

УДК 532.546

АНОМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКО-РАДИАЛЬНОЙ ОДНОРОДНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

^{1,2*} *Хужаёров Б.Х., ¹Зокиров М.С.*

*b.khuzhayorov@mail.ru

¹Самаркандский государственный университет,
ул. 140100, Узбекистан, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15;²Институт математики имени В.И. Романовского АН РУз,
100174, Узбекистан, Ташкент, ул. Университетская, 9А.

В работе рассматривается задача аномальной фильтрации однородной жидкости в плоско - радиальной постановке. Процесс фильтрации моделировался дифференциальным уравнением с дробными производными по времени относительно давления. Данное дифференциальное уравнение выведено на основе дробно-релаксационного закона Дарси, где учитываются релаксационные эффекты как по скорости фильтрации, как и по градиенту давления. Дробные производные определены в смысле Капуто, что является предпочтительным по сравнению с другими определениями дробных производных, например Римана-Лиувилля, Грюндвальда-Летникова и др. Задача решена численно методом конечных разностей. Интегральное представление дробной производной Капуто дискретизировано с использованием известных квадратурных формул. Определены профили давления при различных значениях порядка дробной производной по времени как относительно давления, так и скорости фильтрации и оценено влияние аномальности процесса на характеристики фильтрации. Установлено влияние изменения порядков дробных производных на распределение давления в различные моменты времени. Оценено также влияние времен релаксации по градиенту давления и скорости фильтрации на распределение давления в среде в различные моменты времени. Проведен сравнительный анализ влияния порядков дробных производных и релаксационных времен в законе Дарси на распределение давления в среде.

Ключевые слова: аномальная фильтрация, время релаксации, давление, дробная производная, метод конечных разностей, пористая среда.

Цитирование: *Хужаёров Б.Х., Зокиров М.С.* Аномальная фильтрация жидкости в плоско-радиальной однородной пористой среде // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2025. – № 3(67). – С. 28-36.

DOI: https://doi.org/10.71310/psam.3_67.2025.03.

1 Введение

Учет эффектов памяти при нестационарной фильтрации жидкости в пористой среде привели к созданию теории релаксационной фильтрации, первое наиболее полное изложение которой, по-видимому, содержится в известной работе [1].

В [2] представлена модифицированная математическая модель на основе памяти для описания течения жидкости в пористых средах. Для реализации модели использовалась численная схема дискретизации.

В [3] рассматриваются неограниченные естественно трещиноватые коллекторы, предлагается пространственный дробный закон Дарси, в котором производная по

пространственной координате заменяется дробной производной Вейля, а также учитывается дробная производная Капуто по времени.

Математическая модель радиального потока грунтовых вод к скважине или из скважины была изучена с использованием дробной производной по времени с ядром Миттаг-Лефлер [4]. Влияние порядка дробных производных на радиальный поток грунтовых вод было проанализировано с помощью численных расчетов.

Использование классической теории фильтрации однородных жидкостей при упругом режиме на основе закона Дарси иногда приводит к расхождению с реальными данными [1]. Несоответствия мы можем наблюдать особенно при сильных нестационарных режимах фильтрации, при фильтрации высоковязкой нефти, при фильтрации в суглинистых малопроницаемых породах и т.д. В этих условиях обычно нарушается равновесный характер закона Дарси [5]. [1, 5] проведен учет релаксационных явлений в законе Дарси при фильтрации в пористых средах. На основе этих исследований установлено влияние параметров релаксации на характеристики фильтрации, такие как скорость фильтрации, давление и т.д.

В настоящее время процессы аномальной фильтрации жидкости в пористых средах с фрактальной структурой моделируются с использованием дробных производных [6].

В данной работе рассматривается обобщенная релаксационная дробно-дифференциальная модель фильтрации однородной жидкости в плоскорадиальной пористой среде. Выведено уравнение релаксационной фильтрации на основе уравнения неразрывности и закон Дарси. Поставлена и численно решена задача фильтрации для этого уравнения. Оценено влияние релаксационных параметров на поле давления.

2 Постановка задачи

Область фильтрации показана на рис.1. Фильтрация жидкости происходит

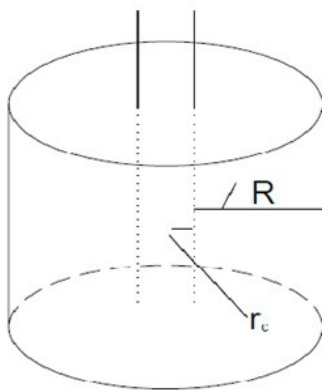


Рис. 1 Область фильтрации.

в радиальном направлении в сторону центра области. В центре находится скважина радиуса r_c . Внешний контур области имеет радиус R . Учитывая круговую симметрию считается, что показатели фильтрации не зависят от угловой координаты, а зависят от радиальной координаты r и времени t . Закон фильтрации в радиальном случае с учетом релаксации по скорости фильтрации и градиента давления с использованием дробных производных в скалярной форме записывается в виде

$$v + \lambda_v D_t^\beta v = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial}{\partial r} (p + \lambda_p D_t^\alpha p), \quad (1)$$

где λ_v, λ_p – времена релаксации скорости фильтрации v и давления p , k – проницаемость среды, μ – вязкость жидкости, r – координата, D_t^β, D_t^α – операторы дробной производной в смысле Капуто [6] по времени t порядка β и α , соответственно.

Заметим, что времена релаксации λ_v и λ_p в (1) имеют дробную размерность $[\lambda_p] = c^\alpha$, $[\lambda_v] = c^\beta$, соответственно.

Аналогично [7] на основе (1) выведено уравнение пьезопроводности

$$\frac{\partial}{\partial t} (p + \lambda_p D_t^\beta p) = \varkappa \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r \frac{\partial}{\partial r} (p + \lambda_v D_t^\alpha p)], \quad (2)$$

где $\varkappa = \frac{k}{\mu \cdot \beta^*}$ – коэффициент пьезопроводности.

Пусть в начальный момент времени в области было постоянное давление p_k . Начиная с $t > 0$ в скважине устанавливается постоянное давление p_c . На контуре пласта $R = r$ поддерживается первоначальное давление p_k , что соответствует режиму работы открытого пласта, где за счет притока жидкости извне давление поддерживается на постоянном уровне.

При отмеченных условиях начальные и граничные условия принимаются в следующем виде

$$p(0, r) = p_k, \quad D_t^\beta p(0, r) = 0, \quad (3)$$

$$p(t, r_c) = p_c, \quad p(t, R) = p_k, \quad (4)$$

$p_k, p_c = const$.

Уравнение (2) решается при условиях (3), (4).

3 Численное решение задачи

В области $\Omega = r_c \leq r \leq R, 0 \leq t \leq T$ введем равномерную сетку $\Omega = (t_j, r_i), r = r_c + i \cdot h, i = \overline{0, N}, h = R/N, t_j = j \cdot \tau, j = \overline{0, M}, \tau = T/M$, где h – шаг сетки по координате r , τ – шаг сетки по времени. Сеточную функцию в точке (t_j, r_i) обозначим через p_i^j .

Разностная аппроксимация уравнения (2) имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{p_i^{j+1} - p_i^j}{\tau} + \frac{\lambda_v \tau^{2-\beta}}{\Gamma(3-\beta)} \cdot \sum_{k=0}^{j-2} \frac{p_i^{k+1} - 2p_i^k + p_i^{k-1}}{\tau^2} \cdot \\ & \cdot \frac{\lambda_v \tau^{2-\beta}}{\Gamma(3-\beta)} (((j-k+1)^{2-\beta} - (k-1)^{2-\beta}) + \frac{p_i^{j+1} - 2p_i^j + p_i^{j-1}}{\tau^2}) = \\ & = \varkappa \cdot \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{r_{i+0.5} \cdot p_{i+1}^{j+1} - (r_{i+0.5} + r_{i-0.5}) \cdot p_i^{j+1} + r_{i-0.5} \cdot p_{i-1}^{j+1}}{h^2} \right) + \\ & + \varkappa \cdot \frac{\lambda_p}{r \cdot h^2} \cdot \left(\frac{\tau^{1-\alpha} \cdot r_{i+0.5} \cdot S_1}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{\tau^{1-\alpha} \cdot r_{i+0.5}}{\Gamma(2-\alpha)} \cdot \frac{p_{i+1}^{j+1} - p_{i+1}^j}{\tau} \right) - \\ & - \varkappa \cdot \frac{\lambda_p}{r \cdot h^2} \cdot \left(\frac{\tau^{1-\alpha} \cdot (r_{i+0.5} + r_{i-0.5}) \cdot S_2}{\Gamma(2-\alpha)} - \frac{\tau^{1-\alpha} \cdot (r_{i+0.5} + r_{i-0.5})}{\Gamma(2-\alpha)} \cdot \frac{p_i^{j+1} - p_i^j}{\tau} \right) + \\ & + \varkappa \cdot \frac{\lambda_p}{r \cdot h^2} \cdot \left(\frac{\tau^{1-\alpha} \cdot r_{i-0.5} \cdot S_3}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{\tau^{1-\alpha} \cdot r_{i-0.5}}{\Gamma(2-\alpha)} \cdot \frac{p_{i-1}^{j+1} - p_{i-1}^j}{\tau} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{k=0}^{j-2} \frac{p_{i+1}^{k+1} - p_{i+1}^k}{\tau} \cdot ((j-k+1)^{1-\alpha} - (j-k)^{1-\alpha}), \\
S_2 &= \sum_{k=0}^{j-2} \frac{p_i^{k+1} - p_i^k}{\tau} \cdot ((j-k+1)^{1-\alpha} - (j-k)^{1-\alpha}), \\
S_3 &= \sum_{k=0}^{j-2} \frac{p_{i-1}^{k+1} - p_{i-1}^k}{\tau} \cdot ((j-k+1)^{1-\alpha} - (j-k)^{1-\alpha}), \\
S_4 &= \sum_{k=0}^{j-2} \frac{p_i^{k+1} - 2p_i^k + p_i^{k-1}}{\tau^2} \cdot ((j-k+1)^{2-\beta} - (j-k-1)^{2-\beta}), \\
r_{i+0.5} &= \frac{r_{i+1} + r_i}{2}, \quad r_{i-0.5} = \frac{r_i + r_{i-1}}{2}, \quad r_i = (i-1) \cdot h, \\
k_v &= \frac{\lambda_v}{\Gamma(3-\beta) \cdot \tau^\beta}, \quad k_p = \frac{\lambda_p}{\Gamma(3-\beta) \cdot \tau^\beta \cdot h^2}, \\
r_1 &= \frac{2 \cdot i \cdot h - h}{2}, \quad r_0 = \frac{2 \cdot i \cdot h - 3 \cdot h}{2},
\end{aligned}$$

где $\Gamma(\cdot)$ - гамма функция.

Разностная схема (5) приведена к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$A \cdot p_{i+1}^{j-1} - B \cdot p_{i+1}^j + C \cdot p_{i+1}^{j+1} = -F_i^j, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{0, M-1}, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned}
A &= \varkappa \cdot \frac{(\frac{r_0}{h^2} + k_p \cdot r_0)}{(i-1) \cdot h}, \\
B &= \varkappa \cdot \frac{(\frac{r_0+r_1}{h^2} + k_p \cdot (r_0 + r_1))}{(i-1) \cdot h} + k_v + \frac{1}{\tau}, \\
C &= \varkappa \cdot \frac{(\frac{r_1}{h^2} + k_p \cdot r_1)}{(i-1) \cdot h}, \\
F_i^j &= \frac{p_i^j}{\tau} - k_v \cdot S_4 + 2 \cdot k_v \cdot p_i^j - k_v \cdot p_i^{j-1} + \frac{\varkappa \cdot k_p \cdot r_1 \cdot S_1}{(i-1) \cdot h} - \frac{\varkappa \cdot k_p \cdot r_1 \cdot p_{i+1}^j}{(i-1) \cdot h} - \\
&\quad - \frac{\varkappa \cdot k_p \cdot (r_1 + r_0) \cdot S_2}{(i-1) \cdot h} + \frac{\varkappa \cdot k_p \cdot (r_1 + r_0) \cdot p_i^j}{(i-1) \cdot h} + \frac{\varkappa \cdot k_p \cdot r_0 \cdot S_3}{(i-1) \cdot h} - \frac{\varkappa \cdot k_p \cdot r_0 \cdot p_{i-1}^j}{(i-1) \cdot h}.
\end{aligned}$$

Систему (6) решаем методом прогонки при известных A, B, C и F_i^j , для чего решение представится в виде

$$p_i^{j+1} = \eta_{i+1} \cdot p_{i+1}^{j+1} + \mu_{i+1}, \quad i = \overline{0, N-1}, \quad j = \overline{0, M-1}.$$

Для прогоначных коэффициентов получены следующие рекуррентные формулы

$$\eta_{i+1} = \frac{C}{B - A \cdot \eta_i}, \quad \mu_{i+1} = \frac{A \cdot \mu_i + F_i^j}{B - A \cdot \eta_i}, \quad i = \overline{0, N-1}, \quad j = \overline{0, M-1}.$$

Из граничного условия имеем

$$p_0^{j+1} = \eta_1 \cdot p_1^{j+1} + \mu_1,$$

откуда $\eta_1 = 0$, $\mu_1 = p_c$.

При аппроксимации дробных производных в (5) использована методология [7, 8].

4 Результаты

На основе численного решения задачи проанализировано влияние λ_p , λ_v , α и β на распределение давления в пласте. В качестве исходных параметров принято $k = 10^{-13} \text{м}^2$, $\mu = 10^{-2} \text{Па} \cdot \text{с}$, $p_k = 20 \text{МПа}$, $p_1 = 15 \text{МПа}$, $\beta^* = 3 \cdot 10^{-10} \text{Па}^{-1}$, $r_c = 0.1 \text{м}$, $R = 40 \text{м}$.

Сначала рассмотрим уменьшение порядка производной β от 1. Некоторые результаты показаны на рис.2. Как видно из рис.2, уменьшение порядка производной β от 1 приводит к замедлению распространения поля давления в области. При $\beta = 0.7$ и 0.5 профили давления находится выше, чем соответствующее распределение для $\beta = 1.0$ (рис.2). Таким образом, с уменьшением β от 1 понижение давления в среде имеет отстающий характер. Уменьшение же α от 1 действует противоположно, т.е. наблюдается прогрессивное понижение давления с уменьшением α (рис.3). Следовательно, с уменьшением α от 1 зона понижения давления охватывает более широкую область в среде.

Анализировалась также роль изменения релаксационных параметров λ_p , и λ_v , на распределение давления при фиксированных значениях α и β (рис.4, 5). При этом установлено, что влияние увеличения λ_v на распределение давления аналогично случаю уменьшения β от 1. (Рис.4) Следовательно, можно утверждать, что увеличение λ_v и уменьшение β на распределение давления действуют одинаково. Увеличение значений λ_p приводит к более интенсивному понижению давления в среде (рис.5). В этом отношении действие увеличения λ_p аналогично действию α при уменьшении его значения. Как и влияние λ_v и β , здесь можно говорить об одинаковом влиянии уменьшения α и увеличения λ_p .

Развитие распределения давления с увеличением времени t показано на рис.6. С увеличением t уменьшение p прогрессирует и зона его распределения расширяется.

Некоторые результаты при нулевом значении одного из релаксационных параметров λ_p , и λ_v показаны на рис.7. При этом влияние параметров α и β остается таким же, как в общем случае $\lambda_p \neq 0$, и $\lambda_v \neq 0$. Сравнивая рис.2 и рис.7 можно утверждать, что при $\lambda_p = 0$ влияние β на распределение давления проявляется более ярко. При $\lambda_p = 0$ (рис.7) зона распространения p значительно сокращается по сравнению с случаем $\lambda_p \neq 0$ (рис.2). Так, при $\beta = 1$ профиль давления в момент $t = 3600 \text{с}$ достигает приблизительно $\sim 22 - 23$, при $\beta = 0.7 - \sim 13 - 12$, при $\beta = 0.5 - \sim 9 - 10$. Это вполне согласуется с проявлением конечной скорости распространения возмущения давления в среде при уменьшении β и увеличении λ_v .

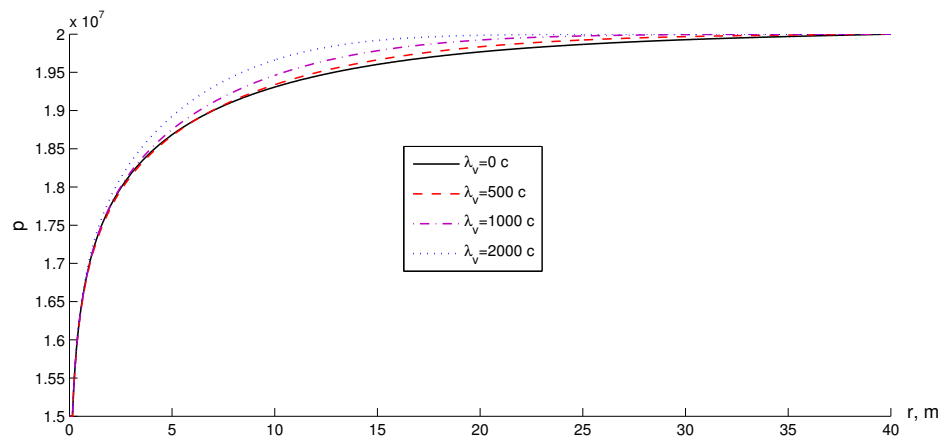


Рис. 2 Профили давления при различных β при $t = 3600c$, $\lambda_v = 1000c^\beta$, $\lambda_p = 500c^\alpha$, $\alpha = 0.7$.

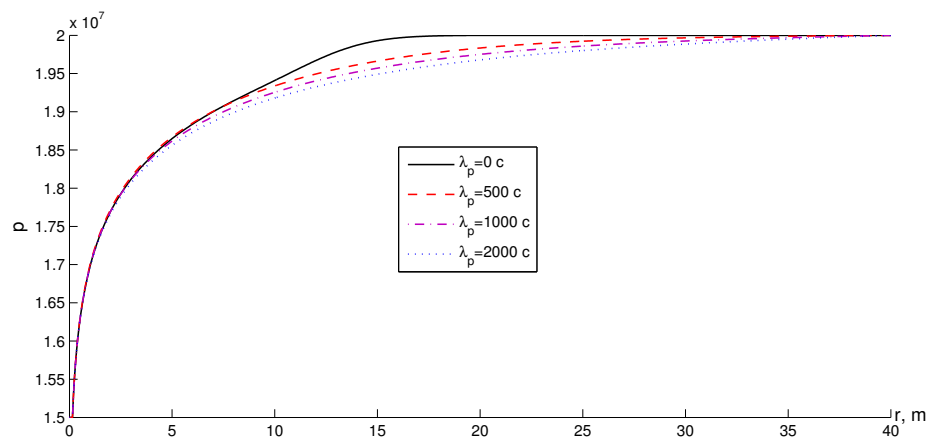


Рис. 3 Профили давления при различных α при $t = 3600c$, $\lambda_v = 1000c^\beta$, $\lambda_p = 500c^\alpha$, $\beta = 0.7$.

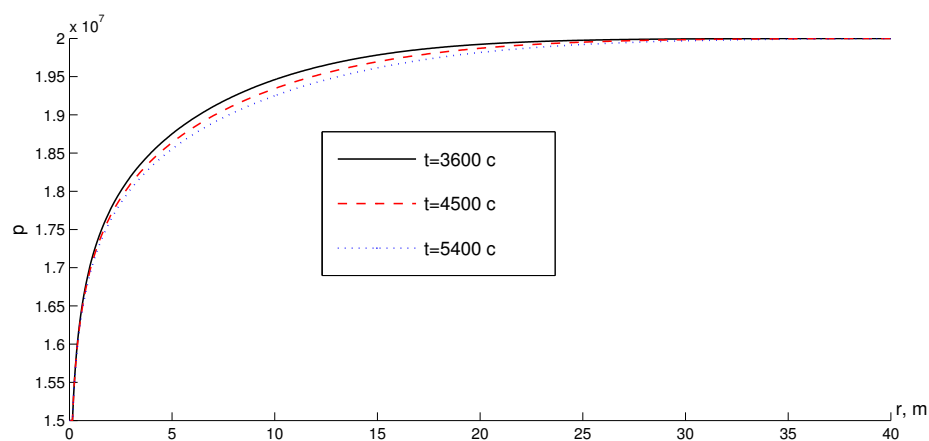


Рис. 4 Профили давления при $t = 3600c$, $\lambda_p = 500c^\alpha$, $\alpha = 0.7$, $\beta = 0.7$ и различных λ_v .

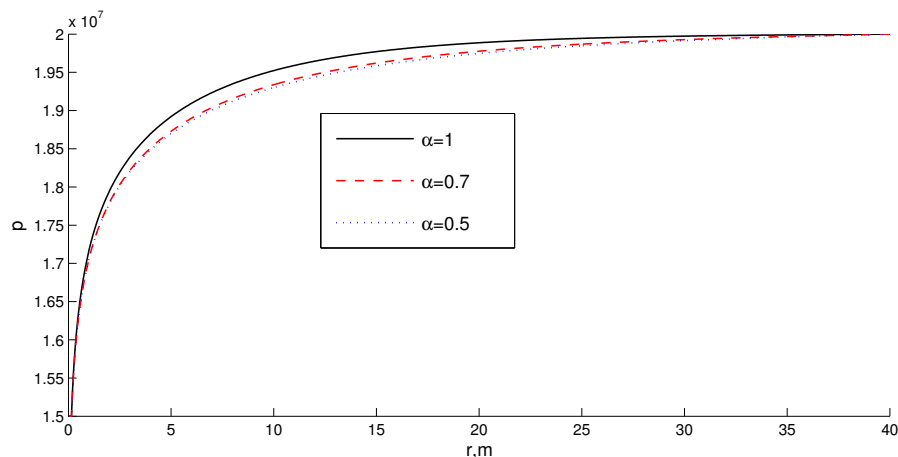


Рис. 5 Профили давления при $t = 3600c$, $\lambda_v = 500c^\beta$, $\alpha = 0.7$, $\beta = 0.7$ и различных λ_p .

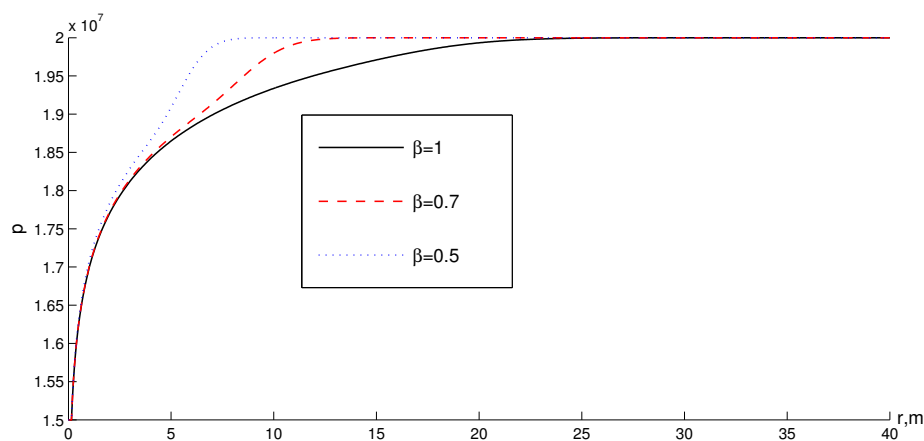


Рис. 6 Профили давления при $\lambda_v = 1000c^\beta$, $\lambda_p = 1000c^\alpha$, $\alpha = 0.7$, $\beta = 0.7$ в различные моменты времени.

5 Заключение

Численно решена задача аномальной фильтрации однородной жидкости в плоско-радиальной пористой среде. Показано, что уменьшение порядка производной в релаксационном члене по скорости фильтрации приводит к замедлению развития поля давления и скорости фильтрации. Уменьшение порядка производной в релаксационном члене закона фильтрации по градиенту давления, наоборот, приводит к интенсификации развития полей давления. Результаты показывают, что порядки производных в дробно – релаксационном законе Дарси по своей физической сущности имеют те же свойства, как и времена релаксации λ_p и λ_v . Следовательно, дробно - релаксационный закон Дарси имеет более широкие возможности для описания неравновесных явлений при фильтрации жидкости в пористых средах.

Литература

- [1] Молокович Ю.М., Непримеров Н.И., Пикуза В.И., Штанин А.В. Релаксационная фильтрация. — Казань: Изд-во Казан. ун-та. — 1980. — 136 с.
- [2] Abiola D. Obembea., M. Enamul Hossain., Kassem Mustaphac., Sidqi A. Abu-Khamsina. A modified memory-based mathematical model describing fluid flow in porous media

- Computers and Mathematics with Applications. – 2017. – Vol.73. – Issue 6. – P. 1385–1402. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2016.11.022>.
- [3] *Fernando Alcantara-Lopez., Carlos Fuentes., Rodolfo G., Camacho-Velazquez., Fernando Brambila-Paz., Carlos Chavez.* Spatial Fractional Darcy's Law on the Diffusion Equation with a Fractional Time Derivative in Single-Porosity Naturally Fractured Reservoirs Energies. – 2022. – Vol. 15. – No. 13. – 4837 p. doi: <http://dx.doi.org/10.3390/en15134837>.
- [4] *Nehad Ali Shah, Abdul Rauf, Dumitru Vieru, Kanokwan Sitthithakerngkiet, Poom Kumam.* Analytical Solutions of the Diffusion-Wave Equation of Groundwater Flow with Distributed-Order of Atangana- Baleanu Fractional Derivative Appl. Sci. – 2021. – Vol. 11. – No. 9. – 4142 p. doi: <http://dx.doi.org/10.3390/app11094142>.
- [5] *Молокович Ю.М., Осипов П.П.* Основы теории релаксационной фильтрации — КГУ, Казань. – 1987.
- [6] *Caputo M.* Models of flux in porous media with memory. Water Resources Research. – 2000. – Vol. 36. – №3. – P. 693–705.
- [7] *Khuzhayorov B., Djiyanov T.O., Zokirov M.S.* Generalized relaxation fractional differential model of fluid filtration in a porous medium International Journal of Applied Mathematics. – 2024. – Vol. 37. – No 1. – P. 119–132. doi: <http://dx.doi.org/10.12732/ijam.v37i1.10>.
- [8] *Makhmudov J.M., Usmonov A.I., Kuljanov J.B.* Solution of the Anomalous Filtration Problem in Two Dimensional Porous Media APAMCS, – 2022. – P. 68–80. doi: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-031-34127-4_7.

Поступила в редакцию 21.05.2025

UDC 532.546

ANOMALOUS FILTRATION OF LIQUID IN A PLANE-RADIAL HOMOGENEOUS POROUS MEDIUM

^{1,2*} *Khuzhayorov B.Kh.*, ¹ *Zokirov M.S.*

*b.khuzhayorov@mail.ru

¹Samarkand State University,

15, University Boulevard, Samarkand 140104, Uzbekistan;

²V.I. Ramanovskiy Institute of Mathematics AS RUz,

9A, Universitetskaya St., Tashkent 100174, Uzbekistan.

The paper considers the radial problem of anomalous filtration of a homogeneous liquid in a plane-radial formulation. The filtration process was modeled by a differential equation with fractional derivatives with respect to time and pressure. This differential equation was derived on the basis of Darcy's fractional relaxation law, which takes into account relaxation effects both in the filtration velocity and in the pressure gradient. Fractional derivatives are defined in the Caputo sense, which is preferable to other definitions of fractional derivatives, such as Riemann-Liouville, Grunwald-Letnikov, etc. The problem is solved numerically by the finite difference method. The integral representation of the fractional Caputo derivative is discretized using known quadrature formulas. The pressure profiles are determined for different values of the order of the fractional derivative with respect to time both with respect to pressure and filtration velocity, and the effect of process anomaly on the filtration characteristics is estimated. The effect of changing the orders of fractional derivatives on the pressure distribution at different

moments in time is established. The effect of relaxation times for the pressure gradient and filtration velocity on the pressure distribution in the medium at different moments in time is also estimated. A comparative analysis of the effect of the orders of fractional derivatives and relaxation times in Darcy's law on the pressure distribution in the medium is carried out.

Keywords: anomalous filtration, fractional derivative, finite difference method, porous media, pressure, relaxation time.

Citation: Khuzhayorov B.Kh., Zokirov M.S. 2025. Anomalous filtration of liquid in a plane-radial homogeneous porous medium. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 3(67):28-36.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.3_67.2025.03.

HISOBLASH VA AMALIY MATEMATIKA MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL
AND APPLIED MATHEMATICS



ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 3(67) 2025

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Азамов А.А., Арипов М.М., Шадиметов Х.М.

Ответственный секретарь:

Ахмедов Д.Д.

Редакционный совет:

Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Арушанов М.Л., Бурнашев В.Ф.,
Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия), Игнатьев Н.А.,
Ильин В.П. (Россия), Иманкулов Т.С. (Казахстан), Исмагилов И.И. (Россия),
Кабанихин С.И. (Россия), Карачик В.В. (Россия), Курбонов Н.М., Маматов Н.С.,
Мирзаев Н.М., Мухамадиев А.Ш., Назирова Э.Ш., Нормуродов Ч.Б.,
Нуралиев Ф.М., Опанасенко В.Н. (Украина), Расулмухамедов М.М., Расулов А.С.,
Садуллаева Ш.А., Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А.,
Хамдамов Р.Х., Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Чье Ен Ун (Россия),
Шабозов М.Ш. (Таджикистан), Dimov I. (Болгария), Li Y. (США),
Mascagni M. (США), Min A. (Германия), Singh D. (Южная Корея),
Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

Дизайн и вёрстка:

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 30.06.2025 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №5. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 3(67) 2025

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

Editor-in-Chief:

Ravshanov N.

Deputy Editors:

Azamov A.A., Aripov M.M., Shadimetov Kh.M.

Executive Secretary:

Akhmedov D.D.

Editorial Council:

Aloev R.D., Amirgaliev E.N. (Kazakhstan), Arushanov M.L., Burnashev V.F.,
Zagrebina S.A. (Russia), Zadorin A.I. (Russia), Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia),
Imankulov T.S. (Kazakhstan), Ismagilov I.I. (Russia), Kabanikhin S.I. (Russia),
Karachik V.V. (Russia), Kurbonov N.M., Mamatov N.S.,
Mirzaev N.M., Mukhamadiev A.Sh., Nazirova E.Sh., Normurodov Ch.B., Nuraliev F.M.,
Opanasenko V.N. (Ukraine), Rasulov A.S., Sadullaeva Sh.A., Starovoitov V.V. (Belarus),
Khayotov A.R., Khaldjigitov A., Khamdamov R.Kh., Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh.,
Chye En Un (Russia), Shabozov M.Sh. (Tajikistan), Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA),
Mascagni M. (USA), Min A. (Germany), Singh D. (South Korea), Singh M. (South
Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the
Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.

The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.

Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

Address:

100125, Tashkent, Buz-2, 17A.

Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

E-mail: journals@airi.uz.

Web-site: <https://journals.airi.uz>.

Layout design:

Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.

Signed for print 30.06.2025

Format 60x84 1/8. Order No. 5. Print run of 100 copies.

Содержание

Хужсайёров Б., Джиёнов Т.О., Эшдавлатов З.З.

Перенос вещества в элементе трещиновато-пористой среды с учетом эффекта памяти 5

Муминов У.Р.

Вырожденные отображения Лотки-Вольтерры и соответствующие им биграфы как дискретная модель эволюции взаимодействия двух вирусов 15

Хужсайёров Б.Х., Зокиров М.С.

Аномальная фильтрация жидкости в плоско-радиальной однородной пористой среде 28

Назирова Э.Ш., Карабаева Х.А.

Численное решение нелинейной задачи фильтрации грунтовых и напорных вод 37

Нормуродов Ч.Б., Тиловов М.А., Нормуродов Д.Ч.

Численное моделирование динамики амплитуды функции тока для плоского течения Пуазейля 53

Абдуллаева Г.Ш.

Построение алгебраически-гиперболического сплайна естественного натяжения восьмого порядка 67

Алоев Р.Д., Бердышев А.С., Нематова Д.Э.

Численное исследование устойчивости по Ляпунову противопоточной разностной схемы для квазилинейной гиперболической системы 83

Болтаев А.К., Пардаева О.Ф.

Об одной интерполяции функции натуральными сплайнами 97

Хаётов А.Р., Нафасов А.Ю.

Оптимальная интерполяционная формула с производной в гильбертовом пространстве 107

Шадиметов М.Х., Азамов С.С., Кобылов Х.М.

Оптимизация приближённых формул интегрирования для классов периодических функций 116

Игнатъев Н.А., Тошпулатов А.О.

О проблемах поиска выбросов в задаче с одним классом 125

Юлдашев С.У.

Тонкая настройка AlexNet для классификации форм крыш в Узбекистане: подход с использованием трансферного обучения 133

Contents

Khuzhayorov B., Dzhiyanov T.O., Eshdavlatov Z.Z.

Anomalous solute transport in an element of a fractured-porous medium with memory effects 5

Muminov U.R.

Degenerate Lotka-Volterra mappings and their corresponding bigraphs as a discrete model of the evolution of the interaction of two viruses 15

Khuzhayorov B.Kh., Zokirov M.S.

Anomalous filtration of liquid in a plane-radial homogeneous porous medium . . 28

Nazirova E., Karabaeva Kh.A.

Numerical solution of the nonlinear groundwater and pressurized water filtration problem 37

Normurodov Ch.B., Tilovov M.A., Normurodov D.Ch.

Numerical modeling of the amplitude dynamics of the stream function for plane Poiseuille flow 53

Abdullaeva G.Sh.

Construction of an algebraic-hyperbolic natural tension spline of eighth order . . 67

Aloev R.D., Berdishev A.S., Nematova D.E.

Numerical study of Lyapunov stability of an upwind difference scheme for a quasilinear hyperbolic system 83

Boltaev A.K., Pardaeva O.F.

On an interpolation of a function by natural splines 97

Hayotov A.R., Nafasov A.Y.

On an optimal interpolation formula with derivative in a Hilbert space 107

Shadimetov M.Kh., Azamov S.S., Kobilov H.M.

Optimization of approximate integration formulas for periodic function classes . 116

Ignatiev N.A., Toshpulatov A.O.

About problems with finding outliers in a single-class problem 125

Yuldashev S.U.

Fine-tuned AlexNet for roof shape classification in Uzbekistan: a transfer learning approach 133