УДК 519.624.3

СПЕКТРАЛЬНО-СЕТОЧНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Нормуродов Ч.Б., Муродов С.К., Шакаева Э.Э.

*ch.normurodov@gmail.com

Термезский государственный университет,

190111 Узбекистан, Термиз, ул. Баркамол авлод, дом 43.

В данной статье представлен высокоточный и эффективный спектрально-сеточный метод численного решения краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка с малым параметром при старшей производной. Метод основан на полиномах Чебышева первого рода и использовании разбиения интегрального интервала на несколько подотрезков, что позволяет обеспечить непрерывность решения и его производных до третьего порядка между элементами сетки. Это особенно важно при наличии пограничных слоев, возникающих из-за малого параметра при старшей производной, что делает задачу сингулярно возмущенной. В рамках работы проведен анализ точности и устойчивости метода на различных уровнях разбиения сетки и количества аппроксимирующих полиномов. Представлены численные эксперименты, демонстрирующие высокую точность вычисления как самого решения, так и его производных вплоть до четвёртого порядка, даже при весьма малых значениях параметра ε (до 10^{-9}). Результаты показывают, что увеличение количества элементов сетки и полиномов приводит к геометрическому уменьшению абсолютных погрешностей, подтверждая сходимость предложенного подхода. Таким образом, предложенный спектрально-сеточный метод является не только эффективным с вычислительной точки зрения, но и достаточно универсальным для решения широкого класса задач, связанных с сингулярно возмущёнными дифференциальными уравнениями высокого порядка.

Ключевые слова: спектрально-сеточный метод, число элементов и полиномов, малый параметр, высокая точность, эффективность, максимальные абсолютные погрешности.

Цитирование: *Нормуродов Ч.Б., Муродов С.К., Шакаева Э.Э.* Спектрально-сеточная аппроксимация обыкновенного дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2025. – №2(64). – С. 54-63.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.2_64.2025.05.

1 Введение

Численное моделирование краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной является актуальной проблемой в области вычислительной и прикладной математики. Присутствие малого параметра в дифференциальном уравнении требует разработки адаптивных численных методов, обладающих следующими свойствами: высокая точность, эффективность, применимость при умеренно малых значениях параметра исследуемой задачи. При построении подобных методов в качестве базисных функций используются

полиномы Чебышева первого рода. Приведем обзор по применению этих полиномов при решении различных прикладных задач.

В работе [1] для численного решения класса задач третьего порядка с сингулярно возмущенными граничными значениями предложен метод рациональной спектральной коллокации. Представленные численные эксперименты иллюстрируют вычислительную эффективность и точность предложенного метода. Спектральный метод для решения связанных с сингулярно возмущенными двухточечными краевыми задачами второго рода изложен в [2]. Авторы утверждают, что данный метод удобен при разрешении очень тонких пограничных слоев.

В статье [3] предложено метод адаптивных спектральных элементов высокого порядка, основанный на полиномиальной аппроксимации для решения дифференциальных уравнений с особыми возмущениями с граничными условиями Дирихле и пограничным слоем на одном конце. Исследование [4] направлено на сборку двух методичных спектральных производных алгоритмов Лежандра для численного решения уравнений сингулярно возмущенных типов.

Целью статье [5] является исследование сходимости спектрального коллокационного приближения Фурье в сочетание с полунеявным методом Эйлера при решении стохастических уравнений в частных производных. В статье [6] предложен и исследован метод спектральной коллокации Чебышева для решения смешанных функциональных дифференциальных уравнений. Влияние конвективных граничных условий на течение в пограничном слое над линейно растягивающейся плоской поверхностью исследовано в статье [7]. Применение спектрального метода Лежандра для многомерных частных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра изложено в [8].

В работе [9] предложена и анализирована эффективная дискретизация по времени для спектрального дробного стохастического уравнения в частных производных с параметром Херста. В исследование [10] спектральный метод Чебышева применен для анализа виброакустических характеристик пластин произвольной формы. В статье [11] рассматриваются два спектральных метода, а именно методы Галеркина и Петрова-Галеркина, для линейного анализа устойчивости уравнений магнитной гидродинамики, описывающих течение электропроводящей жидкости в присутствии тангенциального магнитного поля.

Представление нового вычислительного алгоритма для решения дробного дифференциального уравнения пантографа изложено в [12]. Алгоритм основан на введении нового семейства ортогональных многочленов, обобщающих семейство многочленов Чебышева второго рода. В статье [13] разработана полуаналитическая модель для анализа свободных колебаний вращающихся пластин с трещинами на основе расширенного спектрального метода Чебышева. Применение спектрального метода с полиномамы Чебышева второго рода для решения краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной изложено в [14].

В статье [15] изложено сходимость спектрально-сеточного метода с полиномамы Чебышева первого рода для обыкновенного дифференциального уравнения общего вида. Применение спектрального-сеточного метода для численного моделирования проблемы на собственные значения для уравнения Орра-Зоммерфельда является предметом исследования работе [16]. Математическое моделирование проблемы гидродинамической устойчивости для двухфазных плоскопараллельных течений спектрально-сеточным методом изложено в [17]. Исследование сходимости

спектрально-сеточного метода для уравнения Бюргерса с начально-краевыми условиями выполнено в [18].

2 Постановка задачи

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка с малым параметром при старшей производной:

$$\varepsilon\frac{d^4u}{d\eta^4} - 2\frac{d^2u}{d\eta^2} + u(\eta) = f(\eta),\ \eta \in (\eta_0, \eta_l), \tag{1}$$

со следующими краевыми условиями:

$$u(\eta_0) = \frac{du}{d\eta}(\eta_0) = 0,\ u(\eta_l) = \frac{du}{d\eta}(\eta_l) = 0, \tag{2}$$

где ε – малый параметр. Наличие малого параметра ε при старшей производной накладывает дополнительные требования к аппроксимационным свойствам применяемых численных методов. Этот факт особенно выявляется не только при исследовании динамики решения рассматриваемой задачи, но и динамики производных различного порядка. Для исследования сходимости и порядка точности спектрально-сеточного метода воспользуемся методом пробных функций [19]. Согласно этому методу выбирается некоторая произвольная функция $u_e(\eta) = u_{exact}(\eta)$. Подставляя её в дифференциальное уравнение (1), найдём правую часть $f(\eta) = \varepsilon\frac{d^4u_e}{d\eta^4} - 2\frac{d^2u_e}{d\eta^2} + u_e(\eta)$ и потребуем выполнения краевых условий (2).

Поставленная задача решается спектральным и спектрально-сеточным методом и приближенное решение $u_a(\eta)$ сравнивается с известной пробной функцией $u_e(\eta)$ в коллокационных узлах полиномов Чебышева первого рода. В данной работе в качестве пробной функции выбрана следующая функция:

$$u_e(\eta) = \left(1-\eta^2\right)^2 e^{\varepsilon\eta}.$$

Для этой функции правая часть уравнения (1) имеет вид:

$$\begin{gathered} f(\eta) = e^{\varepsilon\eta}[(\varepsilon^5 - 2\varepsilon^2 + 1)\eta^4 + (16\varepsilon^4 - 16\varepsilon)\eta^3 + \\ +(72\varepsilon^3 - 2\varepsilon^5 + 4\varepsilon^2 - 26)\eta^2 + \\ +(96\varepsilon^2 - 16\varepsilon^4 + 16\varepsilon)\eta + (\varepsilon^5 - 24\varepsilon^3 + 24\varepsilon - 2\varepsilon^2 + 9)]. \end{gathered}$$

Производные от пробной функции имеют вид:

$$\frac{du_e}{d\eta} = (\eta^2 - 1)(\varepsilon\eta^2 + 4\eta - \varepsilon)e^{\varepsilon\eta},$$

$$\frac{d^2u_e}{d\eta^2} = \left[\varepsilon^2\eta^4 + 8\varepsilon\eta^3 + 2(6-\varepsilon^2)\eta^2 - 8\varepsilon\eta + \varepsilon^2 - 4\right]e^{\varepsilon\eta},$$

$$\frac{d^3u_e}{d\eta^3} = \left[\varepsilon^3\eta^4 + 12\varepsilon^2\eta^3 + 2(18\varepsilon - \varepsilon^3)\eta^2 + 12\left(2-\varepsilon^2\right)\eta + \varepsilon^3 - 12\varepsilon\right]e^{\varepsilon\eta},$$

$$\frac{d^4u_e}{d\eta^4} = \left[\varepsilon^4\eta^4 + 16\varepsilon^3\eta^3 + 2(36\varepsilon^2 - \varepsilon^4)\eta^2 + 16\left(6\varepsilon - \varepsilon^3\right)\eta + \varepsilon^4 - 24\varepsilon^2 + 24\right]e^{\varepsilon\eta}.$$

Эти выражения понадобятся для сравнения с их приближенными значениями, полученными спектрально-сеточным методом.

3 Метод решения

В данной работе для исследования динамики решения и ее производных различного порядка предлагается применить спектрально-сеточный метод. Перейдем к изложению алгоритма спектрально-сеточного метода для численного моделирования задачи (1)-(2). Для этого в интервале интегрирования введем сетку $\eta_0 < \eta_1 < \cdots < \eta_N = \eta_l$ и получим N различных элементов:

$$[\eta_0, \eta_1], [\eta_1, \eta_2], \cdots, [\eta_j, \eta_{j+1}], \cdots, [\eta_{N-1}, \eta_N],\ j = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Дифференциальное уравнение (1) на каждом из этих элементов принимает вид

$$\varepsilon \frac{d^4 u_j}{d\eta^4} - 2\frac{d^2 u_j}{d\eta^2} + u_j(\eta) = f_j(\eta),\ j{=}1, 2, \ldots, N, \tag{3}$$

граничные условия (2) записываются в точках η_0 и η_N:

$$u(\eta_0) = \frac{du}{d\eta}(\eta_0) = 0,\ \mathrm{u}(\eta_N) = \frac{du}{d\eta}(\eta_N) = 0, \tag{4}$$

во внутренних узлах сетки потребуем непрерывность решения уравнения (3) и его производных до третьего порядка. Эти условия имеют следующий вид:

$$u_j^{(t)}(\eta_j) = u_{j+1}^{(t)}(\eta_j),\ t = 0, 1, 2, 3;\ j = 1, 2, \ldots,\ N-1, \tag{5}$$

где t – указывает порядок производной.

Решение задачи (3)-(5) ищем в виде ряда по полиномам Чебышева первого рода. Для этого каждый элемент сетки $[\eta_{j-1}, \eta_j]$ отображаем на интервал с помощью следующей замены независимой переменной:

$$\eta = \frac{m_j}{2} + \frac{l_j}{2} y,\ m_j = \eta_j + \eta_{j-1},\ l_j = \eta_j - \eta_{j-1},\ j = 1, 2, \ldots, N, \tag{6}$$

где через l_j обозначена длина j – го элемента сетки. После выполнения преобразования (6) уравнения (3) принимают следующий вид:

$$\varepsilon \cdot \left(\frac{l_j}{2}\right)^4 \frac{d^4 u_j}{dy^4} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{l_j}{2}\right)^2 \frac{d^2 u_j}{dy^2} + u_j(\eta) = f_j(\eta),\ j = 1, 2, \ldots N. \tag{7}$$

Из условий (4)-(5) имеем:

$$\begin{gathered} u_1(-1) = \frac{du_1}{dy}(-1) = 0,\ u_N(+1) = \frac{du_N}{dy}(+1) = 0, \\ \left(\frac{l_j}{2}\right)^t \frac{d}{dy} u_j^{(t)}(+1) = \left(\frac{l_{j+1}}{2}\right)^t u_{j+1}^{(t)}(-1), \\ t = 0, 1, 2, 3; j = 1, 2, \ldots,\ N-1. \end{gathered} \tag{8}$$

Приближенное решение и правая часть задачи (7)-(8) на каждом из элементов сетки ищем в виде:

$$\begin{gathered} u_a^{(j)}(y) = \sum_{n=0}^{p_j} a_n(j) T_n(y), \\ f_j\left(\overline{y}_l^{(j)}\right) = \sum_{n=0}^{p_j} b_n^{(j)} T_n(y_l^{(j)}), \quad \overline{y}_l^{(j)} = \frac{m_j}{2} + \frac{l_j}{2} y_l^{(j)}, \end{gathered} \tag{9}$$

где ${y_l}^{(j)} = \cos\frac{\pi l}{p_j}, l = 0, 1, ..., p_j; j = 1, 2, \ldots, N$, где $T_n(y)$ – полиномы Чебышева первого рода, $y_l^{(j)}$ – их узлы, а p_j – количество полиномов, используемых для аппроксимации решения на j – м элементе сетки, $a_n(j)$ – неизвестные коэффициенты разложения, $u_a^{(j)}(y) = u_{appoximate}^{(j)}(y)$. Коэффициенты разложения $b_n^{(j)}$ для правой части f_j в (9) определяются следующим обратным преобразованием [20]:

$$b_n^{(j)} = \frac{2}{p_j c_n} \sum_{l=0}^{p_j} \frac{1}{c_l} f_j \left(\overline{y}_l^{(j)}\right) T_n({y_l}^{(j)}),$$

$$n = 0, 1, 2, ..., p_j,$$

$c_0 = c_{p_j} = 2, c_m = 1$ при $m \neq 0, p_j, j = 1, 2, \ldots, N; M = \sum\limits_{j=1}^{N} (p_j + 1)$ – общее число аппроксимирующих полиномов Чебышева первого рода. Производные различного порядка от приближенного решения (9) вычисляются по следующим формулам:

$$u_a^{(j)}(y) = \sum_{n=0}^{p_j} a_n(j) T_n(y),$$

$$u_a^{(1)}(y) = \sum_{n=0}^{p_j} a_n^{(1)} T_n(y),$$

$$a_n^{(1)} = \frac{2}{c_n} \sum_{\substack{q=n+1 \\ q+n\equiv 1(\bmod 2)}}^{p_j} q a_q,\ n \geqslant 0,$$

$$u_a^{(2)}(y) = \sum_{n=0}^{p_j} a_n^{(2)} T_n(y),$$

$$a_n^{(2)} = \frac{2}{c_n} \sum_{\substack{q=n+2 \\ q\equiv n(\bmod 2)}}^{p_j} q(q^2 - n^2) a_q, n \geqslant 0,$$

$$u_a^{(3)}(y) = \sum_{n=0}^{p_j} a_n^{(3)} T_n(y),$$

$$a_n^{(3)} = \frac{1}{4c_n} \sum_{\substack{q=n+3 \\ q+n\equiv 1(\bmod 2)}}^{p_j} q\left[\left(q^2-1\right)^2 - 2\left(q^2+1\right)n^2 + n^4\right] a_q,\ n \geqslant 0,$$

$$u_a^{(4)}(y) = \sum_{n=0}^{p_j} a_n^{(4)} T_n(y),$$

$$a_n^{(4)} = \frac{1}{24c_n} \sum_{\substack{q=n+4 \\ q\equiv n(\bmod 2)}}^{p_j} q\left[q^2\left(q^2-4\right)^2 - 3n^2q^4 + 3n^4q^2 - n^2\left(n^2-4\right)^2\right] a_q,$$

$$n \geqslant 0.$$

Подставляя ряды (9) в уравнению (7)-(8) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях полиномов имеем систему алгебраических уравнений

$$Ax = b,$$

где $x^T = (a_0^{(1)}, a_1^{(1)}, \dots a_{p_1}^{(1)}, a_0^{(2)}, a_1^{(2)}, \dots, a_{p_2}^{(2)}, \dots, a_0^{(N)}, a_1^{(N)}, \dots a_{p_N}^{(N)})$, здесь через x^T обозначен транспонированный вектор x

4 Обсуждение результатов

Дифференциальная задача (1)-(2) решена спектральным ($N = 1$) и спектрально-сеточным методом ($N \neq 1$) при различных значениях малого параметра $\varepsilon = 10^{-3} \div 10^{-9}$ и в случае, когда общее количество полиномов $M = 20; 40$.

В табл.1 приведены результаты расчётов по вычислению максимальных абсолютных погрешностей $\Delta = \max\limits_{0 \leqslant l \leqslant p_j} \left| u_e^{(t)} - u_a^{(t)} \right|, t = 0, 1, 2, 3, 4,\ j = 1, 2, 3, ..., N$ в коллокационных узлах полиномов Чебышева первого рода

$$y_l^{(j)} = \cos\left(\frac{\pi l}{p_j}\right), l = 0, 1, \dots, p_j, j = 1, 2, \dots, N.$$

Численные расчёты проведены в фиксированном общем числе полиномов $M = 20$, в случае когда число элементов сетки в спектрально- сеточном методе состоит из двух и четырёх элементов, т.е.

$$p_j + 1 = 10 (j = 1, 2),\ p_j + 1 = 5 (j = 1, 2, 3, 4).$$

Таблица 1. Максимальные абсолютные погрешности для решения и её производных

Малый параметр ε	Общее число полиномов M	Число элементов сетки N	Решение	Первая производная	Вторая производная	Третья производная	Четвертая производная
10^{-3}	20	1	$2.5 * 10^{-15}$	$2.4 * 10^{-15}$	$1.0 * 10^{-13}$	$4.6 * 10^{-12}$	$1.5 * 10^{-10}$
	20	2	$7.7 * 10^{-16}$	$4.5 * 10^{-15}$	$8.4 * 10^{-14}$	$3.3 * 10^{-12}$	$5.8 * 10^{-11}$
	20	4	$9.1 * 10^{-10}$	$5.3 * 10^{-10}$	$1.5 * 10^{-9}$	$1.6 * 10^{-8}$	$6.1 * 10^{-8}$
10^{-5}	20	1	$8.8 * 10^{-16}$	$5.9 * 10^{-15}$	$1.4 * 10^{-13}$	$3.6 * 10^{-11}$	$3.4 * 10^{-9}$
	20	2	$7.7 * 10^{-16}$	$1.5 * 10^{-15}$	$1.3 * 10^{-14}$	$7.7 * 10^{-13}$	$1.4 * 10^{-11}$
	20	4	$9.2 * 10^{-14}$	$5.3 * 10^{-14}$	$1.5 * 10^{-13}$	$1.6 * 10^{-12}$	$6.8 * 10^{-12}$
10^{-7}	20	1	$3.3 * 10^{-15}$	$1.0 * 10^{-14}$	$2.7 * 10^{-13}$	$8.8 * 10^{-11}$	$9.3 * 10^{-9}$
	20	2	$5.5 * 10^{-16}$	$1.6 * 10^{-15}$	$1.5 * 10^{-14}$	$8.4 * 10^{-13}$	$1.5 * 10^{-11}$
	20	4	$2.2 * 10^{-16}$	$2.2 * 10^{-16}$	$4.4 * 10^{-16}$	$2.8 * 10^{-15}$	$5.3 * 10^{-15}$
10^{-9}	20	1	$7.7 * 10^{-16}$	$9.1 * 10^{-15}$	$2.3 * 10^{-13}$	$7.2 * 10^{-11}$	$7.6 * 10^{-9}$
	20	2	$6.1 * 10^{-16}$	$3.2 * 10^{-15}$	$3.9 * 10^{-14}$	$2.1 * 10^{-12}$	$3.9 * 10^{-11}$
	20	4	$4.4 * 10^{-16}$	$2.4 * 10^{-16}$	$5.5 * 10^{-16}$	$2.8 * 10^{-15}$	$5.2 * 10^{-15}$

Из численных результатов приведённых в таблице 1, видно, что с уменьшением значения малого параметра ε, точность вычисления старших производных в спектрально-сеточном методе ($N \neq 1$) значительно лучше по сравнению со спектральным методом ($N = 1$).

В таблице 2 приведены результаты расчётов, когда общее число полиномов в два раза больше, чем в таблице 1, т.е. $M = 40$, а число элементов сетки увеличено до 8, т.е. рассматриваются случаи $p_j + 1 = 20(j = 1, 2); p_j + 1 = 10(j = 1, 2, 3, 4); p_j + 1 = = 5(j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$.

Таблица 2. Максимальные абсолютные погрешности для решения и её производных

Малый параметр ε	Общее число полиномов M	Число элементов сетки N	Решение	Первая производная	Вторая производная	Третья производная	Четвертая производная
10^{-3}	40	1	$1.3 * 10^{-15}$	$1.3 * 10^{-15}$	$5.3 * 10^{-14}$	$2.3 * 10^{-12}$	$1.3 * 10^{-10}$
	40	2	$1.4 * 10^{-15}$	$1.0 * 10^{-15}$	$1.0 * 10^{-14}$	$4.7 * 10^{-13}$	$2.2 * 10^{-11}$
	40	4	$3.3 * 10^{-16}$	$4.4 * 10^{-16}$	$4.7 * 10^{-15}$	$1.9 * 10^{-13}$	$3.3 * 10^{-12}$
	40	8	$2.0 * 10^{-11}$	$9.4 * 10^{-12}$	$3.0 * 10^{-11}$	$2.6 * 10^{-10}$	$9.8 * 10^{-10}$
10^{-5}	40	1	$7.7 * 10^{-16}$	$1.5 * 10^{-15}$	$2.4 * 10^{-13}$	$1.8 * 10^{-10}$	$3.9 * 10^{-8}$
	40	2	$6.6 * 10^{-16}$	$5.1 * 10^{-15}$	$1.5 * 10^{-13}$	$4.2 * 10^{-11}$	$4.1 * 10^{-9}$
	40	4	$4.4 * 10^{-16}$	$2.2 * 10^{-16}$	$7.2 * 10^{-16}$	$3.6 * 10^{-14}$	$6.8 * 10^{-13}$
	40	8	$2.2 * 10^{-15}$	$9.7 * 10^{-16}$	$3.0 * 10^{-15}$	$2.6 * 10^{-14}$	$9.7 * 10^{-14}$
10^{-7}	40	1	$1.6 * 10^{-15}$	$1.1 * 10^{-14}$	$6.3 * 10^{-13}$	$8.6 * 10^{-10}$	$4.1 * 10^{-7}$
	40	2	$9.4 * 10^{-16}$	$8.4 * 10^{-15}$	$2.2 * 10^{-13}$	$7.0 * 10^{-11}$	$7.3 * 10^{-9}$
	40	4	$6.6 * 10^{-16}$	$4.9 * 10^{-16}$	$3.3 * 10^{-15}$	$1.8 * 10^{-13}$	$3.3 * 10^{-12}$
	40	8	$3.3 * 10^{-16}$	$2.6 * 10^{-16}$	$1.1 * 10^{-16}$	$5.7 * 10^{-16}$	$1.0 * 10^{-15}$
10^{-9}	40	1	$1.4 * 10^{-15}$	$3.9 * 10^{-14}$	$1.9 * 10^{-12}$	$2.8 * 10^{-9}$	$1.3 * 10^{-6}$
	40	2	$4.4 * 10^{-16}$	$1.1 * 10^{-15}$	$2.0 * 10^{-14}$	$6.3 * 10^{-12}$	$7.0 * 10^{-10}$
	40	4	$3.3 * 10^{-16}$	$3.8 * 10^{-16}$	$4.9 * 10^{-15}$	$2.7 * 10^{-13}$	$5.0 * 10^{-12}$
	40	8	$3.3 * 10^{-16}$	$1.9 * 10^{-16}$	$1.8 * 10^{-16}$	$7.4 * 10^{-16}$	$1.5 * 10^{-15}$

Из результатов приведенных в табл. 2 видно, что увеличение общего количества аппроксимирующих полиномов Чебышева M и числа элементов сетки N в спектрально-сеточном методе приводит к существенному улучшению точности как для решения, так и ее производных различного порядка.

Результаты табл. 1-2 показывают, что применение спектрально-сеточного метода для численного моделирования задачи (1)-(2) приводит к уменьшению максимальных абсолютных погрешностей с скоростью геометрической прогрессии.

5 Заключение

Численное моделирование краевой задачи для неоднородного дифференциального уравнения четвёртого порядка с малым параметром при старшей производной

спектрально-сеточным методом позволяет вычислить приближенное решение и ее производные до четвёртого порядка с достаточно высокой точностью при умеренных значениях малого параметра, при сравнительно небольших количествах аппроксимирующих полиномов Чебышева и элементов сетки, которое обеспечивает эффективность применяемого метода.

Литература

[1] *Suqin Chen and Yingwei Wang* A rational spectral collocation method for third-order singularly perturbed problems. // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2016. – Vol 307. – P. 93–105. -doi:https://doi.org/10.1016/j.cam.2016.03.009 .

[2] *Sharp N. and Manfred Trummer* A Spectral Collocation Method for Systems of Singularly Perturbed Boundary Value Problems. // Procedia Computer Science. – 2017. – Vol 108. – P. 725–734. doi: https://doi.org/10.1016/j.procs.2017.05.012.

[3] *Kareem T.* Elgindy and Hareth M. Refat. High-order Gegenbauer integral spectral element method integrated with an adaptive Chebyshev optimization strategy for solving linear singularly perturbed differential equations // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2020. – Vol 372. doi: https://doi.org/10.1016/j.cam.2020.112722.

[4] *Abdelhakem M. and Youssri Y.H.* Two spectral Legendre's derivative algorithms for Lane-Emden, Bratu equations, and singular perturbed problems // Applied Numerical Mathematics. – 2021. – Vol 169. – P. 243–255. doi: https://doi.org/10.1016/j.apnum.2021.07.006

[5] *Arezoomandan M., Soheili A.R.* Spectral collocation method for stochastic partial differential equations with fractional Brownian motion // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2021. – Vol 389 doi: https://doi.org/10.1016/j.cam.2020.113369

[6] *Reuben Rauch and Manfred R. Trummer and Williams J.F.* A spectral collocation method for mixed functional differential equations // Applied Numerical Mathematics. – 2021. – Vol 161. – P. 101–110. -doi: https://doi.org/10.1016/j.apnum.2020.10.011.

[7] *Vishwanath B. Awati and Akash Goravar and Abeer H. Alzahrani and N.M. Bujurke and Ilyas Khan* Convective heating and mass transfer in Buongiorno model of nanofluid using spectral collocation method of shifted Chebyshev polynomial // International Journal of Thermofluids. – 2023. – Vol 20 doi: https://doi.org/10.1016/j.ijft.2023.100471

[8] *Zheng W. and Chen Y. and Zhou J.* A Legendre spectral method for multidimensional partial Volterra integro-differential equations // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2024. – Vol 436. – doi: https://doi.org/10.1016/j.cam.2023.115302

[9] *Liu X., Yang Y.* Strong convergence analysis of spectral fractional diffusion equation driven by Gaussian noise with Hurst parameter less than 1/2. // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2024. – Vol 135. doi: https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2024.108049

[10] *Tiantong Zhao and Tiangui Ye and Yuehua Chen and Guoyong Jin and Zhigang Liu.* Single domain Chebyshev spectral method for analyses of the vibroacoustic characteristics of baffled irregularly shaped plates. // Journal of Sound and Vibration. – 2024. – Vol 592. doi: https://doi.org/10.1016/j.jsv.2024.118627

[11] *Anna Piterskaya and Mikael Mortensen* A study of the Orr–Sommerfeld and induction equations by Galerkin and Petrov–Galerkin spectral methods utilizing Chebyshev polynomials // Journal of Computational and Applied Mathematics – 2025. – Vol 459. doi: https://doi.org/10.1016/j.cam.2024.116374

[12] *Abd-Elhameed W.M. and Alsuyuti M.M.* New spectral algorithm for fractional delay pantograph equation using certain orthogonal generalized Chebyshev polynomials //

Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2025. – Vol 141. doi: https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2024.108479

[13] *Qizhi Mao and Yukun Chen and Guoyong Jin and Tiangui Ye and Yantao Zhang* An extended Chebyshev spectral method for vibration analysis of rotating cracked plates. // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2025. – Vol 229. doi: https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2025.112558

[14] *Normurodov Ch.B., Tursunova B.A.* Numerical modeling of the boundary value problem of an ordinary differential equation with a small parameter at the highest derivative by Chebyshev polynomials of the second kind // Results in Applied Mathematics – 2023. – Vol 19. doi: https://doi.org/10.1016/j.rinam.2023.100388

[15] *Нормуродов Ч.Б., Подгаев А.Г.* Сходимость спектрально -сеточного метода // Узбекский математический журнал Ташкент, – 2003. – №2. – С. 64–71.

[16] *Нормуродов Ч.Б.* Об одном эффективном методе решения уравнения Орра-Зоммерфельда // Математическое моделирование. Москва, – 2005. – №9(17). – С.35–42.

[17] *Нормуродов Ч.Б.* Математическое моделирование гидродинамических задач для двухфазных плоскопараллелных течений // Математическое моделирование. -Москва, – 2007. – №6(19). – С. 53–60.

[18] *Normurodov Ch.B., Toyirov A.Kh., Ziyakulova Sh.A., Visvanathan K.K.* Convergence of Spectral-Grid Method for Burgers equation with initial-boundary conditions. // Mathematics and Statistics. – 2024. 12(2): – P. 115–125. DOI:10.13189/ms.2024.120201. Available at: http://www.hrpub.org.

[19] *Самарский А.А.* Теория разностных схем. // М.: Наука, – 1977. – 656 с.

[20] *Normurodov Ch.B., Abduraximov B.F., Djurayeva N.T.* On estimating the rate of convergence of the initial integration method. // AIP Conf. Proc. 3244, 020061 – 2024. https://doi.org/10.1063/5.0242041

Поступила в редакцию 13.03.2025

UDC 519.624.3

SPECTRAL-GRID APPROXIMATION OF AN ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION WITH A SMALL PARAMETER AT THE HIGHEST DERIVATIVE

Normurodov Ch.B., Murodov S.K., Shakaeva E.E.

ch.normurodov@gmail.com

Termiz state university,

43, Barkamol Avlod Str., Termez, 190111 Uzbekistan.

This paper presents a highly accurate and efficient spectral-grid method for the numerical solution of a boundary value problem for a fourth-order ordinary differential equation with a small parameter at the highest derivative. The method is based on Chebyshev polynomials of the first kind and involves partitioning the integration interval into multiple subintervals, ensuring the continuity of the solution and its derivatives up to the third order across the subintervals. This is particularly important in the presence of boundary layers that arise due to the small parameter at the highest derivative, rendering the problem singularly perturbed. An analysis of the method's accuracy and stability is carried out at various levels of grid subdivision and numbers of approximating

polynomials. Numerical experiments are presented, demonstrating high precision in the computation of both the solution and its derivatives up to the fourth order, even for very small values of the parameter ε (down to 10^{-9}). The results show that increasing the number of grid elements and Chebyshev polynomials leads to a geometric reduction in absolute errors, confirming the convergence of the proposed approach. Thus, the proposed spectral-grid method is not only computationally efficient but also sufficiently robust and flexible for solving a wide range of problems involving singularly perturbed high-order differential equations.

Keywords: spectral-grid method, number of elements and polynomials, small parameter, high accuracy, efficiency, maximum absolute errors.

Citation: Normurodov Ch.B., Murodov S.K., Shakaeva E.E. 2025. Spectral-grid approximation of an ordinary differential equation with a small parameter at the highest derivative. *Problems of Computational and Applied Mathematics.* 2(64): 54-63.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.2_64.2025.05.

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 2(64) 2025

Журнал основан в 2015 году.
Издается 6 раз в год.

Учредитель:
Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта.

Главный редактор:
Равшанов Н.

Заместители главного редактора:
Азамов А.А., Арипов М.М., Шадиметов Х.М.

Ответственный секретарь:
Ахмедов Д.Д.

Редакционный совет:
Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Арушанов М.Л., Бурнашев В.Ф., Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия), Игнатьев Н.А., Ильин В.П. (Россия), Иманкулов Т.С. (Казахстан), Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия), Карачик В.В. (Россия), Курбонов Н.М., Маматов Н.С., Мирзаев Н.М., Мухамадиев А.Ш., Назирова Э.Ш., Нормуродов Ч.Б., Нуралиев Ф.М., Опанасенко В.Н. (Украина), Расулмухамедов М.М., Расулов А.С., Садуллаева Ш.А., Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А., Хамдамов Р.Х., Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Чье Ен Ун (Россия), Шабозов М.Ш. (Таджикистан), Dimov I. (Болгария), Li Y. (США), Mascagni M. (США), Min A. (Германия), Singh D. (Южная Корея), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при Администрации Президента Республики Узбекистан.
Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.
За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:
100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.
Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.
Э-почта: journals@airi.uz.
Веб-сайт: https://journals.airi.uz.

Дизайн и вёрстка:
Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.
Подписано в печать 25.04.2025 г.
Формат 60x84 1/8. Заказ №2. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 2(64) 2025

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:
Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

Editor-in-Chief:
Ravshanov N.

Deputy Editors:
Azamov A.A., Aripov M.M., Shadimetov Kh.M.

Executive Secretary:
Akhmedov D.D.

Editorial Council:
Aloev R.D., Amirgaliev E.N. (Kazakhstan), Arushanov M.L., Burnashev V.F., Zagrebina S.A. (Russia), Zadorin A.I. (Russia), Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia), Imankulov T.S. (Kazakhstan), Ismagilov I.I. (Russia), Kabanikhin S.I. (Russia), Karachik V.V. (Russia), Kurbonov N.M., Mamatov N.S., Mirzaev N.M.,Mukhamadiev A.Sh., Nazirova E.Sh., Normurodov Ch.B., Nuraliev F.M., Opanasenko V.N. (Ukraine), Rasulov A.S., Sadullaeva Sh.A., Starovoitov V.V. (Belarus), Khayotov A.R., Khaldjigitov A., Khamdamov R.Kh., Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh., Chye En Un (Russia), Shabozov M.Sh. (Tajikistan), Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA), Mascagni M. (USA), Min A. (Germany), Singh D. (South Korea), Singh M. (South Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.
The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.
Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

Address:
100125, Tashkent, Buz-2, 17A.
Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.
E-mail: journals@airi.uz.
Web-site: https://journals.airi.uz.

Layout design:
Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.
Signed for print 25.04.2025
Format 60x84 1/8. Order No. 2. Print run of 100 copies.

Содержание

Хужаёров Б.Х., Файзиев Б.М., Сагдуллаев О.К.
Математическая модель переноса деградирующегося вещества в двухзонной пористой среде 5

Салимова А.И., Паровик Р.И.
Программный комплекс ABMVAFracSim для исследования дробного осциллятора Ван дер Поля-Эйри 17

Равшанов Н., Шадманов И.У., Адизова З.М.
Разработка математической модели для контроля и прогнозирования процессов тепло- и влагообмена в процессе хранения зерновых продуктов с учетом воздействия вредителей 30

Рустамов Н., Амиртаев К.
Эвристическая модель оценки психического свойства лидера 46

Нормуродов Ч.Б., Муродов С.К., Шакаева Э.Э.
Спектрально-сеточная аппроксимация обыкновенного дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной 54

Хаётов А.Р., Бердимурадова У.,А.
Оптимальная квадратурная формула с производными для произвольно фиксированных узлов в пространстве Соболева 64

Нормуродов Ч.Б., Шакаева Э.Э., Зиякулова Ш.А.
Дискретный вариант метода предварительного интегрирования и его применение к численному ришению сингулярно возмущенного уравнения 74

Адылова Ф.Т.
Почему квантовые вычисления – это будущее искусственного интеллекта? . 87

Мухамедиева Д.Т., Раупова М.Х.
Квадратичное программирование в модели распределения ресурсов в сельском хозяйстве на основе квантового алгоритма 101

Шарипов Д.К., Саидов А.Д.
Модифицированный метод SHAP для интерпретируемого прогнозирования осложнений сердечно-сосудистых заболеваний 114

Contents

Khuzhayorov B.Kh., Fayziev B.M.
Mathematical model of transport of degrading substance in a two-zone porous medium 5

Salimova A.I., Parovik R.I.
ABMVAFracSim software package for studying the fractional van der Pol-Airy oscillator 17

Ravshanov N., Shadmanov I.U., Adizova Z.M.
Development of a mathematical model for monitoring and forecasting heat and moisture exchange processes during grain storage considering pest impact 30

Rustamov N., Amirtayev K.
A heuristic model for evaluating the mental qualities of a leader 46

Normurodov Ch.B., Murodov S.K., Shakaeva E.E.
Spectral-grid approximation of an ordinary differential equation with a small parameter at the highest derivative 54

Hayotov A.R., Berdimuradova U.A.
An optimal quadrature formula with derivatives for arbitrarily fixed nodes in the Sobolev space 64

Normurodov Ch.B., Shakaeva E.E., Ziyakulova Sh.A.
A discrete variant of the method pre-integration and its application to the numerical solution of a singularly perturbed equation 74

Adilova F.T.
Why are quantum computing technologies the future of artificial intelligence? . . 87

Mukhamediyeva D.T., Raupova M.H.
Quadratic programming in the resource allocation model in agriculture based on the quantum algorithm 101

Sharipov D.K., Saidov A.D.
Modified SHAP approach for interpretable prediction of cardiovascular complications 114

№ 2(64) 2025

ISSN 2181-8460

HISOBLASH VA AMALIY MATEMATIKA MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

RAQAMLI TEXNOLOGIYALAR VA
SUN'IY INTELLEKTNI RIVOJLANTIRISH
ILMIY-TADQIQOT INSTITUTI