

УДК 519.624.3

ДИСКРЕТНЫЙ ВАРИАНТ МЕТОДА ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ЧИСЛЕННОМУ РИШЕНИЮ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ

**Нормуродов Ч.Б., Шакаева Э.Э., Зиякулова Ш.А.*

**ch.normurodov@gmail.com*

Термезский государственный университет,
190111 Узбекистан, Термиз, ул. Баркамол авлод, дом 43.

В данной статье неоднородное сингулярно возмущенное уравнение четвертого порядка численно моделируется дискретным вариантом метода предварительного интегрирования. В предлагаемом методе в качестве базисных функций используются полиномы Чебышева первого рода. Старшей производной дифференциального уравнения разлагается в конечный ряд по этим полиномам с неизвестными коэффициентами разложения. Все низкие производные и решение дифференциального уравнения представляются в виде выбранного разложения. Затем найденные ряды ставятся в дифференциальное уравнение и получается система дискретных уравнений. Для полиномов Чебышева имеется дискретная формула интегрирования, которая понижает порядок производной. С применением этой формулы дискретная система четырехкратно интегрируется и получается система алгебраических уравнений, число уравнений в которых меньше чем число неизвестных коэффициентов. Недостающие уравнения получаются из краевых условий задачи. Операция интегрирования улучшают гладкость аппроксимирующих полиномов, например, полином нулевого порядка при четырехкратном интегрировании превращается в полином четвертого порядка. Проведенные численные расчёты показывают высокую точность и эффективность применяемого метода в значительно малых значениях параметра ε .

Ключевые слова: полиномы Чебышева, дискретный вариант, предварительное интегрирование, высокая точность, малый параметр.

Цитирование: Нормуродов Ч.Б., Шакаева Э.Э., Зиякулова Ш.А. Дискретный вариант метода предварительного интегрирования и его применение к численному решению сингулярно возмущенного уравнения // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2025. – № 2(64). – С. 74-86.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.2_64.2025.07.

1 Введение

Вычислительные применения полиномов и рядов Чебышева приведены в [1]. Весовая функция фильтра Колмогорова-Винера для непрерывных фрактальных процессов с функцией структуры, обладающей степенным законом исследована [2]. Эффективный метод численного решения некоторых краевых и начальных задач изложен в [3]. Используя операционную матрицу, полученную из многочленов Чебышева первого рода, построено алгебраическое эквивалентное представление задачи. Проведен анализ сходимости и оценка погрешности предложенного метода, метод применён для решения инженерной задачи, связанной с балкой на упругом основании.

Преобразование конечных степенных рядов в виде ряда по сдвинутым многочленам Чебышева первого рода изложено в [4]. Возможные направления обобщений

ранее найденных связей между многочленами Чебышева и числами Каталана, возникающими при изучении коммутирующих разностных операторов предложены в [5]. Сформулированы гипотезы о связи между основной теоремой Абеля и коммутирующими полубесконечными матрицами. Полиномы Чебышева широко применяются при численном моделировании различных задач прикладной математики. Многочлены Чебышева и их основные свойства обсуждаются в [6]. В этой работе полиномы применены для получения явных решений уравнения второго порядка в множестве действительных чисел.

В статье [7] метод Галеркина используется для решения интегро-дифференциальных уравнений Вольтерры с помощью базисной функции многочленов Чебышева. Авторы утверждают, эффективность и надёжность применяемого метода. В работе [8] представлен алгоритм для получения приближённых решений различных известных уравнений типа Лейна-Эмдена. Авторы утверждают, что предложенный метод значительно проще по сравнению с любыми другими методами для решения задачи начального значения. Рассмотренные в этой работе примеры показывают отличное совпадение между точными и приближёнными решениями. Чебышевские многочлены уже давно используются для аппроксимации экспериментальных данных при решении различных технических задач. В рамках исследования [9] анализирована динамика акций восьми чешских предприятий с использованием разложения по многочленам Чебышева. Было установлено, что анализ динамики акций во времени с использованием многочленов Чебышева является более эффективным в случаях, когда их динамика не соответствует закону нормального распределения. Предложенная модель имеет важное значение для анализа динамики портфеля акций без расчета дисперсии и корреляции.

Большинство проблем, связанных с физическими, биологическими и инженерными системами, являются сложными и обычно моделируются с использованием как линейных, так и нелинейных дифференциальных уравнений [10]. В этой статье обыкновенные дифференциальные уравнения моделируются как задачи оптимизации для нахождения приближенных решений с учетом многочленов Чебышёва в качестве базовой функции аппроксимации, принимая начальные и/или граничные условия как ограничения. В исследовании [11] выявлены связи между функцией Ломмеля и полиномами Чебышева первого рода. В исследовании [12] численно решается задача о временной дробной задаче Кортевега-де Фриза-Бюргерса. Подход основан на методе коллокации с использованием сдвинутых многочленов Чебышева первого рода. Приведены численные примеры, демонстрирующие точность и эффективность предложенного подхода.

В монографии [13] изложено спектрально-сеточный метод с полинома Чебышева первого рода для численного моделирования проблемы гидродинамической устойчивости для однофазных и двухфазных потоков. Численное решение неоднородного сингулярно возмущенного уравнения второго порядка спектральным методом изложено в [14], где в качестве базисных функций использованы полиномы Чебышева второго рода. Применение непрерывного варианта метода предварительного интегрирования для численного моделирования неоднородного сингулярно возмущенного уравнения четвертого порядка является объектом исследования в [15]. В статье [16] дискретный вариант метода предварительного интегрирования применён к численному решению эллиптических уравнений. Показано, высокая точность к эффективности предлагаемого метода. Сходимость непрерывного варианта метода предварительного интегрирования при решении нелинейного обыкновенного дифференциаль-

ного уравнения четвертого порядка с малым параметром при старшей производной изложена в [17]. Эффективный численный метод основанный на непрерывном варианте метода предварительного интегрирования для решения сингулярно возмущенного уравнения приведён в [18].

2 Постановка задачи

Пусть требуется численное решение сингулярно возмущенного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка

$$\varepsilon \frac{d^4 u}{dy^4} - 2 \frac{d^2 u}{dy^2} + u(y) = f(y), \quad y \in (-1, 1), \quad (1)$$

со следующими краевыми условиями

$$u(\pm 1) = \frac{du}{dy}(\pm 1) = 0, \quad (2)$$

Где ε – малый параметр. Для численного решения задачи (1)-(2) применяем дискретный вариант метода предварительного интегрирования. Для исследования сходимости и порядка точности применяемого метода воспользуемся методом пробных функций. Суть данного метода заключается в следующем. Выбирается некоторая функция $u(y)$, она может быть выбрана произвольно, но так, чтобы выполнялись условия сопряжения в точке разрыва. Подставляя ее в дифференциальное уравнение (1), находится правая часть

$$f(y) = \varepsilon \frac{d^4 u}{dy^4} - 2 \frac{d^2 u}{dy^2} + u(y),$$

и требуются удовлетворения соответствующих краевых условий (2). В качестве пробной функции для задачи (1)-(2) выбираем функцию

$$u_e(y) = (1 - y^2)^2 e^{\varepsilon y}, \quad u_e = u_{exact}. \quad (3)$$

Данная функция удовлетворяет краевым условиям (2). Для функции (3), правая часть уравнения (1) имеет вид:

$$f(y) = ((\varepsilon^5 - 2\varepsilon^2 + 1)y^4 + (16\varepsilon^4 - 16\varepsilon)y^3 + (72\varepsilon^3 - 2\varepsilon^5 + 4\varepsilon^2 - 26)y^2 + (96\varepsilon^2 - 16\varepsilon^4 + 16\varepsilon)y + \varepsilon^5 - 24\varepsilon^3 - 2\varepsilon^2 + 9)e^{\varepsilon y}. \quad (4)$$

3 Метод решения

Для численного решения поставленной задачи применяем дискретный вариант метода предварительного интегрирования. Основная идея данного метода заключается в следующем. Старшая производная и правая часть уравнения (1) ищется в виде конечных рядов по полиномам Чебышева первого рода с неизвестными коэффициентами. До решения дифференциальной задачи (1)-(2) искомый ряд для приближенного решения предварительно четырехкратно “интегрируется” с применением дискретной формуле предназначенную для понижения порядка производной. Главным достоинством данного подхода заключается в том, что при интегрирование конечно-го ряда Чебышева гладкость аппроксимирующих полиномов улучшаются. Например, полином нулевого порядка превращается в полином четвертого порядка и так далее.

А это свою очередь, положительно влияет на точность расчётов. Краевые условия задачи за счет выбора соответствующих уравнений для неизвестных коэффициентов удовлетворяются точно. Таким образом, дискретный вариант метода предварительного интегрирования позволяет найти приближенное решение задачи с достаточно высокой точностью при умеренных значениях малого параметра. В коллокационных узлах полиномов Чебышева сравниваются пробная функция (точное решение) поставленной задачи с приближенным решением полученным дискретным вариантом метода предварительного интегрирования.

Изложим алгоритм предлагаемого метода. Четвертая производная и правую часть уравнения (1) представим в виде следующих рядов:

$$\frac{d^4 u_a}{dy^4} = \sum_{i=0}^N 'a_i^{(4y)} T_i(y), f(y) = \sum_{i=0}^N 'b_i T_i(y), \quad (5)$$

где через u_a обозначено приближенное решения задачи

$$u_a = u_{approximate}.$$

$T_i(y)$ - полином Чебышева i -го порядка, штрих над суммой означает, что коэффициенты рядов a_i берутся со множителем, когда $i = 0$, a_i, b_i — неизвестные коэффициенты разложения.

Ряд (5) для приближенного решения четырёхкратно интегрируем и находим все низкие производные, а также приближенное решение задачи в виде конечных рядов по полиномам Чебышева первого рода:

$$\begin{aligned} \frac{d^3 u_a}{dy^3} &= \sum_{i=0}^N 'a_i^{(3y)} T_i(y), \quad \frac{d^2 u_a}{dy^2} = \sum_{i=0}^N 'a_i^{(2y)} T_i(y), \\ \frac{du_a}{dy} &= \sum_{i=0}^N 'a_i^{(y)} T_i(y), \quad u_a(y) = \sum_{i=0}^N 'a_i T_i(y), \end{aligned} \quad (6)$$

Далее, подставляя ряды (5) и необходимые ряды из (6) в дифференциальное уравнение (1), имеем

$$\varepsilon \sum_{i=0}^N 'a_i^{(4y)} T_i(y) - 2 \sum_{i=0}^N 'a_i^{(2y)} T_i(y) + \sum_{i=0}^N 'a_i T_i(y) = \sum_{i=0}^N 'b_i T_i(y).$$

Затем, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях полиномов, получаем алгебраическую систему следующего вида

$$\varepsilon a_i^{(4y)} - 2a_i^{(2y)} + a_i = b_i, \quad i = 4, 5, \dots, N. \quad (7)$$

Для полиномов Чебышева первого рода имеется следующая дискретная формула предварительного интегрирования, которая понижает порядок производной рядов (6):

$$a_i^{((k-1)y)} = \frac{a_{i-1}^{(ky)} - a_{i+1}^{(ky)}}{2i}. \quad (8)$$

Уравнение (7) четырёхкратно интегрируем используя формулу (8) : а) первое интегрирование

$$\varepsilon a_i^{(3y)} - 2a_i^{(y)} + \frac{a_{i-1} - a_{i+1}}{2i} = \frac{b_{i-1} - b_{i+1}}{2i};$$

б) второе интегрирование

$$\varepsilon a_i^{(2y)} - 2a_i + \frac{a_{i-2} - a_i}{4i(i-1)} - \frac{a_i - a_{i+2}}{4i(i+1)} = \frac{b_{i-2} - b_i}{4i(i-1)} - \frac{b_i - b_{i+2}}{4i(i+1)};$$

б) третье интегрирование

$$\begin{aligned} \varepsilon a_i^{(y)} - \frac{a_{i-1} - a_{i+1}}{i} + \frac{a_{i-3} - a_{i-1}}{8i(i-1)(i-2)} - \frac{a_{i-1} - a_{i+1}}{8i^2(i-1)} - \\ - \frac{a_{i-1} - a_{i+1}}{8i^2(i+1)} + \frac{a_{i+1} - a_{i+3}}{8i(i+1)(i+2)} = \frac{b_{i-3} - b_{i-1}}{8i(i-1)(i-2)} - \\ - \frac{b_{i-1} - b_{i+1}}{8i^2(i-1)} - \frac{b_{i-1} - b_{i+1}}{8i^2(i+1)} + \frac{b_{i+1} - b_{i+3}}{8i(i+1)(i+2)}; \end{aligned}$$

г) после четвертого интегрирования имеем основное алгебраическое уравнение относительно неизвестных коэффициентов a_i :

$$\begin{aligned} \varepsilon a_i - \frac{a_{i-2} - a_i}{2i(i-1)} + \frac{a_i - a_{i+2}}{2i(i+1)} + \frac{a_{i-4} - a_{i-2}}{16i(i-1)(i-2)(i-3)} - \frac{a_{i-2} - a_i}{16i(i-1)^2(i-2)} - \\ - \frac{a_{i-2} - a_i}{16i^2(i-1)^2} + \frac{a_i - a_{i+2}}{16i^2(i-1)(i+1)} - \frac{a_{i-2} - a_i}{16i^2(i-1)(i+1)} + \\ + \frac{a_i - a_{i+2}}{16i^2(i+1)^2} + \frac{a_i - a_{i+2}}{16i(i+1)^2(i+2)} - \frac{a_{i+2} - a_{i+4}}{16i(i+1)(i+2)(i+3)} = \\ = \frac{b_{i-4} - b_{i-2}}{16i(i-1)(i-2)(i-3)} - \frac{b_{i-2} - b_i}{16i(i-1)^2(i-2)} - \frac{b_{i-2} - b_i}{16i^2(i-1)^2} + \\ + \frac{b_i - b_{i+2}}{16i^2(i-1)(i+1)} - \frac{b_{i-2} - b_i}{16i^2(i-1)(i+1)} + \frac{b_i - b_{i+2}}{16i^2(i+1)^2} + \\ + \frac{b_i - b_{i+2}}{16i(i+1)^2(i+2)} - \frac{b_{i+2} - b_{i+4}}{16i(i+1)(i+2)(i+3)}, \end{aligned} \quad (9)$$

$i = 4, 5, 6, \dots, N.$

Коэффициенты b_i для известной правой части $f(y)$ из (4) вычисляются следующим обратным преобразованием [13]:

$$b_i = \frac{2}{Nc_i} \sum_{l=0}^N \frac{1}{c_l} f(y_l) T_i(y_l), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (10)$$

где $c_0 = c_N = 2$, $c_m = 1$, если $m \neq 0; N$.

Ряд для приближенного решения в (6) имеет неизвестных коэффициентов a_i , ($i = 0, 1, 2, \dots, N$), основная алгебраическая система (9) имеет $(N-3)$ уравнения, недостающие четыре уравнения определяются из краевых условий (2), записанные через конечных рядов по полиномам Чебышева. С учетом следующих свойств полиномов Чебышева $T_i(\pm 1) = (\pm 1)^i$ и $T'_i(\pm 1) = (\pm 1)^{i-2} i^2$, краевые условия (2) записываются в виде:

$$\begin{cases} u(-1) = \frac{1}{2}a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_N = 0, \\ u(+1) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \dots + a_N = 0, \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \frac{du}{dy}(-1) = \sum_{i=0}^N a_i T_i'(-1) = -a_1 + 4a_2 - 9a_3 + 16a_4 - 25a_5 \dots - (N-1)^2 a_{N-1} + \\ + N^2 a_N = 0, \\ \frac{du}{dy}(+1) = \sum_{i=0}^N a_i T_i'(1) = a_1 + 4a_2 + 9a_3 + 16a_4 + 25a_5 + 36a_6 + \dots + N^2 a_N = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Сначала сложив, а затем вычитая уравнений из (11), имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_N &= 0, \\ a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{N-1} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Выполнения аналогичных операций над уравнениями (12), дают

$$\begin{aligned} 4a_2 + 16a_4 + 36a_6 + \dots + N^2 a_N &= 0, \\ a_1 + 9a_3 + 25a_5 \dots + (N-1)^2 a_{N-1} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Основные алгебраические уравнения (9) совместно с краевыми условиями (13)-(14) образуют систему $(N+1)$ линейных алгебраических уравнений для определения $(N+1)$ неизвестных a_i , $(i = 0, 1, 2, \dots, N)$. Данная алгебраическая система имеет вид:

$$\begin{cases} i(i-1)(i+1)^2(i+2)(i+3)a_{i-4} - 4i(i^2-1)(i^2-4)(i+3)(2i^2-4i-5)a_{i-2} + \\ + (16\varepsilon i^2(i-1)^2(i+1)^2(i^2-4)(i^2-9) + 2i^2(i^2-1)(i^2-9)(8i^2-29))a_i - \\ - 4i(i^2-1)(i^2-4)(i-3)(2i^2+4i-5)a_{i+2} + i(i-1)^2(i+1)(i-2)(i-3)a_{i+4} = \\ = i(i-1)(i+1)^2(i+2)(i+3)b_{i-4} - 4i(i^2-1)(i^2-4)(i+3)b_{i-2} + \\ + 6i^2(i^2-1)(i^2-9)b_i - 4i(i^2-1)(i^2-4)(i-3)b_{i+2} + \\ + i(i-1)^2(i+1)(i-2)(i-3)b_{i+4}, \quad (i = 4, N), \\ \frac{1}{2}a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_N = 0, \\ a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{N-1} = 0, \\ 4a_2 + 16a_4 + 36a_6 + \dots + N^2 a_N = 0, \\ a_1 + 9a_3 + 25a_5 \dots + (N-1)^2 a_{N-1} = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Систему (15) удобно записать в матричном виде

$$Aa = b, \quad (16)$$

где A – квадратная матрица порядка $M \times M$ состоящая из коэффициентов системы (15), где $M = (N+1)$, $T = (a_0, a_1, \dots, a_N)$ искомый вектор для неизвестных, b – правая часть системы (15). Решая систему (15) определяются коэффициенты a_i , $(i = 0, 1, 2, \dots, N)$, а по формуле (6) вычисляются значения приближенного решения, затем а по формуле (3) вычисляются значения точного решения в коллокационных узлах полиномов Чебышева $y_l = \cos \frac{\pi l}{N}$, $l = 0, 1, 2, \dots, N$.

4 Обсуждение результатов

Дифференциальная задача (1)-(2) решена методом предварительного интегрирования при значениях малого параметра $\varepsilon = 10^{-3}; 10^{-9}$ и когда число аппроксимирующих многочленов равно $N = 10; 20; 30$. В табл.1 приведены результаты расчётов

когда значение малого параметра $\varepsilon = 10^{-3}$, где сравнены точное и приближённое решения при $\varepsilon = 10^{-3}$ и $N = 10$ в коллокационных узлах многочленов Чебышева.

Таблица 1. Сравнение точного и приближенного решения

ε	Узлы полиномов $y_l = \cos \frac{\pi l}{N}$ при $l = \overline{0, N}$	Точное решение	Приближенное решение	Абсолютная погрешность
10^{-3}	0	0.0	$1.48 \cdot 10^{-15}$	$1.48 \cdot 10^{-15}$
	3	0.4281296506238288	0.42812965062383007	$1.28 \cdot 10^{-15}$
	5	1.0	1.0000000000000009	$8.88 \cdot 10^{-16}$
	7	0.4286332431595105	0.4286332431595119	$1.39 \cdot 10^{-15}$
	9	0.00912730356437232	0.009127303564374124	$1.8 \cdot 10^{-15}$
	10	0.0	$1.5 \cdot 10^{-15}$	$1.5 \cdot 10^{-15}$

Результаты табл.1 наиболее наглядно изображены на рис.1.



Рис. 1 Сравнение точного и приближенного решения при $\varepsilon = 10^{-3}$ и $N = 10$

Результаты сравнения точного и приближенного решения при $\varepsilon = 10^{-3}$ и $N = 20$ приведены в табл.2.

Таблица 2. Сравнение точного и приближенного решения

ε	Узлы полиномов $y_l = \cos \frac{\pi l}{N}$ при $l = \overline{0, N}$	Точное решение	Приближенное решение	Абсолютная погрешность
10^{-3}	0	0.0	$2.64 \cdot 10^{-14}$	$2.64 \cdot 10^{-14}$
	5	0.24982328578997445	0.24982328578999835	$2.39 \cdot 10^{-14}$
	10	1.0	1.0000000000000213	$2.13 \cdot 10^{-14}$
	15	0.25017683921003075	0.25017683921005457	$2.38 \cdot 10^{-14}$
	20	0.0	$2.64 \cdot 10^{-14}$	$2.64 \cdot 10^{-14}$

Результаты табл.2 наиболее наглядно изображены на рис.2.



Рис. 2 Сравнение точного и приближенного решения при $N = 20$

Результаты сравнения точного и приближенного решения при $N = 30$ приведены в табл.3.

Таблица 3. Сравнение точного и приближенного решения

ε	Узлы полиномов $y_l = \cos \frac{\pi l}{N}$ при $l = 0, N$	Точное решение	Приближенное решение	Абсолютная погрешность
10^{-3}	0	0.0	$1.21 \cdot 10^{-14}$	$1.21 \cdot 10^{-14}$
	5	0.06233783099173172	0.0623378309917432	$1.15 \cdot 10^{-14}$
	10	0.5616568824962123	0.5616568824962226	$1.03 \cdot 10^{-14}$
	20	0.5633443831290254	0.5633443831290352	$9.88 \cdot 10^{-15}$
	25	0.06266259088350548	0.06266259088351667	$1.12 \cdot 10^{-14}$
	30	0.0	$1.17 \cdot 10^{-14}$	$1.17 \cdot 10^{-14}$

Результаты табл.3 наиболее наглядно изображены на рис.3.



Рис. 3 Сравнение точного и приближенного решения при $\varepsilon = 10^{-3}$ и $N = 30$

Результаты сравнения точного и приближенного решения при $\varepsilon = 10^{-9}$ и $N = 10$ приведены в табл.4.

Таблица 4. Сравнение точного и приближенного решения

ε	Узлы полиномов $y_l = \cos \frac{\pi l}{N}$ при $l = 0, N$	Точное решение	Приближенное решение	Абсолютная погрешность
10^{-9}	0	0.0	$2.44 \cdot 10^{-14}$	$2.44 \cdot 10^{-14}$
	3	0.42838137263880904	0.4283813726388309	$2.19 \cdot 10^{-14}$
	5	1.0	1.0000000000000202	$2.02 \cdot 10^{-14}$
	7	0.42838137314240166	0.42838137314242364	$2.2 \cdot 10^{-14}$
	9	0.009118627118067065	0.009118627118091499	$2.44 \cdot 10^{-14}$
	10	0.0	$2.44 \cdot 10^{-14}$	$2.44 \cdot 10^{-14}$

Графические представления результатов табл.4 изображены на рис.4.



Рис. 4 Сравнение точного и приближенного решения при $\varepsilon = 10^{-9}$ и $N = 10$

Результаты сравнения точного и приближенного решения при $\varepsilon = 10^{-9}$ и $N = 20$ приведены в табл.5.

Таблица 5. Сравнение точного и приближенного решения

ε	Узлы полиномов $y_l = \cos \frac{\pi l}{N}$ при $l = 0, N$	Точное решение	Приближенное решение	Абсолютная погрешность
10^{-9}	0	0.0	$5.61 \cdot 10^{-16}$	$5.61 \cdot 10^{-16}$
	5	0.24999999982322318	0.24999999982322368	$5 \cdot 10^{-16}$
	10	1.0	1.0000000000000007	$6.66 \cdot 10^{-16}$
	15	0.2500000001767768	0.25000000017677737	$5.55 \cdot 10^{-16}$
	20	0.0	$5.43 \cdot 10^{-16}$	$5.43 \cdot 10^{-16}$

Графические представления результатов табл.5 изображены на рис.5.



Рис. 5 Сравнение точного и приближенного решения при $\varepsilon = 10^{-9}$ и $N = 20$

Результаты сравнения точного и приближенного решения при $\varepsilon = 10^{-9}$ и приведены в табл.6.

Таблица 6. Сравнение точного и приближенного решения

ε	Узлы полиномов $y_l = \cos \frac{\pi l}{N}$ при $l = 0, N$	Точное решение	Приближенное решение	Абсолютная погрешность
10^{-9}	0	0.0	$2.33 \cdot 10^{-15}$	$2.33 \cdot 10^{-15}$
	5	0.06249999994587336	0.06249999994587558	$2.22 \cdot 10^{-15}$
	10	0.06249999994587558	0.5616568824962226	$1.03 \cdot 10^{-14}$
	20	0.5633443831290254	0.5633443831290352	$9.88 \cdot 10^{-15}$
	25	0.06266259088350548	0.06266259088351667	$1.12 \cdot 10^{-14}$
	30	0.0	$1.17 \cdot 10^{-14}$	$1.17 \cdot 10^{-14}$

Графические представления результатов табл.6 изображены на рис.6.



Рис. 6 Сравнение точного и приближенного решения при $\varepsilon = 10^{-9}$ и $N = 30$

Из приведённых результатов видно, что уменьшение значения малого параметра, в 10^6 ($\varepsilon = 10^{-9}$) раз приводит к резкому улучшению точности приближенного решения. Следует отметить, что с увеличением числа аппроксимирующих полиномов, как в случае $\varepsilon = 10^{-3}$, так и в случае $\varepsilon = 10^{-9}$ максимальные абсолютные погрешности существенно уменьшаются.

5 Заключение

Отметим следующие основные моменты:

1. Старшая производная дифференциального уравнения представлена в виде конечного ряда по полиномом Чебышева первого рода с неизвестными коэффициентами разложения.
2. Все низкие производные и решение дифференциального уравнения записываются с помощью выбранного ряда.
3. Полученная система уравнений четырехкратно интегрируется и имеется дискретная система линейных алгебраических уравнений, число уравнений в которых меньше чем число неизвестных коэффициентов. Недостающие уравнения определяются из краевых условий дифференциального уравнения записанные через конечных рядов.
4. Дифференциальная задача сведена к алгебраической задаче для определения неизвестных коэффициентов разложения.
5. Проведены численные расчёты в широком диапазоне изменения характерных параметров задачи: число аппроксимирующих полиномов и малого параметра задачи.
6. Результаты расчётов показывают высокую точность предлагаемого метода.

Литература

- [1] *Mason J.C., Handscomb D.C.* Chebyshev polynomials. // Boca Raton: Chapman Hall/CRC. – 2003. – 335 p.
- [2] *Gorev V., Gusev A., Korniienko V.* Investigation of the Kolmogorov-Winner filter for continuous fractal processes on the basis of the Chebyshev polynomials of the first kind. // IAPGOŚ. – 2020. – P. 58–61. <http://doi.org/10.35784/iapgos.912>.
- [3] *Agarwal P., Attary M., Maghasedi M., Kumam P.* Solving Higher-Order Boundary and Initial Value Problems via Chebyshev-Spectral Method // pplication in Elastic Foundation. – 2020. Symmetry. 12. – P. 1–15. doi:10.3390/sym12060987 www.mdpi.com/journal/symmetry.
- [4] *Bayubahe F., Nyengeri H., Nizigiyimana R., Mutankana J.P., Bayaga H.* Power and Chebyshev Series Transformation Formulas with Applications to Solving Ordinary Differential Equations via the Fröbenius and Taylor's Methods // Open Access Library Journal. – 2021. – P. 1–19. doi: 10.4236/oalib.1107142.
- [5] *Bychkov B.S., Shabat G.B.* On generalizations of Chebyshev polynomials and Catalan numbers // Ufa Mathematical Journal. – 2021. – P. 8–14. doi:10.13108/2021-13-2-8.
- [6] *Maulidi I., Wibowo B.A., Apriliani V., Umam R.* The Characteristics of the First Kind of Chebyshev Polynomials and its Relationship to the Ordinary Polynomials // Jurnal Teori dan Aplikasi Matematika. JTAM – 2021. 5(2): – P. 323–331. <https://doi.org/10.31764/jtam.v5i2.4647>
- [7] *Adebisi A.F., Ojorongbe T.A., Okunlola K.A., Peter O.J.* Application of chebyshev polynomial basis function on the solution of volterra integro-differential equations using galerkin method.– 2021. 2(4): – P. 41–51. DOI:10.30511/mcs.2021.540133.1047 ISSN:2717-2708 <http://mcs.qut.ac.ir/>

- [8] *Ahmed H.M.* Numerical Solutions for Singular Lane-Emden Equations Using Shifted Chebyshev Polynomials of the First Kind// Contemporary Mathematics. – 2023. – P. 132–149.
- [9] *Yekimov S.* The Chebyshev Polynomials Of The First Kind For Analysis Rates Shares Of Enterprises// Publishing house Education and Science. – 2023.
- [10] *Rastogi R., Misra O.P.* A Chebyshev polynomial approach to approximate solution of differential equations using differential evolution. // Engineering applications of artificial intelligence. – 2023. Volume 126(7-8):107197. <https://doi.org/10.1016/j.engappai.107197>.
- [11] *Fonseca C.M., Lawrence Glasser M., Kowalenko V.* Chebyshev polynomials of the first kind and the univariate Lommel function: Integral representations // Open Mathematics – 2024. – P. 1–16. <https://doi.org/10.1515/math-2024-0113>.
- [12] *Youssri Y.H., Laila A.A., Atta A.A.* Spectral Collocation Approach for Time-Fractional Korteweg-deVries-Burgers Equation via First-Kind Chebyshev Polynomials // Contemporary Mathematics. – 2025.– Volume 8. – P. 1501–1519. DOI:<https://doi.org/10.37256/cm.6220255948>.
- [13] *Абуталиев Ф.Б., Нормуродов Ч.Б.* Математическое моделирование проблем гидродинамической устойчивости. // Ташкент: Фан ва технология, – 2011. – 188 с.
- [14] *Normurodov Ch.B., Tursunova.B.A.* Numerical modeling of the boundary value problem of an ordinary differential equation with a small parameter at the highest derivative by Chebyshev polynomials of the second kind // Results in Applied mathematics – 2023. – P. 1–6. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rinam.2023.100388>
- [15] *Абдурахимов Б.Ф., Джураева Н.Т.* Численное моделирование сингулярно возмущенного уравнения четвертого порядка методом предварительного интегрирования // Проблемы вычислительной и прикладной математики 024. Ташкент.– №:4(58). – С. 8–17.
- [16] *Нормуродов Ч.Б., Зиякулова Ш.А.* Численное моделирование уравнений эллиптического типа дискретным вариантом метода предварительного интегрирования // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2024. Ташкент. – №:5(61). – С. 59–68.
- [17] *Normurodov Ch.B., Abduraximov B.F., Djurayeva N.T.* On Estimating the Rate of Convergence of the Initial Integration Method// International Scientific Conference on Modern Problems of Applied Science and Engineering: MPASE2024, 2–3 May 2024. Samarkand, Uzbekistan. – AIP Conf. Proc.3244,020061 – 2024. <https://doi.org/10.1063/5.0242041>.
- [18] *Normuradov Ch.B., Djurayeva N.T., Anuar M.S., Deraman F., Asi S.M.* One Effective Method for Solving Singularly Perturbed Equations // Malaysian Journal of Science. – 2025. 44 (1): – P. 62–68. DOI:<https://doi.org/10.22452/mjs.vol44no1.8>.

Поступила в редакцию 13.03.2025

UDC 519.624.3

A DISCRETE VARIANT OF THE METHOD PRE-INTEGRATION AND ITS APPLICATION TO THE NUMERICAL SOLUTION OF A SINGULARLY PERTURBED EQUATION

**Normurodov Ch.B., Shakaeva E.E., Ziyakulova Sh.A.*

*ch.normurodov@gmail.com

Termiz state university,

43, Barkamol Avlod Str., Termez, 190111 Uzbekistan.

The article presents a numerical modeling approach for solving a non-homogeneous singularly perturbed fourth-order equation using by a discrete variant of the pre-integration method. In the proposed method, the basis functions are Chebyshev polynomials of the first kind. The highest derivative of the differential equation is expanded into a finite series in terms of these polynomials, with unknown expansion coefficients. All lower derivatives and the solution of the differential equation are represented in the form of the chosen expansion. The resulting series are substituted into the differential equation, leading to a system of discrete equations. For Chebyshev polynomials, there is a discrete integration formula that reduces the order of the derivative. By applying this formula, the discrete system is integrated four times, resulting in a system of algebraic equations where the number of equations is less than the number of unknown coefficients. The missing equations are obtained from the boundary conditions of the problem. The integration operation improves the smoothness of the approximating polynomials. For example, a zeroth-order polynomial, after four integrations, transforms into a fourth-order polynomial. Numerical calculations demonstrate the high accuracy and efficiency of the proposed method, especially for very small values of the parameter ε .

Keywords: Chebyshev polynomials, discrete variant, pre-integration, high accuracy, small parameter.

Citation: Normurodov Ch.B., Shakaeva E.E., Ziyakulova Sh.A. 2025. A discrete variant of the method pre-integration and its application to the numerical solution of a singularly perturbed equation. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 2(64): 74-86.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.2_64.2025.07.

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 2(64) 2025

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Азамов А.А., Арипов М.М., Шадиметов Х.М.

Ответственный секретарь:

Ахмедов Д.Д.

Редакционный совет:

Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Арушанов М.Л., Бурнашев В.Ф.,
Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия), Игнатъев Н.А.,
Ильин В.П. (Россия), Иманкулов Т.С. (Казахстан), Исмагилов И.И. (Россия),
Кабанихин С.И. (Россия), Карачик В.В. (Россия), Курбонов Н.М., Маматов Н.С.,
Мирзаев Н.М., Мухамадиев А.Ш., Назирова Э.Ш., Нормуродов Ч.Б.,
Нуралиев Ф.М., Опанасенко В.Н. (Украина), Расулмухамедов М.М., Расулов А.С.,
Садуллаева Ш.А., Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А.,
Хамдамов Р.Х., Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Чье Ен Ун (Россия),
Шабозов М.Ш. (Таджикистан), Dimov I. (Болгария), Li Y. (США),
Mascagni M. (США), Min A. (Германия), Singh D. (Южная Корея),
Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

Дизайн и вёрстка:

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТТИ.

Подписано в печать 25.04.2025 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №2. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 2(64) 2025

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

Editor-in-Chief:

Ravshanov N.

Deputy Editors:

Azamov A.A., Aripov M.M., Shadimetov Kh.M.

Executive Secretary:

Akhmedov D.D.

Editorial Council:

Aloev R.D., Amirgaliev E.N. (Kazakhstan), Arushanov M.L., Burnashev V.F.,
Zagrebina S.A. (Russia), Zadorin A.I. (Russia), Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia),
Imankulov T.S. (Kazakhstan), Ismagilov I.I. (Russia), Kabanikhin S.I. (Russia),
Karachik V.V. (Russia), Kurbonov N.M., Mamatov N.S.,
Mirzaev N.M., Mukhamadiev A.Sh., Nazirova E.Sh., Normurodov Ch.B., Nuraliev F.M.,
Opanasenko V.N. (Ukraine), Rasulov A.S., Sadullaeva Sh.A., Starovoitov V.V. (Belarus),
Khayotov A.R., Khaldjigitov A., Khamdamov R.Kh., Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh.,
Chye En Un (Russia), Shabozov M.Sh. (Tajikistan), Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA),
Mascagni M. (USA), Min A. (Germany), Singh D. (South Korea), Singh M. (South
Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the
Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.

The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.
Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

Address:

100125, Tashkent, Buz-2, 17A.

Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

E-mail: journals@airi.uz.

Web-site: <https://journals.airi.uz>.

Layout design:

Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.

Signed for print 25.04.2025

Format 60x84 1/8. Order No. 2. Print run of 100 copies.

Содержание

Хужаёров Б.Х., Файзиев Б.М., Сагдуллаев О.К.

Математическая модель переноса деградирующего вещества в двухзонной пористой среде 5

Салимова А.И., Паровик Р.И.

Программный комплекс ABMVAFracSim для исследования дробного осциллятора Ван дер Поля-Эйри 17

Равшанов Н., Шадманов И.У., Адизова З.М.

Разработка математической модели для контроля и прогнозирования процессов тепло- и влагообмена в процессе хранения зерновых продуктов с учетом воздействия вредителей 30

Рустамов Н., Амиртаев К.

Эвристическая модель оценки психического свойства лидера 46

Нормуродов Ч.Б., Муродов С.К., Шакаева Э.Э.

Спектрально-сеточная аппроксимация обыкновенного дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной 54

Хайётов А.Р., Бердимуродова У.,А.

Оптимальная квадратурная формула с производными для произвольно фиксированных узлов в пространстве Соболева 64

Нормуродов Ч.Б., Шакаева Э.Э., Зиякулова Ш.А.

Дискретный вариант метода предварительного интегрирования и его применение к численному решению сингулярно возмущенного уравнения 74

Адылова Ф.Т.

Почему квантовые вычисления – это будущее искусственного интеллекта? . 87

Мухамедиева Д.Т., Раупова М.Х.

Квадратичное программирование в модели распределения ресурсов в сельском хозяйстве на основе квантового алгоритма 101

Шарипов Д.К., Саидов А.Д.

Модифицированный метод SHAP для интерпретируемого прогнозирования осложнений сердечно-сосудистых заболеваний 114

Contents

<i>Khuzhayorov B.Kh., Fayziev B.M.</i>	
Mathematical model of transport of degrading substance in a two-zone porous medium	5
<i>Salimova A.I., Parovik R.I.</i>	
ABMVAFracSim software package for studying the fractional van der Pol-Airy oscillator	17
<i>Ravshanov N., Shadmanov I.U., Adizova Z.M.</i>	
Development of a mathematical model for monitoring and forecasting heat and moisture exchange processes during grain storage considering pest impact	30
<i>Rustamov N., Amirtayev K.</i>	
A heuristic model for evaluating the mental qualities of a leader	46
<i>Normurodov Ch.B., Murodov S.K., Shakaeva E.E.</i>	
Spectral-grid approximation of an ordinary differential equation with a small parameter at the highest derivative	54
<i>Hayotov A.R., Berdimuradova U.A.</i>	
An optimal quadrature formula with derivatives for arbitrarily fixed nodes in the Sobolev space	64
<i>Normurodov Ch.B., Shakaeva E.E., Ziyakulova Sh.A.</i>	
A discrete variant of the method pre-integration and its application to the numerical solution of a singularly perturbed equation	74
<i>Adilova F.T.</i>	
Why are quantum computing technologies the future of artificial intelligence? . .	87
<i>Mukhamediyeva D.T., Raupova M.H.</i>	
Quadratic programming in the resource allocation model in agriculture based on the quantum algorithm	101
<i>Sharipov D.K., Saidov A.D.</i>	
Modified SHAP approach for interpretable prediction of cardiovascular complications	114

HISOBLASH VA AMALIY МАТЕМАТИКА MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
PROBLEMS OF COMPUTATIONAL
AND APPLIED MATHEMATICS

