilovov M.A., Normurodov D.Ch.</i>	
Numerical modeling of the amplitude dynamics of the stream function for plane Poiseuille flow	53
<i>Abdullaeva G.Sh.</i>	
Construction of an algebraic-hyperbolic natural tension spline of eighth order	67
<i>Aloev R.D., Berdishev A.S., Nematova D.E.</i>	
Numerical study of Lyapunov stability of an upwind difference scheme for a quasilinear hyperbolic system	83
<i>Boltaev A.K, Pardaeva O.F.</i>	
On an interpolation of a function by natural splines	97
<i>Hayotov A.R., Nafasov A.Y.</i>	
On an optimal interpolation formula with derivative in a Hilbert space	107
<i>Shadimetov M.Kh, Azamov S.S, Kobilov H.M.</i>	
Optimization of approximate integration formulas for periodic function classes	116
<i>Ignatiev N.A., Toshpulatov A.O.</i>	
About problems with finding outliers in a single-class problem	125
<i>Yuldashev S.U.</i>	
Fine-tuned AlexNet for roof shape classification in Uzbekistan: a transfer learning approach	133