

УДК 519.63

НОВЫЕ МОДЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ДЕФОРМАЦИЯХ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

¹Халджигитов А.А., ¹Адамбаев У.Э., ^{2*}Джумаёзов У.З., ¹Хасанова З.З.
*djumayozov@bk.ru

¹Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,
100174, Узбекистан, Ташкент, ул. Университетская, 4;

²Научно-исследовательский институт развития цифровых
технологий и искусственного интеллекта,
100125, Узбекистан, Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

В работе, предложены новые модельные уравнения в деформациях для ортотропных тел, из которых в частном случае следуют известные дифференциальные уравнения совместности деформаций для изотропных тел. Сформулирована замкнутая краевая задача теории упругости в деформациях для ортотропных тел. Дискретные уравнения составлены конечно-разностным методом, и решены итерационным методом. Достоверность результатов обоснована сравнением численных результатов, с решением задачи Тимошенко-Гудьера о растяжении пластины с параболической нагрузкой приложенных по противоположных сторонам.

Ключевые слова: деформация, уравнение совместности деформаций, уравнения равновесия, разностные схемы, итерационный метод.

Цитирование: Халджигитов А.А., Адамбаев У.Э., Джумаёзов У.З., Хасанова З.З. Новые модельные уравнения в деформациях для анизотропных тел // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2024. – № 2(56). – С. 17-29.

1 Введение

Обычно, задачи исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкций из анизотропных (композиционных) материалов, сводится к краевым задачам относительно перемещений. При этом, необходимые деформации и напряжения определяются по известным перемещениям.

Формулировка краевых задач относительно напряжений и деформаций с целью исследования НДС конструкций является актуальной задачей прикладной математики и математического моделирования и механики, и является объектом исследований многочисленных научных работ [1, 2]. Среди них можно отметить работы Б.Е. Победри [13, 16], где предложена новая постановка краевой задачи теории упругости в напряжениях. В частном случае, из новой постановки следует классические уравнения Бельтрами Митчелла. Работы Дмитриевского и Муравлевой посвящены также исследованию новой краевой задачи Победри в напряжениях. Динамические краевые задачи относительно напряжений рассмотрены в работах Коновалова [15].

Формулировка краевой задачи относительно деформаций является малоизученной областью механики деформируемого твердого тела. Уравнения совместности деформаций, в рамках уравнений совместности деформаций Сен-Венана [7] могут быть записаны в виде системы шести дифференциальных уравнений относительно деформаций [25, 26]. Эти уравнения в сочетании с тремя уравнениями равновесия и граничных условий составляют краевую задачу теории упругости в деформациях. Задача в новой постановке относительно деформаций также рассмотрена в работе Победри [13, 16]. Таким образом, формулировка и решение краевых задач теории

упругости относительно деформаций является важной и актуальной задачей механики деформируемого твердого тела.

Настоящая работа посвящена обобщению дифференциальных уравнений совместности деформаций для анизотропных тел. Формулировке краевых задач теории упругости анизотропных тел в деформациях, и обоснованию их достоверности на основе решения численных примеров и сравнением с известными результатами.

2 Основные уравнения плоских задач для изотропных тел

Обычно, краевая задача теории упругости в случае плоского напряженного состояния ($\sigma_{zz} = \sigma_{zy} = \sigma_{zx} = 0$) состоит из двух уравнений равновесия и одного условия совместности деформаций [4, 20] т.е.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (3)$$

Используя закон Гука для плоских задач [13]

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E_1} \sigma_x - \frac{\nu_1}{E} \sigma_y, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E_1} \sigma_y - \frac{\nu_1}{E} \sigma_x, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2\mu} \sigma_{xy}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$E_1 = \begin{cases} \frac{E}{1-\nu^2} & \text{состояние плоской деформации} \\ E & \text{плоское напряженное состояние} \end{cases} \quad \nu_1 = \begin{cases} \frac{\nu}{1-\nu} & \text{с.п.д.} \\ \nu & \text{п.н.с.} \end{cases}$$

и, уравнения равновесия (1)-(2), условие совместности деформаций (3) может быть записано в виде известного гармонического уравнения

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (5)$$

или в следующем виде относительно напряжений

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (6)$$

Действительно, подставляя закон Гука (4) в (3) т.е.

$$\frac{1}{E} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \frac{\nu}{E} \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{1}{E} \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \frac{\nu}{E} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = \frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (7)$$

и, с учетом следующих соотношений, найденных из уравнений равновесия

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}, \quad (8)$$

правую часть уравнения (7) можно преобразовать следующим образом т.е.

$$\frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{2}{E} \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\nu}{E} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right). \quad (9)$$

Тогда, подставляя (9) в (7), можно найти искомое выражение (6). Заметим, что соотношение (6) имеет ту же форму, как уравнение совместности деформаций (3) и независят от упругих констант материала.

Дифференцируя уравнение (1) по x и y , и учитывая (6) его можно записать в следующей форме

$$\nabla^2 \sigma_{11} + \frac{\partial^2 (\sigma_{11} + \sigma_{22})}{\partial x^2} = -2 \frac{\partial X_1}{\partial x}. \quad (10)$$

Аналогично, уравнение (2) можно представить в следующем виде

$$\nabla^2 \sigma_{22} + \frac{\partial^2 (\sigma_{11} + \sigma_{22})}{\partial y^2} = -2 \frac{\partial X_2}{\partial y}. \quad (11)$$

Складывая продифференцированные уравнения равновесия (1) и (2) по x и y , соответственно, можно найти следующее уравнение

$$\nabla^2 \sigma_{12} + \frac{\partial^2 (\sigma_{11} + \sigma_{22})}{\partial x \partial y} = - \left(\frac{\partial X_1}{\partial y} + \frac{\partial X_2}{\partial x} \right). \quad (12)$$

Заметим, что сложением двух уравнений (10) и (11), при отсутствии объемных сил, может быть найдено гармоническое уравнение (5).

2.1 Плоская задача в напряжениях: задача А

При отсутствии объемных сил, сумма уравнений (10)-(11) эквивалентны уравнению (5), решение которого обычно, сводится к решению бигармонического уравнения относительно функции напряжений Эри. При формулировке плоских краевых задач теории упругости удобно использовать уравнение (12) в сочетании с двумя уравнениями равновесия, которые составляют краевую задачу непосредственно относительно трех компонентов напряжений (**задача А**) т.е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} + X_1 &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + X_2 &= 0, \\ \nabla^2 \sigma_{12} + \frac{\partial^2 (\sigma_{11} + \sigma_{22})}{\partial x \partial y} &= - \left(\frac{\partial X_1}{\partial y} + \frac{\partial X_2}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} (\sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2)|_{\Gamma} &= S_1, \\ (\sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2)|_{\Gamma} &= S_2 \end{aligned} \quad (14)$$

и с дополнительными граничными условиями определенных на основе уравнения равновесия на границе области т.е.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} + X_1 \right) \Big|_{\Gamma} &= 0, \\ \left(\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + X_2 \right) \Big|_{\Gamma} &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

2.2 Плоская задача в деформациях для изотропных тел: задача В

Можно сформулировать краевую задачу относительно деформаций. Для чего, соотношение (12) с помощью закон Гука

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22}, \\ \sigma_{22} &= \lambda\varepsilon_{11} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{22}, \\ \sigma_{12} &= 2\mu\varepsilon_{12}\end{aligned}\tag{16}$$

можно выразить относительно деформаций.

Подставляя (16) в уравнение (12), можно найти дифференциальное уравнение относительно деформаций [1, 3]

$$\nabla^2\varepsilon_{12} + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} = -\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial X_1}{\partial y} + \frac{\partial X_2}{\partial x} \right), \quad \theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22},\tag{17}$$

которое совместно с двумя уравнениями равновесия записанных относительно деформаций, составляют плоскую задачу теории упругости относительно деформаций $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}$ [25, 26] т.е.

$$\begin{aligned}(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial y} &= 0, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y} + 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial x} &= 0, \\ \mu \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial y^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x\partial y} \right) &= 0\end{aligned}\tag{18}$$

с соответствующими граничными условиями

$$\begin{aligned}(\lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\mu\varepsilon_{11})n_1 + 2\mu\varepsilon_{12}n_2|_{\Gamma} &= S_1, \\ (2\mu\varepsilon_{12}n_1 + (\lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\mu\varepsilon_{22})n_2)|_{\Gamma} &= S_2.\end{aligned}\tag{19}$$

Для замкнутости краевой задачи (18-19), к ним следует добавить, уравнения равновесия (1-2) в качестве граничных условий, т.е.

$$\begin{aligned}\left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial y} \right]_{\Gamma} &= 0, \\ \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y} + 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial x} \right]_{\Gamma} &= 0,\end{aligned}\tag{20}$$

где Γ границе заданной области. Таким образом, уравнения (18-20) представляют плоскую краевую задачу теории упругости относительно деформаций (Задача В).

3 Дифференциальные уравнения деформаций для ортотропных тел

Обычно, при формулировке плоских задач теории упругости в напряжениях и деформациях, условие совместности Сен-Венана рассматривается совместно с двумя уравнениями равновесия. Известно из литературы, что плоские задачи обычно сводится к решению бигармонического уравнения относительно дополнительно введенных функций напряжений. А формулировка краевых задач относительно деформаций является мало изученной области математического моделирования. В предыдущем разделе было показано постановка краевой задачи в деформациях для изотропных тел. Модельные уравнения для анизотропных также могут быть построены

на основе уравнения (13). Уравнение (13) было получено с помощью уравнения равновесия и условия совместности деформаций, и не зависит от свойства тела, и они могут быть использованы для изотропных и анизотропных тел.

Поэтому с целью получения модельных уравнений для анизотропных тел, рассмотрим обобщенный закон Гука для ортотропных тел, который имеет следующий вид [2, 7, 16]

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= C_{1111}\varepsilon_{11} + C_{1122}\varepsilon_{22}, \\ \sigma_{22} &= C_{2211}\varepsilon_{11} + C_{2222}\varepsilon_{22}, \\ \sigma_{12} &= 2C_{1212}\varepsilon_{12}.\end{aligned}\tag{21}$$

Подставляя закон Гука в уравнение (17), можно найти следующее уравнение

$$2C_{1212}\nabla^2\varepsilon_{12} + (C_{1111} + C_{2211})\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x\partial y} + (C_{2222} + C_{1122})\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x\partial y} = -\left(\frac{\partial X_1}{\partial y} + \frac{\partial X_2}{\partial x}\right),\tag{22}$$

где, C_{ijkl} — тензор упругих постоянных для ортотропных тел, X_i —объемные силы.

Аналогично, подставляя (21) в продифференцированные уравнения равновесия (1) и (2) по x и y соответственно, с учетом условия совместности (3) могут быть найдены следующие уравнения

$$C_{1111}\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x^2} + C_{1212}\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial y^2} + (C_{1122} + C_{1212})\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x^2} = -\frac{\partial X_1}{\partial x},\tag{23}$$

$$C_{2222}\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial y^2} + C_{1212}\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x^2} + (C_{2211} + C_{1212})\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial y^2} = -2\frac{\partial X_2}{\partial y}.\tag{24}$$

Уравнения (22-24) представляют собой уравнения типа Бельтрами-Мичелла относительно деформаций для ортотропных тел. Связь между упругими постоянными и техническими константами имеют вид

$$\begin{aligned}C_{1111} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad C_{1122} = \frac{E_1\nu_{21}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\ C_{1212} &= G_{12} = \frac{E_1E_2}{E_1 + E_2(1 + 2\nu_{12})}, \\ C_{2211} &= \frac{E_2\nu_{12}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad C_{2222} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}},\end{aligned}\tag{25}$$

где E_1, E_2 —модули Юнга для ортотропных тел, ν_{12}, ν_{21} —постоянные Пуассона для ортотропных тел, G_{12} —модуль сдвига и между ними справедливо следующее условие симметричности

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}.$$

Известно, что в случае изотропных тел эти постоянные имеют вид

$$C_{1111} = C_{2222} = \lambda + 2\mu, \quad C_{1122} = C_{2211} = \lambda, \quad C_{1212} = \mu.\tag{26}$$

С учетом (26) из уравнений (22-24) следуют известные дифференциальные уравнений совместности деформаций для изотропных тел [1, 20]:

$$\begin{aligned}\nabla^2\varepsilon_{11} + \frac{\lambda + \mu}{\mu}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} &= -\frac{1}{2\mu}\frac{\partial X_1}{\partial x}, \\ \nabla^2\varepsilon_{22} + \frac{\lambda + \mu}{\mu}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} &= -\frac{1}{2\mu}\frac{\partial X_2}{\partial y}, \\ \nabla^2\varepsilon_{12} + \frac{\lambda + \mu}{\mu}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} &= -\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial X_1}{\partial y} + \frac{\partial X_2}{\partial x}\right).\end{aligned}\tag{27}$$

3.1 Плоская задача в деформациях для ортотропных тел

Следуя работам [17, 28], при формулировке двумерных краевых задач в деформациях, аналогично уравнениям Бельтрами-Мичелла, достаточно рассмотреть третье уравнение в сочетании с двумя уравнениями равновесия выраженных относительно деформаций (**Задача С**) т.е.

$$C_{1111} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + C_{1122} \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x} + 2C_{1212} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial y} + X_1 = 0, \quad (28)$$

$$C_{2222} \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + C_{2211} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y} + 2C_{1212} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + X_2 = 0, \quad (29)$$

$$2C_{1212} \nabla^2 \varepsilon_{12} + (C_{1111} + C_{2211}) \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x \partial y} + (C_{2222} + C_{1122}) \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x \partial y} = -(\frac{\partial X_1}{\partial y} + \frac{\partial X_2}{\partial x}). \quad (30)$$

Заметим, что первые два получены из уравнений равновесия (1) и (2) с учетом закона Гука (21).

Из соотношений (18) и (21) могут быть найдены граничные условия выраженные относительно деформаций:

$$\begin{aligned} ((C_{1111}\varepsilon_{11} + C_{1122}\varepsilon_{22})n_1 + 2C_{1212}\varepsilon_{12}n_2)|_{\Gamma} &= S_1, \\ (2C_{1212}\varepsilon_{12}n_1 + (C_{2211}\varepsilon_{11} + C_{2222}\varepsilon_{22})n_2)|_{\Gamma} &= S_2. \end{aligned} \quad (31)$$

Для замкнутости краевой задачи (28-31), к ним следует добавить следующие дополнительные граничные условия на основе уравнений равновесия (1-2) т.е.

$$\begin{aligned} \left[C_{1111} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + C_{1122} \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x} + 2C_{1212} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial y} + X_1 \right] |_{\Gamma} &= 0, \\ \left[C_{2222} \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + C_{2211} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y} + 2C_{1212} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + X_2 \right] |_{\Gamma} &= 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Таким образом, уравнения (28-32) представляют плоскую краевую задачу теории упругости ортотропных тел в деформациях. Если в краевой задаче С, в качестве уравнений (28) и (29) использовать следующие продифференцированные по x и y уравнения равновесия т.е.

$$C_{1111} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x^2} + C_{1122} \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x^2} + 2C_{1212} \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial X_1}{\partial x} = 0, \quad (33)$$

$$C_{2222} \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial y^2} + C_{2211} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial y^2} + 2C_{1212} \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial X_2}{\partial y} = 0, \quad (34)$$

то получим другую краевую задачу в деформациях (**задача Д**).

Граничные условия для краевых задач С и Д имеют (31-32) рассмотрим для прямоугольной области. Пусть прямоугольник находится под действием растягивающих усилий с двух сторон по оси Y , остальные стороны свободны от нагрузок т.е.

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0, l_1 : \sigma_{11}|_{x=0, l_1} &= 0, \quad \sigma_{12}|_{x=0, l_1} = 0, \\ \text{при } y = 0, l_2 : \sigma_{22}|_{y=0, l_2} &= 0, \quad \sigma_{21}|_{y=0, l_2} = 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Тогда с помощью закона Гука ортотропных тел можно найти следующие выражения для деформаций

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{22}|_{y=0} &= \frac{1}{E_2} \sigma_{22}, \\
\varepsilon_{12}|_{y=0} &= 0, \\
\varepsilon_{22}|_{y=l_2} &= -\frac{1}{E_2} \sigma_{22}, \\
\varepsilon_{12}|_{y=l_2} &= 0, \\
\varepsilon_{11}|_{x=0} &= 0, \\
\varepsilon_{21}|_{x=0} &= 0, \\
\varepsilon_{11}|_{x=l_1} &= 0, \\
\varepsilon_{21}|_{x=l_1} &= 0.
\end{aligned} \tag{36}$$

Дополнительные граничные условия (32) при $y = 0, l_2$ для ε_{11} можно найти следующие граничные условия

$$\left[\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y} \right] |_{y=0, l_2} = - \left[\frac{2C_{1212}}{C_{1122}} \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial x} \right] |_{y=0, l_2}, \tag{37}$$

заметим, что ε_{22} в первом слагаемом граничного условия (32)₂ при $y = 0, l_2$ не зависит от аргумента y . Аналогично, при $x = 0, l_1$ из уравнения (32)₁ для ε_{22} можно найти следующее условие

$$\left[\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x} \right] |_{x=0, l_1} = - \left[\frac{2C_{1212}}{C_{2211}} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial y} \right] |_{x=0, l_1}. \tag{38}$$

4 Конечно-разностные уравнения и методы их решения

При выводе дифференциальных уравнений (28-29), уравнения равновесия были использованы в продифференцированном виде относительно x и y аналогично. Поэтому, в краевой задаче С, использование продифференцированных уравнений равновесия не вызывают сомнения.

Теперь переходим к численному решению краевой задачи (28-32). Для чего краевую задачу рассмотрим в прямоугольнике $0 \leq x \leq l_1, \quad 0 \leq y \leq l_2$ и, проведём два семейства параллельных прямых $x_i = ih_1 (i = \overline{0, n})$, $y_j = jh_2 (j = \overline{0, n})$, где $h_k = l_k/N_k$, $k = 1, 2$, для построения сеточной области.

$$\begin{aligned}
C_{1111} \frac{\varepsilon_{i+1,j}^{11} - 2\varepsilon_{i,j}^{11} + \varepsilon_{i-1,j}^{11}}{h_1^2} + C_{1122} \frac{\varepsilon_{i+1,j}^{22} - 2\varepsilon_{i,j}^{22} + \varepsilon_{i-1,j}^{22}}{h_1^2} + \\
C_{1212} \frac{\varepsilon_{i+1,j+1}^{12} - \varepsilon_{i-1,j+1}^{12} - \varepsilon_{i+1,j-1}^{12} + \varepsilon_{i-1,j-1}^{12}}{2h_1h_2} = 0, \\
C_{2222} \frac{\varepsilon_{i,j+1}^{22} - 2\varepsilon_{i,j}^{22} + \varepsilon_{i,j-1}^{22}}{h_2^2} + C_{2211} \frac{\varepsilon_{i,j+1}^{11} - 2\varepsilon_{i,j}^{11} + \varepsilon_{i,j-1}^{11}}{h_2^2} + \\
C_{2121} \frac{\varepsilon_{i+1,j+1}^{12} - \varepsilon_{i-1,j+1}^{12} - \varepsilon_{i+1,j-1}^{12} + \varepsilon_{i-1,j-1}^{12}}{2h_1h_2} = 0.
\end{aligned} \tag{39}$$

Разрешая уравнения (39) относительно $\varepsilon_{i,j}^{11}, \varepsilon_{i,j}^{22}$ можно найти, что

$$\begin{aligned}\varepsilon_{i,j}^{11} &= \left[C_{1111} \frac{\varepsilon_{i+1,j}^{11} + \varepsilon_{i-1,j}^{11}}{h_1^2} + C_{1122} \frac{\varepsilon_{i+1,j}^{22} - 2\varepsilon_{i,j}^{22} + \varepsilon_{i-1,j}^{22}}{h_1^2} + \right. \\ &\quad \left. + C_{1212} \frac{\varepsilon_{i+1,j+1}^{12} - \varepsilon_{i-1,j+1}^{12} - \varepsilon_{i+1,j-1}^{12} + \varepsilon_{i-1,j-1}^{12}}{2h_1h_2} \right] / \frac{2C_{1111}}{h_1^2}, \\ \varepsilon_{i,j}^{22} &= \left[C_{2222} \frac{\varepsilon_{i,j+1}^{22} + \varepsilon_{i,j-1}^{22}}{h_2^2} + C_{2211} \frac{\varepsilon_{i,j+1}^{11} - 2\varepsilon_{i,j}^{11} + \varepsilon_{i,j-1}^{11}}{h_2^2} + \right. \\ &\quad \left. + C_{2121} \frac{\varepsilon_{i+1,j+1}^{12} - \varepsilon_{i-1,j+1}^{12} - \varepsilon_{i+1,j-1}^{12} + \varepsilon_{i-1,j-1}^{12}}{2h_1h_2} \right] / \frac{2C_{2222}}{h_2^2}.\end{aligned}\quad (40)$$

В уравнении (30), заменяя производные с соответствующими разностными отношениями получим следующее дискретное уравнение

$$\begin{aligned}2C_{1212} \frac{\varepsilon_{i+1,j}^{12} - 2\varepsilon_{i,j}^{12} + \varepsilon_{i-1,j}^{12}}{h_1^2} + (C_{1111} + C_{1122}) \frac{\varepsilon_{i+1,j+1}^{11} - \varepsilon_{i+1,j-1}^{11} - \varepsilon_{i-1,j+1}^{11} + \varepsilon_{i-1,j-1}^{11}}{4h_1h_2} + \\ + 2C_{1212} \frac{\varepsilon_{i,j+1}^{12} - 2\varepsilon_{i,j}^{12} + \varepsilon_{i,j-1}^{12}}{h_2^2} + (C_{2222} + C_{2211}) \frac{\varepsilon_{i+1,j+1}^{22} - \varepsilon_{i+1,j-1}^{22} - \varepsilon_{i-1,j+1}^{22} + \varepsilon_{i-1,j-1}^{22}}{4h_1h_2} = 0.\end{aligned}\quad (41)$$

Разрешая последнее уравнение относительно $\varepsilon_{i,j}^{12}$ можно найти, что

$$\begin{aligned}\varepsilon_{i,j}^{12} &= \left(\frac{C_{1111} + C_{1122}}{2C_{1212}} \frac{\varepsilon_{i+1,j+1}^{11} - \varepsilon_{i+1,j-1}^{11} - \varepsilon_{i-1,j+1}^{11} + \varepsilon_{i-1,j-1}^{11}}{4h_1h_2} + \frac{\varepsilon_{i+1,j}^{12} + \varepsilon_{i-1,j}^{12}}{h_1^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varepsilon_{i,j+1}^{12} + \varepsilon_{i,j-1}^{12}}{h_2^2} + \frac{C_{2222} + C_{2211}}{2C_{2121}} \frac{\varepsilon_{i+1,j+1}^{22} - \varepsilon_{i+1,j-1}^{22} - \varepsilon_{i-1,j+1}^{22} + \varepsilon_{i-1,j-1}^{22}}{4h_1h_2} \right) / \left(\frac{2(h_1^2 + h_2^2)}{h_1^2h_2^2} \right).\end{aligned}\quad (42)$$

Таким образом, нетрудно заметить, что конечно-разностных уравнений рекуррентного типа (40) и (42) позволяют найти искомые величины $\varepsilon_{i,j}^{11}$, $\varepsilon_{i,j}^{22}$ и $\varepsilon_{i,j}^{12}$ на основе следующего итерационного процесса [3]

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11i,j}^{k+1} &= \left[C_{1111} \frac{\varepsilon_{11i+1,j}^k + \varepsilon_{11i-1,j}^k}{h_1^2} + C_{1122} \frac{\varepsilon_{22i+1,j}^k - 2\varepsilon_{22i,j}^k + \varepsilon_{22i-1,j}^k}{h_1^2} + \right. \\ &\quad \left. + C_{1212} \frac{\varepsilon_{12i+1,j+1}^k - \varepsilon_{12i-1,j+1}^k - \varepsilon_{12i+1,j-1}^k + \varepsilon_{12i-1,j-1}^k}{2h_1h_2} \right] / \frac{2C_{1111}}{h_1^2}, \\ \varepsilon_{22i,j}^{k+1} &= \left[C_{2222} \frac{\varepsilon_{22i,j+1}^k + \varepsilon_{22i,j-1}^k}{h_2^2} + C_{2211} \frac{\varepsilon_{11i,j+1}^k - 2\varepsilon_{11i,j}^k + \varepsilon_{11i,j-1}^k}{h_2^2} + \right. \\ &\quad \left. + C_{2121} \frac{\varepsilon_{12i+1,j+1}^k - \varepsilon_{12i-1,j+1}^k - \varepsilon_{12i+1,j-1}^k + \varepsilon_{12i-1,j-1}^k}{2h_1h_2} \right] / \frac{2C_{2222}}{h_2^2}, \\ \varepsilon_{12i,j}^{k+1} &= \left(\frac{C_{1111} + C_{1122}}{2C_{1212}} \frac{\varepsilon_{11i+1,j+1}^k - \varepsilon_{11i+1,j-1}^k - \varepsilon_{11i-1,j+1}^k + \varepsilon_{11i-1,j-1}^k}{4h_1h_2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varepsilon_{12i+1,j}^k + \varepsilon_{12i-1,j}^k}{h_1^2} + \frac{\varepsilon_{12i,j+1}^k + \varepsilon_{12i,j-1}^k}{h_2^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{C_{2222} + C_{2211}}{2C_{2121}} \frac{\varepsilon_{22i+1,j+1}^k - \varepsilon_{22i+1,j-1}^k - \varepsilon_{22i-1,j+1}^k + \varepsilon_{22i-1,j-1}^k}{4h_1h_2} \right) / \left(\frac{2(h_1^2 + h_2^2)}{h_1^2h_2^2} \right).\end{aligned}\quad (43)$$

где k - количества итерации. Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_{22i0}^{(0)} &= \frac{1}{E_2} \sigma_{22}, & \varepsilon_{12i0}^{(0)} &= 0, \\ \varepsilon_{22iN_2}^{(0)} &= -\frac{1}{E_2} \sigma_{22}, & \varepsilon_{12iN_2}^{(0)} &= 0,\end{aligned}\tag{44}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{110j}^{(0)} &= 0, & \varepsilon_{210j}^{(0)} &= 0, \\ \varepsilon_{11N_1j}^{(0)} &= 0, & \varepsilon_{21N_1j}^{(0)} &= 0,\end{aligned}\tag{45}$$

и дополнительные граничные условия для $\varepsilon_{11}^{(k)}|_{y=0,l_2}$ и $\varepsilon_{22}^{(k)}|_{x=0,l_1}$ находятся из уравнений (37) и (38), и имеют вид:

при $y = 0$ и $y = l_2$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11i0}^{(0)} &= \varepsilon_{11i1}^{(0)} + \frac{C_{1212}h_2}{C_{1122}} \frac{\varepsilon_{12i+1,0}^{(0)} - \varepsilon_{12i-1,0}^{(0)}}{h_1}, \\ \varepsilon_{11iN_2}^{(0)} &= \varepsilon_{11i,N_2-1}^{(0)} - \frac{C_{1212}h_2}{C_{1122}} \frac{\varepsilon_{12i+1,N_2}^{(0)} - \varepsilon_{12i-1,N_2}^{(0)}}{h_1},\end{aligned}\tag{46}$$

при $x = 0$ и $x = l_1$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{220,j}^{(0)} &= \varepsilon_{221,j}^{(0)} + \frac{C_{1212}h_1}{C_{1122}} \frac{\varepsilon_{0,j+1}^{12} - \varepsilon_{0,j-1}^{12}}{h_2}, \\ \varepsilon_{22N_1,j}^{(0)} &= \varepsilon_{22N_1-1,j}^{(0)} - \frac{C_{1212}h_1}{C_{1122}} \frac{\varepsilon_{12N_1,j+1}^{(0)} - \varepsilon_{12N_1,j-1}^{(0)}}{h_2}.\end{aligned}\tag{47}$$

5 Тестовые задачи

Этот раздел посвящен обоснованию справедливости сформулированной краевой задачи ортотропных тел в деформациях и предлагаемого численного метода решения конечно-разностных уравнений. Заметим, что так называемые дополнительные граничные условия по сути являются уравнениями относительно искомых величин в граничных узловых точках. Таким образом, уравнения, определенные во внутренних точках и на границе заданной области, как система уравнений решаются методом последовательных приближений. При нулевом приближении $k = 0$ искомые величины считаются тривиальными. На основе изложенной методики решены ряд двумерные задачи для прямоугольной области с различными граничными условиями.

Пусть прямоугольная пластина размером $(2a, 2b)$ находится под действием одноосной нагрузки параболической формы приложенных на противоположных сторонах перпендикулярных оси. Остальные грани свободны от нагрузок т.е.

$$\text{при } x = \pm a : \sigma_{11} = S_0(1 - \frac{y^2}{a^2}), \quad \sigma_{12} = 0,\tag{48}$$

$$\text{при } y = \pm b : \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{12} = 0.\tag{49}$$

Исходные данные параметров имели следующие значения:

$$\begin{aligned}C_{1111} &= C_{2222} = \lambda + 2\mu, \quad C_{1122} = C_{2211} = \lambda, \quad C_{1212} = \mu, \\ \lambda &= 0.78, \quad \mu = 0.5, \quad S = 1, \quad N_1 = N_2 = 10, \quad a = 1, \quad b = 1, \quad h = 0.2.\end{aligned}\tag{50}$$

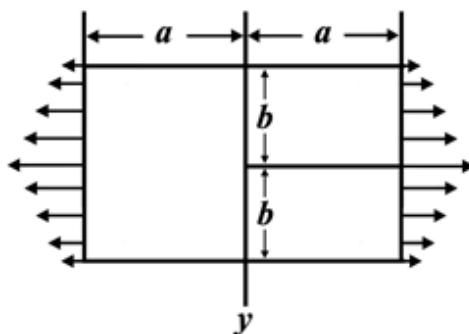


Рис. 1 Растяжение прямоугольной пластины под действием силы параболической формы

Заметим, что для сравнения с известными результатами и обоснования справедливости предложенных модельных уравнений ортотропных тел, упругие константы которых (50), специально выбраны для изотропных тел [6].

В таблице 1 приведены численные значения компоненты тензора деформаций ε_{11} полученные по соотношениям (43-47) согласно итерационному методу.

Таблица 1 Значения деформаций ε_{11} по методу итерации для задачи С.

	$x=-1$	$x=-0.8$	$x=-0.6$	$x=-0.4$	$x=-0.2$	$x=0.0$	$x=0.2$	$x=0.4$	$x=0.6$	$x=0.8$	$x=1$
$y=-1$	0.0000	0.2418	0.2394	0.2371	0.2362	0.2353	0.2362	0.2371	0.2394	0.2418	0.0000
$y=-0.8$	0.2447	0.2418	0.2394	0.2371	0.2362	0.2353	0.2362	0.2371	0.2394	0.2418	0.2447
$y=-0.6$	0.4350	0.4298	0.4256	0.4214	0.4198	0.4182	0.4198	0.4214	0.4256	0.4298	0.4350
$y=-0.4$	0.5710	0.5642	0.5587	0.5532	0.5510	0.5489	0.5510	0.5532	0.5587	0.5642	0.5710
$y=-0.2$	0.6525	0.6448	0.6385	0.6322	0.6298	0.6274	0.6298	0.6322	0.6385	0.6448	0.6525
$y=0.0$	0.6797	0.6716	0.6651	0.6585	0.6560	0.6535	0.6560	0.6585	0.6651	0.6716	0.6797
$y=0.2$	0.6525	0.6448	0.6385	0.6322	0.6298	0.6274	0.6298	0.6322	0.6385	0.6448	0.6525
$y=0.4$	0.5710	0.5642	0.5587	0.5532	0.5510	0.5489	0.5510	0.5532	0.5587	0.5642	0.5710
$y=0.6$	0.4350	0.4298	0.4256	0.4214	0.4198	0.4182	0.4198	0.4214	0.4256	0.4298	0.4350
$y=0.8$	0.2447	0.2418	0.2394	0.2371	0.2362	0.2353	0.2362	0.2371	0.2394	0.2418	0.2447
$y=1$	0.0000	0.2418	0.2394	0.2371	0.2362	0.2353	0.2362	0.2371	0.2394	0.2418	0.0000

В таблице 2. приведены значения компоненты напряжений σ_{11} вычисленные согласно закону Гука по численным значениям деформаций ε_{ij}^{11} , ε_{ij}^{22} полученных по решению задачи (43-47).

Таблица 2 Значения напряжения σ_{11} для задачи С.

	$x=-1$	$x=-0.8$	$x=-0.6$	$x=-0.4$	$x=-0.2$	$x=0.0$	$x=0.2$	$x=0.4$	$x=0.6$	$x=0.8$	$x=1$
$y=-1$	0.0000	0.3557	0.3522	0.3488	0.3474	0.3461	0.3474	0.3488	0.3522	0.3557	0.0000
$y=-0.8$	0.3600	0.3557	0.3522	0.3488	0.3474	0.3461	0.3474	0.3488	0.3522	0.3557	0.3600
$y=-0.6$	0.6400	0.6324	0.6262	0.6200	0.6177	0.6153	0.6177	0.6200	0.6262	0.6324	0.6400
$y=-0.4$	0.8400	0.8300	0.8219	0.8138	0.8107	0.8076	0.8107	0.8138	0.8219	0.8300	0.8400
$y=-0.2$	0.9600	0.9486	0.9393	0.9300	0.9265	0.9229	0.9265	0.9300	0.9393	0.9486	0.9600
$y=0.0$	1.0000	0.9881	0.9784	0.9688	0.9651	0.9614	0.9651	0.9688	0.9784	0.9881	1.0000
$y=0.2$	0.9600	0.9486	0.9393	0.9300	0.9265	0.9229	0.9265	0.9300	0.9393	0.9486	0.9600
$y=0.4$	0.8400	0.8300	0.8219	0.8138	0.8107	0.8076	0.8107	0.8138	0.8219	0.8300	0.8400
$y=0.6$	0.6400	0.6324	0.6262	0.6200	0.6177	0.6153	0.6177	0.6200	0.6262	0.6324	0.6400
$y=0.8$	0.3600	0.3557	0.3522	0.3488	0.3474	0.3461	0.3474	0.3488	0.3522	0.3557	0.3600
$y=1$	0.0000	0.3557	0.3522	0.3488	0.3474	0.3461	0.3474	0.3488	0.3522	0.3557	0.0000

В таблицах 3 и 4 для сравнения, приведены значения компонентов тензора напряжений σ_{11} и деформаций ε_{11} согласно работе Тимошенко-Гудьера [6].

Таблица 3 Таблица 3. Значения напряжений σ_{11} по Тимошенко-Гудьера [6]

	$x=-1$	$x=-0.8$	$x=-0.6$	$x=-0.4$	$x=-0.2$	$x=0.0$	$x=0.2$	$x=0.4$	$x=0.6$	$x=0.8$	$x=1$
$y=-1$	0.0000	0.0441	0.1394	0.2402	0.3137	0.3404	0.3137	0.2402	0.1394	0.0441	0.0000
$y=-0.8$	0.3600	0.3803	0.4241	0.4705	0.5043	0.5166	0.5043	0.4705	0.4241	0.3803	0.3600
$y=-0.6$	0.6400	0.6418	0.6456	0.6496	0.6525	0.6536	0.6525	0.6496	0.6456	0.6418	0.6400
$y=-0.4$	0.8400	0.8285	0.8037	0.7776	0.7584	0.7515	0.7584	0.7776	0.8037	0.8285	0.8400
$y=-0.2$	0.9600	0.9406	0.8987	0.8543	0.8220	0.8102	0.8220	0.8543	0.8987	0.9406	0.9600
$y=0.0$	1.0000	0.9779	0.9303	0.8799	0.8431	0.8298	0.8431	0.8799	0.9303	0.9779	1.0000
$y=0.2$	0.9600	0.9406	0.8987	0.8543	0.8220	0.8102	0.8220	0.8543	0.8987	0.9406	0.9600
$y=0.4$	0.8400	0.8285	0.8037	0.7776	0.7584	0.7515	0.7584	0.7776	0.8037	0.8285	0.8400
$y=0.6$	0.6400	0.6418	0.6456	0.6496	0.6525	0.6536	0.6525	0.6496	0.6456	0.6418	0.6400
$y=0.8$	0.3600	0.3803	0.4241	0.4705	0.5043	0.5166	0.5043	0.4705	0.4241	0.3803	0.3600
$y=1$	0.0000	0.0441	0.1394	0.2402	0.3137	0.3404	0.3137	0.2402	0.1394	0.0441	0.0000

Таблица 4 Значения деформаций ϵ_{11} по Тимошенко-Гудьера [6].

	$x=-1$	$x=-0.8$	$x=-0.6$	$x=-0.4$	$x=-0.2$	$x=0.0$	$x=0.2$	$x=0.4$	$x=0.6$	$x=0.8$	$x=1$
$y=-1$	0.0000	0.0300	0.0948	0.1633	0.2132	0.2314	0.2132	0.1633	0.0948	0.0300	0.0000
$y=-0.8$	0.2297	0.2516	0.2877	0.3237	0.3494	0.3586	0.3494	0.3237	0.2877	0.2516	0.2297
$y=-0.6$	0.3876	0.4144	0.4369	0.4539	0.4644	0.4680	0.4644	0.4539	0.4369	0.4144	0.3876
$y=-0.4$	0.4893	0.5256	0.5431	0.5498	0.5515	0.5516	0.5515	0.5498	0.5431	0.5256	0.4893
$y=-0.2$	0.5459	0.5903	0.6066	0.6084	0.6056	0.6041	0.6056	0.6084	0.6066	0.5903	0.5459
$y=0.0$	0.5640	0.6115	0.6277	0.6282	0.6240	0.6219	0.6240	0.6282	0.6277	0.6115	0.5640
$y=0.2$	0.5459	0.5903	0.6066	0.6084	0.6056	0.6041	0.6056	0.6084	0.6066	0.5903	0.5459
$y=0.4$	0.4893	0.5256	0.5431	0.5498	0.5515	0.5516	0.5515	0.5498	0.5431	0.5256	0.4893
$y=0.6$	0.3876	0.4144	0.4369	0.4539	0.4644	0.4680	0.4644	0.4539	0.4369	0.4144	0.3876
$y=0.8$	0.2297	0.2516	0.2877	0.3237	0.3494	0.3586	0.3494	0.3237	0.2877	0.2516	0.2297
$y=1$	0.0000	0.0300	0.0948	0.1633	0.2132	0.2314	0.2132	0.1633	0.0948	0.0300	0.0000

Сравнения напряжений σ_{11} (таблицах 2 и 3) и деформаций ϵ_{11} (таблицах 1 и 4) показывают, что численные результаты очень близки, чем обеспечивается справедливость сформулированных краевых задач для ортотропных тел, а также достоверность полученных численных результатов. При решении задачи С потребовалось 73 итераций.

6 Заключение

В работе, дано обобщение дифференциальные уравнений деформаций для анизотропных тел. В изотропном случае, из которых следуют известные дифференциальные уравнения совместности деформаций. Сформулирована краевая задача в деформациях для ортотропных тел. Для обеспечения замкнутости краевой задачи уравнения равновесия, выраженные относительно деформаций рассмотрены в качестве граничных условий. Дискретный аналог краевой задачи составлен конечно-разностным методом. Конечно-разностные уравнения записаны в разрешенном относительно искомым величин во внутренних и граничных узловых точках форме и решены итерационным методом. Достоверность результатов обеспечена сравнением численных результатов с известными решениями задачи о растяжении пластины с параболической нагрузкой.

Литература

- [1] Novatsky V. The Theory of Elasticity. – M.: Mir, 1975. – 872 p.
- [2] Pobedrya B.E. Numerical Methods in the Theory of Elasticity and Plasticity. – M.: Moscow State University, 1996. – 343 p.
- [3] Samarski A.A., Nikolaev E.S. Methods for Solving Grid Equations. – Moscow: Science, 1978. – 592 p.

- [4] *Li S., Gupta A., Markenscoff X.* Conservation Laws of Linear Elasticity in Stress Formulations // Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – Vol. 461. – No. 2053. – P. 99-116.
- [5] *Ike C.C.* On Maxwell's Stress Functions for Solving Three Dimensional Elasticity Problems in the Theory of Elasticity // JCAMECH. – 2018. – Vol. 49, No. 2. – P. 342-350. – DOI: 10.22059/JCAMECH.2018.266787.330.
- [6] *Timoshenko S., Goodier J.N.* Theory of Elasticity. – Boston: McGraw-Hill, 1970.
- [7] *Pobedrya B.E., Kholmatov T.* On the Existence and Uniqueness of Solutions in the Elasticity Theory Problem with Stresses // Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 1. (Matematika mekhanika). – No. 1. – P. 50-51.
- [8] *Patnaik S.N., Pai S.S., Hopkins D.A.* Compatibility Condition in Theory of Solid Mechanics (Elasticity, Structures, and Design Optimization) // Archives of Computational Methods in Engineering. – 2007. – No. 14(4). – P. 431-457. – DOI: 10.1007/s11831-007-9011-9.
- [9] *Muravleva L.V.* Candidate's Dissertation in Mathematical Physics. – Moscow: Mosk. Gos. Univ., 1986.
- [10] *Filonenko-Borodich M.* Theory of Elasticity. – University Press of the Pacific, 2003. – 396 p.
- [11] *Akhmedov A.B., Kholmatov T.* Solution some Problems of Parallelepiped Equilibrium in Stresses // DAN. UZSSR. – 1982. – N6. – P. 7-9.
- [12] *Georgiyevskii D.V., Pobedrya B.E.* The Number of Independent Compatibility Equations in the Mechanics of Deformable Solids // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2004. – Vol. 68. – P. 941-946.
- [13] *Pobedrya B.E., Georgiyevskii D.V.* Equivalence of Formulations for Problems in Elasticity Theory in Terms of Stresses // Russian Journal of Mathematical physics. – 2006. – DOI: 10.1134/S1061920806020063.
- [14] *Ryzhuk E.I.* Direct Coordinate-Free Derivation of the Compatibility Equation for Finite Strains // Mechanics of Solids. – 2014. – No. 49(4). – P. 382-388.
- [15] *Kovalov A.N.* Analysis of the Problems of Elasticity in Terms of Stresses. – Novosibirsk: Novosibirsk State Univ. Publ., 1979. – 92 p. (In Russian).
- [16] *Pobedrya B.E.* A New Formulations of the Problem Mechanics of a Deformable Solid in Stresses // Soviet math. Dokl. – 1980. – No. 22(1). – P. 88-91.
- [17] *Borodachev N.M.* Stress Solutions to the Three-Dimensional Problem of Elasticity // Intern. Appl. Mech. – 2006. – No. 42(8). – P. 849-878.
- [18] *Rozhkova E.V.* On Solutions of the problem in Stresses with the Use of Maxwell Stress Functions // Mechanics of Solids. – 2009. – No. 44(1). – P. 526-536.
- [19] *Georgiyevskii D.V.* General Solutions of Weakened Equations in Terms of Stresses in the Theory of Elasticity // Moscow Univ. Mech. Bull. – 2013. – No. 68(1). – P. 1-7.
- [20] *Georgiyevskii D.V., Pobedrya B.E.* On the Compatibility Equations in Terms of Stresses in Many-Dimensional Elastic Medium // Russ. J. Math. Phys. – 2015. – No. 22(1). – P. 6-8.
- [21] *Pobedrya B.E.* On Static Problem in terms of Stresses // Moscow Univ. Mech. Bull. – 2003. – No. 58(3). – P. 8-14.
- [22] *Khaldjigitov A.A., Djumayozov U.Z., Sagdullayeva D.A.* Numerical Solution of Coupled Thermo-Elastic-Plastic Dynamic Problems // Mathematical Modelling of Engineering Problems. – 2021. – Vol. 8, No. 4. – P. 510-518. – DOI: 10.18280/mmep.080403.
- [23] *Khaldjigitov A.A., Djumayozov U.Z.* Numerical Solution of Nonlinear Elasticity Problems in Finite Deformations. The 15TH University // AIP Conference Proceedings. – 2023. – Vol. 2746. – 060018. – DOI: 10.1063/5.0152771.

- [24] *Khaldjigitov A., Kalandarov A., Djumayozov U.* Finite-Difference Equations for 2D Elasticity Problems on a Non-Uniform Grid // AIP Conference Proceedings. – 2022. – Vol. 2637. – 030005. – DOI: 10.1063/5.0118482.
- [25] *Khaldjigitov A., Djumayozov U.* Numerical Solution of the Two-Dimensional Elasticity Problem in Strains // Mathematics and Statistics. – 2022. – Vol. 10, No. 5. – P. 1081-1088. – DOI: 10.13189/ms.2022.100518.
- [26] *Turimov D. et al.* Formulation and Numerical Solution of Plane Problems of the Theory of Elasticity in Strains // Mathematics. – 2024. – Vol. 12, No. 71. – DOI: 10.3390/math12010071.
- [27] *Халджигитов А.А., Джумаёзов У.З., Каландаров А.А.* Численное моделирование связанной задачи термоупругости в деформациях // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2023. – №6(53). – С. 114-122.
- [28] *Васицку К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.

Поступила в редакцию 04.04.2024

UDC 519.63

NEW MODEL STRAINS EQUATIONS FOR ANISOTROPIC BODIES

¹*Khaldjigitov A.A.,* ¹*Adambaev U.E.,* ^{2*}*Djumayozov U.Z.,* ¹*Khasanova Z.Z.*
*djumayozov@bk.ru

¹National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek,
4, University str., Tashkent, 100174 Uzbekistan;

²Digital Technologies and Artificial intelligence Development Research Institute,
100124, 17A, Buz-2, Mirzo-Ulugbek district, Tashkent, Uzbekistan.

In the work, new model equations in deformations for orthotropic bodies are proposed, from which, in a particular case, the well-known differential equations for the compatibility of deformations for isotropic bodies follow. A closed boundary value problem of the theory of elasticity in deformations for orthotropic bodies is formulated. Discrete equations are compiled using the finite-difference method and solved using the iterative method. The reliability of the results is justified by comparing the numerical results with the solution of the Timoshenko-Goodyear problem of stretching a plate with a parabolic load applied on opposite sides.

Keywords: strain, strain compatibility equation, equilibrium equations, difference schemes, iterative method.

Citation: Khaldjigitov A.A., Adambaev U.E., Djumayozov U.Z., Khasanova Z.Z. 2024. New model strains equations for anisotropic bodies. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 2(56): 17-29.

HISOBLASH VA AMALIY МАТЕМАТИКА MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
PROBLEMS OF COMPUTATIONAL
AND APPLIED MATHEMATICS



ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 2(56) 2024

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Азамов А.А., Арипов М.М., Шадиметов Х.М.

Ответственный секретарь:

Ахмедов Д.Д.

Редакционный совет:

Азамова Н.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Бурнашев В.Ф.,
Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия), Игнатьев Н.А.,
Ильин В.П. (Россия), Исмаилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия),
Карачик В.В. (Россия), Курбонов Н.М., Маматов Н.С., Мирзаев Н.М.,
Мирзаева Г.Р., Мухамадиев А.Ш., Назирова Э.Ш., Нормуродов Ч.Б.,
Нуралиев Ф.М., Опанасенко В.Н. (Украина), Расулмухамедов М.М., Расулов А.С.,
Садуллаева Ш.А., Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А.,
Хамдамов Р.Х., Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Чье Ен Ун (Россия),
Шабозов М.Ш. (Таджикистан), Dimov I. (Болгария), Li Y. (США),
Mascagni M. (США), Min A. (Германия), Schaumburg H. (Германия),
Singh D. (Южная Корея), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(99871) 263-41-98.

E-mail: journals@airi.uz.

Сайт: www.pvpm.uz.

Дизайн и компьютерная вёрстка:

Шарилов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 30.04.2024 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №2. Тираж 100 экз.

Содержание

Алимов Х.Т., Паровик Р.И.

Некоторые аспекты численного анализа дробной математической модели
Макшерри для описания искусственной ЭКГ 7

Халджигитов А.А., Адамбаев У.Э., Джумаёзов У.З., Хасанова З.З.

Новые модельные уравнения в деформациях для анизотропных тел 17

Нуралиев Ф.М., Султанов Б.Ж., Дауытова Ж.К.

Математическое моделирование процессов деформированного состояния сет-
чатых пластин со сложной формой 30

Равшанов Н., Таштемирова Н., Каршиев Д.А.

Моделирование процесса распространения аэрозольных частиц в погранич-
ном слое атмосферы с учетом их поглощения и захвата растительным по-
кровом 41

Назирова Э.Ш., Неъматов А., Исмаилов Ш., Артикбаева Г.

Математическое моделирование фильтрации газа с учетом изменения пори-
стости породы в зависимости от давления 58

Равшанов Н., Холматова И.И., Курбонов Н.М., Исламов Ю.Н.

Математическое моделирование процесса подземного выщелачивания с уче-
том изменения гидродинамических параметров пористой среды 72

Адылова Ф.Т., Давронов Р.Р.

Генеративный искусственный интеллект для разработки лекарств de novo:
новые рубежи в области молекул 85

Мадатов Х.А.

Математическая модель автоматического определения несущественных слов
текстов на узбекском языке 99

Сулюкова Л.Ф., Ёркулов Б.А.

Методика оценки имеющегося уровня информационной безопасности обра-
зовательной информационной системы 106