

УДК 519.622.2

# ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ABMVAFRACSIM ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДРОБНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ВАН ДЕР ПОЛЯ-ЭЙРИ\*

<sup>1</sup>*Салимова А.И.,* <sup>2</sup>*Паровик Р.И.*

*parovik@ikir.ru*

<sup>1</sup>Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,

г. Ташкент, Университетская, 4, Узбекистан;

<sup>2</sup>Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН,

Камчатский край, с. Паратунка, ул. Мирная, д. 7, Россия.

В статье с помощью программного комплекса ABMVAFracSim, разработанного на языке программирования Python, исследуется дробная колебательная система Ван дер Поля-Эйри. Дробный осциллятор Ван дер Поля-Эйри представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение с производными дробных порядков, которые понимаются в смысле Герасимова-Капуто. В программном комплексе был реализован численный алгоритм Адамса-Башфорта-Мултона из семейства предиктор-корректор для исследования дробного осциллятора Ван дер Поля-Эйри. Также реализована возможность проводить визуализацию результатов моделирования – строить осциллограммы и фазовые траектории, а также их сохранять для последующего анализа. Результаты моделирования также можно сохранять в текстовые файлы. В работе проводится исследование динамических режимов дробного осциллятора Ван дер Поля-Эйри, строятся осциллограммы и фазовые траектории при различных значениях управляющих параметров. Описана работа программного комплекса ABMVAFracSim

**Ключевые слова:** дробный осциллятор Ван дер Поля-Эйри, осциллограммы, Phyton, фазовые траектории, метод Адамса-Башфорта-Мултона.

**Цитирование:** Салимова А.И., Паровик Р.И. Программный комплекс ABMVAFracSim для исследования дробного осциллятора Ван дер Поля-Эйри // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2025. – № 2(64). – С. 17-29.

**DOI:** [https://doi.org/10.71310/pcam.2\\_64.2025.02](https://doi.org/10.71310/pcam.2_64.2025.02).

## 1 Введение

В настоящее время широкое развитие получило направление динамики – дробная динамика [1–3]. Дробные динамические системы – динамические системы, которые описывают эффекты наследственности с помощью математического аппарата дробного исчисления [4, 5]. Эффекты наследственности определяются способностью рассматриваемой системы хранить информацию о своих состояниях (предыстория). Наследственность характерна, например, для вязкоупругих и пластичных сред [8].

В настоящей статье было продолжено исследование нелинейной колебательной системы Ван дер Поля-Эйри с эффектами наследственности.

Первые работы по исследованию дробного осциллятора Ван дер Поля-Эйри были произведены в статьях авторов [9, 10]. Особенностью этой колебательной системы заключается в наличии в модельном уравнении нелинейного трения, характерного для

\*Работа выполнена в рамках государственного задания ИКИР ДВО РАН №124012300245-2.

релаксационных колебаний осциллятора Ван дер Поля [6], линейной зависимости частоты собственных колебаний от времени, характерной для колебаний с плохо затухающей амплитудой в осцилляторе Эйри [7], а также в учете эффектов наследственности. В работах [9, 10] был предложен численный алгоритм на основе нелокальной явной конечно-разностной схемы первого порядка точности. Далее с помощью метода двойного пересчета получены оценки вычислительной точности метода, которые соответствовали теоретическому значению. С помощью численного алгоритма, который был реализован в среде Maple2021 при различных значениях параметров модельного уравнения, были построены осциллограммы и фазовые траектории. Показано, что несмотря на наличие эффектов памяти, система может обладать предельными циклами. Также показано, что эти предельные циклы могут быть неустойчивыми.

Целью настоящей работы является дальнейшее продолжение исследования осциллограмм и фазовых траекторий дробного осциллятора Ван дер Поля-Эйри при различных значениях его параметров, а также построения изучении бифуркационных диаграмм - зависимости его решения от значений порядков дробных производных. В настоящей работе с помощью численного алгоритма Адамса-Башфорта-Мултона проводится анализ модели Ван дер Поля-Эйри. Алгоритм был реализован в среде PyCharm 2024.2.1 на языке программирования Python [11] в виде программного комплекса ABMVAFracSim, который также позволяет проводить визуализацию, сохранять результаты моделирования и графики.

## 2 Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{aligned} \partial_{0t}^\alpha x(t) + \lambda (ax^2(t) - b) \partial_{0t}^\beta x(t) + c t x(t) &= \delta \cos \varphi t, \\ x(0) = x_0, \dot{x}(0) &= y_0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x(t) \in C^2[0, T]$  – функция смещения;  $t \in [0, T]$  – текущее время процесса;  $T > 0$  – время моделирования;  $\lambda$  – коэффициент трения,  $a, b, c$  – заданные положительные константы;  $\delta$  и  $\varphi$  – заданные положительные константы, которые определяют амплитуду и частоту внешнего воздействия;  $x_0, y_0$  – заданные константы, которые определяют начальные условия. Производные дробных порядков  $1 < \alpha < 2$  и  $0 < \beta < 1$  понимаются в смысле Герасимова-Капуто [12, 13]:

$$\partial_{0t}^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t \frac{\ddot{x}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-1}}, \quad \partial_{0t}^\beta x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\beta},$$

где  $\Gamma(\cdot)$  – гамма-функция Эйлера.

**Определение 1.** Задачу Коши (1) будем называть дробным осциллятором Ван дер Поля-Эйри.

**Замечание 1.** Дробный осциллятор Ван дер Поля-Эйри описывает автоколебательный режим с учетом наследственности и медленно меняющейся амплитуды в условиях вынужденных колебаний.

**Замечание 2.** Необходимо отметить, что если в модельном уравнении (1) положить  $a = \delta = 0, b = -1, c = 1$ , то мы получаем уравнение дробного осциллятора Эйри, которое было рассмотрено в статьях одного из авторов [14, 15]. Если в уравнении (1) принять  $c = 1, \delta = 0$ , то мы приходим к результатам из статей авторов [9, 10].

Если  $\alpha = 2, \beta = 1$ , то мы получаем классическое модельное уравнение Ван дер Поля-Эйри, которое также слабо изучено.

Укажем некоторые особенности, рассматриваемого осциллятора (1). Наличие нелинейного трения, характерного для осциллятора Ван дер Поля приводит к релаксационным колебаниям или автоколебаниям, которые на фазовой плоскости соответствуют предельным циклам. Релаксационные колебания Ван дер Поля находят свое приложение в биологии [16] в сейсмологии [17] и других науках.

Осциллятор Эйри обладает следующими особенностями: при отрицательных временах ( $t \rightarrow -\infty$ ) существует апериодический режим и происходит экспоненциальное затухание, а при положительных ( $t \rightarrow +\infty$ ) – наблюдаются колебания с медленно возрастающей амплитудой. Так как время в задаче Коши (1) положительно, то апериодических режимов будут отсутствовать. Осциллятор Эйри применяется в оптике, например, вблизи монохроматических каустик наблюдаются интерференционные полосы, интенсивность, которых описывается функциями Эйри, в лазерной оптике известны также пучки Эйри [18].

Дробный осциллятор Ван дер Поля и дробный осциллятор Эйри рассматривались независимо друг от друга в статьях [14, 15, 19]. В силу того, что осциллятор Ван дер Поля относится к осцилляторам автоколебательного типа Льенара [20] и не смотря на наличие дробных производных, здесь могут существовать предельные циклы.

### 3 Методика решения

В работе мы будем использовать метод Адамса-Башфорта-Мултона, который является более точным, чем явная конечно-разностная схема [10].

$$\begin{cases} \partial_{0t}^{\beta_1} x(t) = y(t), \quad 0 < \beta_1 < 1, \\ \partial_{0t}^{\beta_2} y(t) = -\lambda (ax(t)^2 - b)y(t) - c t x(t) + \delta \cos(\varphi t), \quad 0 < \beta_2 < 1, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\beta_1 = \beta, \beta_2 = \alpha - \beta$ , причем  $|\{\alpha\} - \{\beta\}| \leq 1$ ,  $\{\cdot\}$  – дробная часть числа.

Далее на равномерной расчетной сетке вводим сеточные функции  $x_{k+1}^p$  и  $y_{k+1}^p$  с учетом (2), которые можно получить по формуле Адамса-Башфорта или предиктора:

$$\begin{cases} x_{k+1}^p = x_0 + \frac{\tau^{\beta_1}}{\Gamma(\beta_1 + 1)} \sum_{j=0}^k \theta_{j,k+1}^1 y_j, \\ y_{k+1}^p = y_0 + \frac{\tau^{\beta_2}}{\Gamma(\beta_2 + 1)} \sum_{j=0}^k \theta_{j,k+1}^2 (-\lambda (ax_j^2 - b)y_j - c j \tau x_j + \delta \cos(\varphi j \tau)), \\ \theta_{j,k+1}^i = (k - j + 1)^{\alpha_i} - (k - j)^{\alpha_i}, \quad i = 1, 2. \end{cases} \quad (3)$$

Для корректора (формула Адамса-Моултона) получим:

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_0 + K_1 \left( y_{k+1}^p + \sum_{j=0}^k \rho_{j,k+1}^1 y_j \right), \\ y_{k+1} = y_0 + K_2 \left( -\lambda (ax_{k+1}^2 - b)y_{k+1} - c(k+1)\tau x_{k+1} + \delta \cos(\varphi(k+1)\tau) \right) + \\ + K_2 \sum_{j=0}^k \rho_{j,k+1}^2 (-\lambda (ax_j^2 - b)y_j - c j \tau x_j + \delta \cos(\varphi j \tau)), \end{cases} \quad (4)$$

где  $K_1 = \frac{\tau^{\beta_1}}{\Gamma(\beta_1 + 2)}$ ,  $K_2 = \frac{\tau^{\beta_2}}{\Gamma(\beta_2 + 2)}$ , а весовые коэффициенты в (4) определяются по формуле:

$$\rho_{j,k+1}^i = \begin{cases} k^{\beta_i+1} - (k - \beta_i)(k + 1)^{\beta_i}, & j = 0, \\ (k - j + 2)^{\beta_i+1} + (k - j)^{\beta_i+1} - 2(k - j + 1)^{\beta_i+1}, & 1 \leq j \leq k, \\ 1, & j = k + 1, \\ i = 1, 2. \end{cases}$$

Для метода АБМ известно [21], что если  $\partial_{0t}^{\beta_i} x_i(t) \in C^2[0, T]$ , тогда

$$\max_{1 \leq j \leq k} |x_i(t_j) - x_{i,j}| = O\left(\tau^{1+\min \beta_i}\right), \quad (5)$$

где  $x_1 = x(t)$ ,  $x_2 = y(t)$ ,  $i = 1, 2$ .

#### 4 Программный комплекс ABMVAFracSim

Алгоритм Адамса-Башфорта-Мултона (3) и (4) был реализован в среде PyCharm 2014.1 на языке PyCharm в виде программного комплекса ABMVAFracSim [11].

На рис. 1 приведен его интерфейс и пример работы.

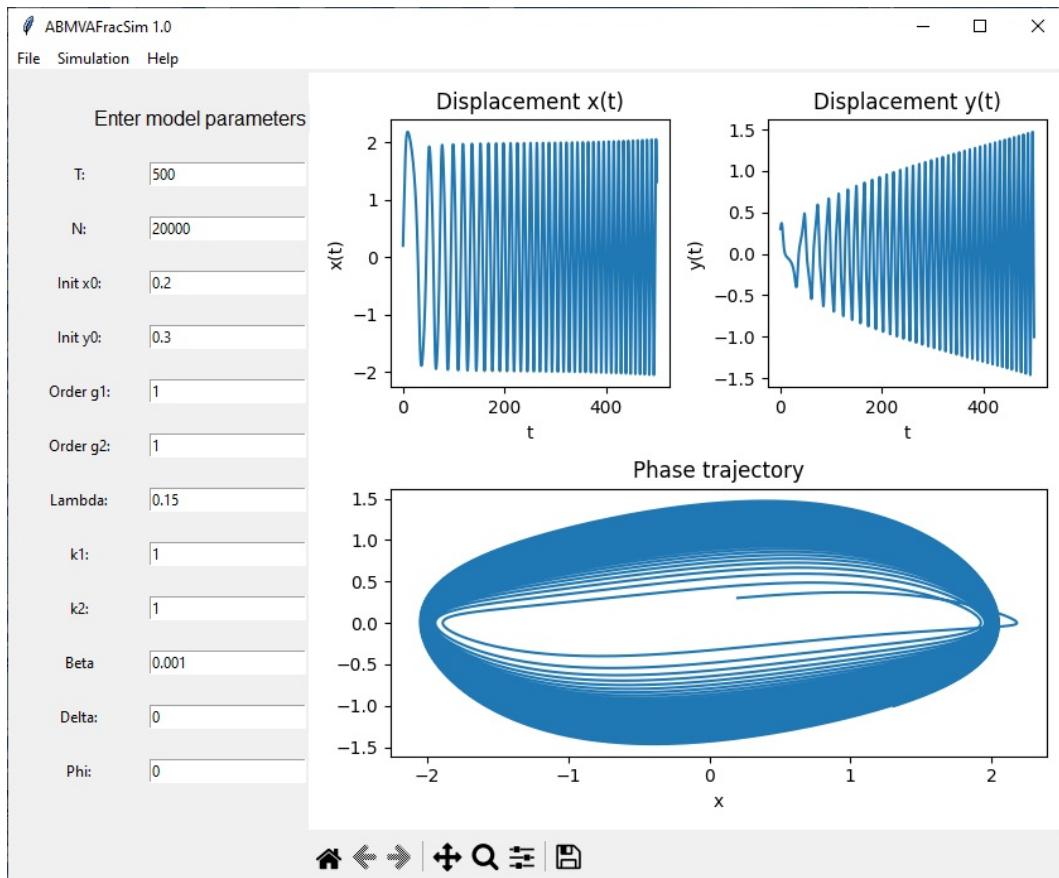
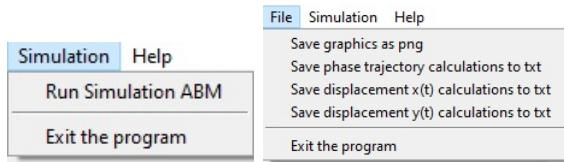


Рис. 1 Интерфейс программного комплекса ABMVAFracSim

Пользователь вводит значения параметров модели (1) в соответствующие поля. Далее выбирает в меню Simulation пункт Run Simulation ABM (рис. 2).

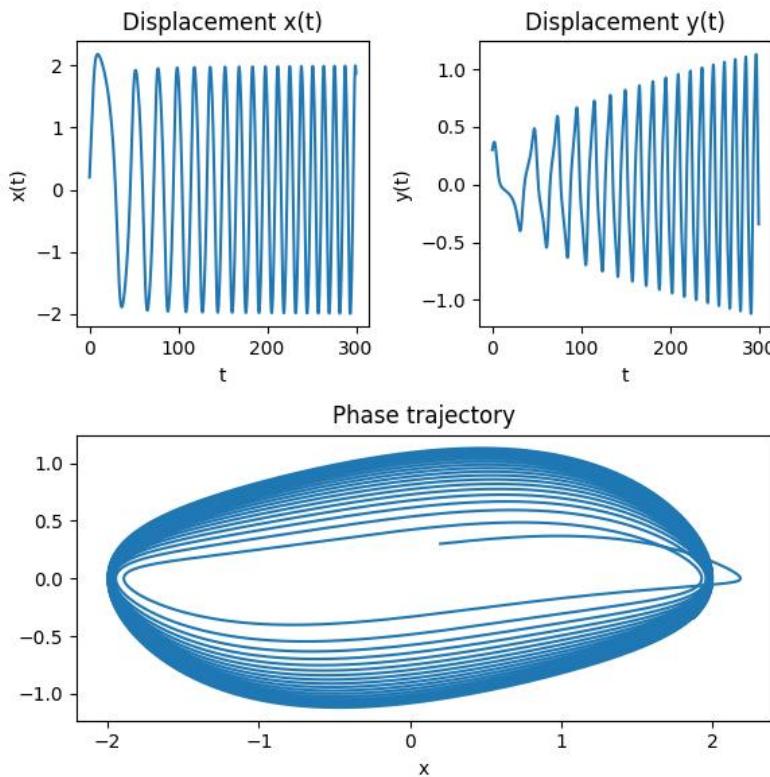


**Рис. 2** Интерфейс программного комплекса ABMVAFracSim

Далее производится расчет по алгоритму Адамса-Башфорта-Мултона и дается визуализация результатов расчетов в виде осциллограмм и фазовой траектории (рис. 1). Результаты расчета можно сохранить в текстовый файл, а графики можно сохранить в формате png (рис. 2).

## 5 Результаты моделирования

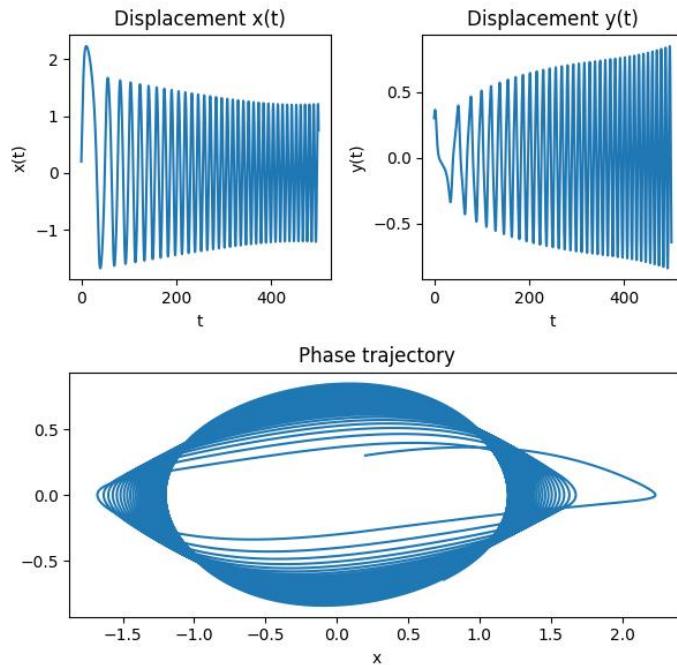
Для расчетов выберем сначала значения параметров:  $x_0 = 0.2$ ,  $y_0 = 0.3$ ,  $a = b = 1$ ,  $c = 0.001$ ,  $\delta = \varphi = 0$ , остальные значения параметров будем изменять. Рассмотрим случай, когда  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ , который соответствует классическому осциллятору Ван дер Поля-Эйлера (рис. 3).



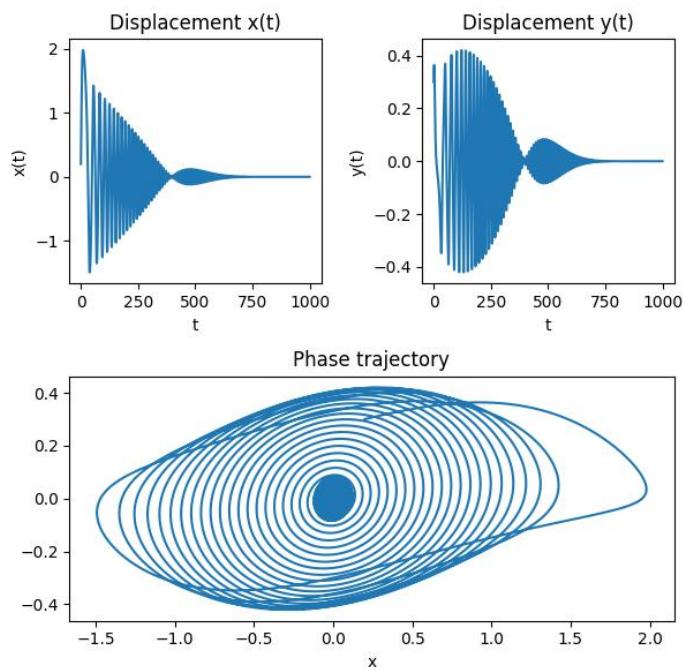
**Рис. 3** Осциллограммы и фазовая траектория для классического осциллятора Ван дер Поля-Эйлера

На рис. 1 приведены графики расчетов осциллограмм и фазовой траектории для классического осциллятора Ван дер Поля-Эйлера в случае, когда  $t \in [0, 600]$ ,  $N = 10^3$ . Здесь мы видим с одной стороны особенности осциллятора Эйри — медленно растущая со временем амплитуда, что видно на осциллограмме  $x(t)$ , а с другой стороны мы видим предельный цикл характерный для осциллятора Ван дер Поля.

Однако здесь необходимо подчеркнуть, что предельный цикл со временем также меняется. На осциллограмме для  $x(t)$  мы видим, что для времен примерно до 300 с, амплитуда колебаний практически не меняется, далее виден ее незначительный рост. Поэтому фазовая траектория наматывается сначала на предельный цикл при  $t \in [0, 300]$ , далее его орбита начинает расширяться.



**Рис. 4** Осциллограммы и фазовая траектория ( $\beta_1 = 1, \beta_2 = 0.9, = 500, N = 2 \cdot 10^4$ )



**Рис. 5** Осциллограммы и фазовая траектория ( $\beta_1 = 91, \beta_2 = 0.9, = 10^3, N = 2 \cdot 3 \cdot 10^4$ )

На рис. 4 и 5 приведены расчеты осциллограмм и фазовых траекторий, полученных в рамках дробного осциллятора Ван дер Поля-Эйри. На рис. 4. мы видим разнонаправленную динамику для  $x(t)$  и  $y(t)$ , что отражается на фазовой траектории. На рис.5 мы видим со временем возникновение колебаний малой амплитуды, а фазовая траектория также имеет разнонаправленный характер: сначала закручивается до некоторого момента времени, потом начинает раскручиваться, на наименьших временах, а потом опять закручивается. Такая динамика может возникать в связанных осцилляторах, где происходит обмен энергией [22].

Отметим, что метод Адамса-Башфорта-Мултона дает неплохие результаты на больших временах, а его реализация на языке программирования Python значительно ускоряет работу, по сравнению со специализированными пакетами, такими как Maple.

## 6 Бифуркационные диаграммы

В пункте нашей статьи рассмотрим вопросы, связанные с бифуркационными диаграммами.

**Определение 2.** *Бифуркационная диаграмма — графическое представление качественных изменений в поведении динамических систем при изменении ее параметров.*

Бифуркационные диаграммы в нашем случае это функциональные зависимости нашего численного решения  $x$  и  $y$  задачи Коши (1) от значений ее ключевых параметров:  $\beta_1, \beta_2, \lambda, a, b, c, \delta, \varphi, k_1, k_2$ . В статье мы остановимся на зависимостях:  $x(\beta_1, \beta_2)$  и  $y(\beta_1, \beta_2)$ , а также их сечений на плоскости. Остальные зависимости в силу трудоемкости задачи, которая обусловлена многократным ее решением, будут рассмотрены в следующих статьях авторов.

Расчет 3D поверхностей был реализован на языке Python в среде PyCharm 2024.2.1 с использованием библиотеки joblib для распараллеливания на центральном процессоре Intel Core i9-12900KF с 24-мя потоками.

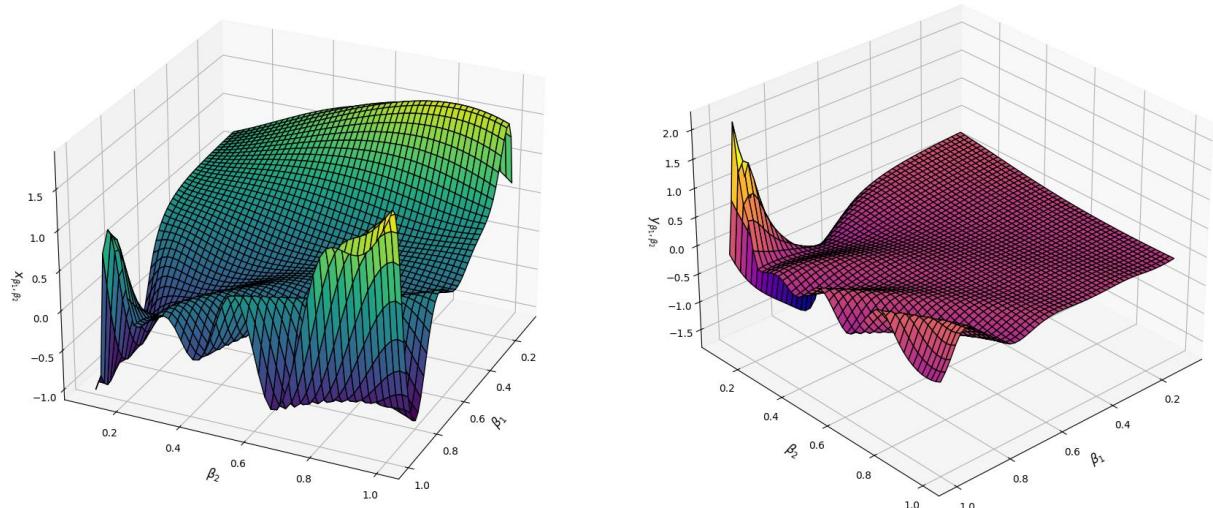


Рис. 6 3D-поверхности а)  $x(\beta_1, \beta_2)$ ; б)  $y(\beta_1, \beta_2)$

На рис. 6 мы видим, что поверхности  $x(\beta_1, \beta_2)$  и  $y(\beta_1, \beta_2)$  обладают как спокойными областями, так и более возмущенными [23]. Построим сечения этих поверхностей (рис.7)

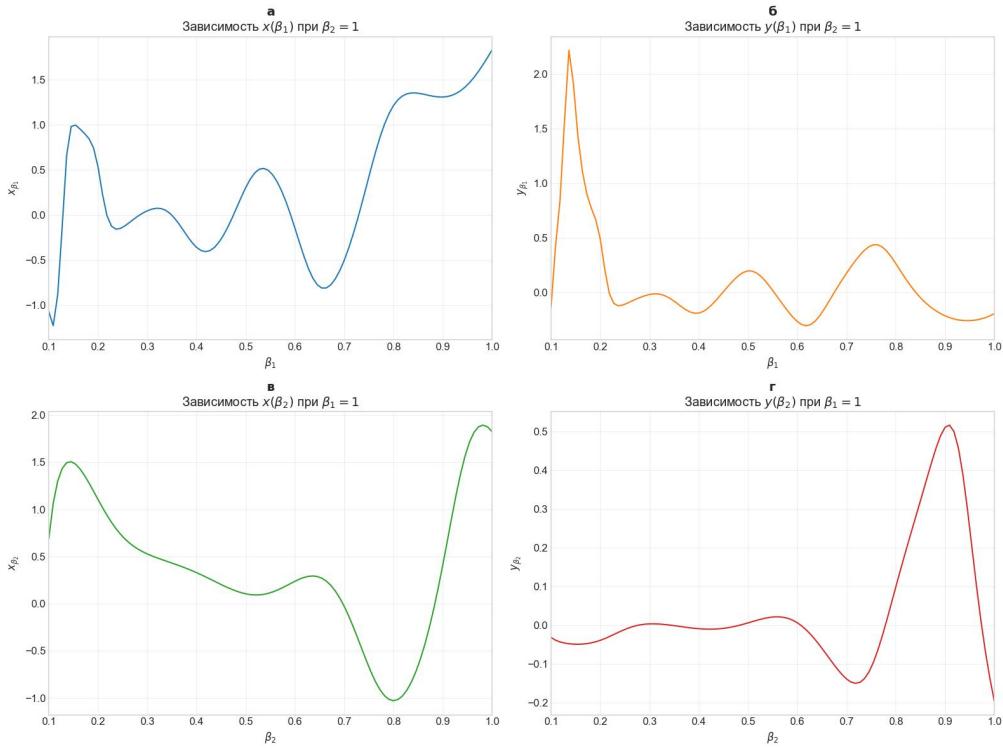


Рис. 7 Бифуркационные диаграммы

На рис.7а и рис.7б мы видим два участка бифуркационной диаграммы:  $[0.1, 0.65]$  и  $[0.66, 1]$ , которые меняют динамику дробного осциллятора Ван дер Поля - Эйри.

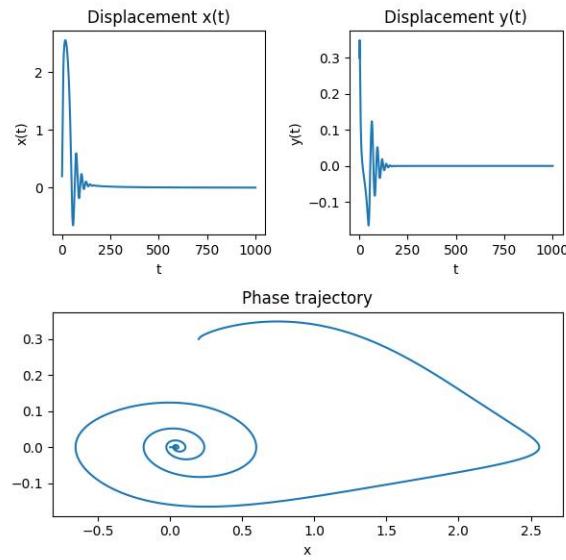


Рис. 8 Осциллограммы и фазовая траектория  $\beta_1 = 0.6$  для рис. 7а

На рис. 8 приведен пример расчета осциллограмм и фазовых траекторий с помощью программного комплекса ABMVAFracSim для бифуркационной диаграммы рис. 7а при  $\beta_1 = 0.6 \in [0.1, 0.65]$ . Здесь мы видим регулярный затухающий режим.

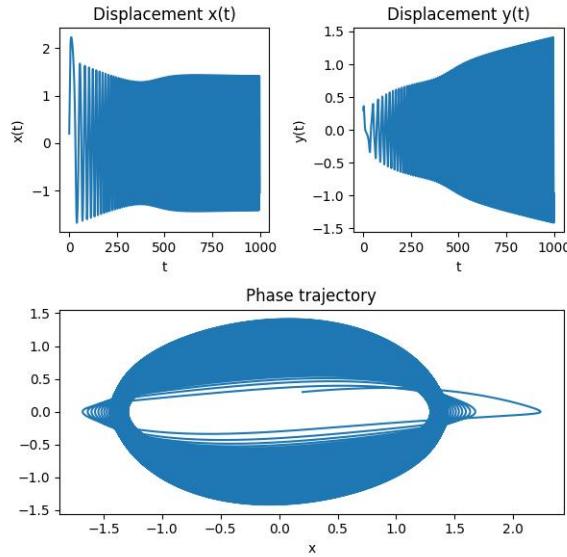


Рис. 9 Осциллограммы и фазовая траектория  $\beta_1 = 0.9$  для рис. 7а

На рис. 9 приведен пример расчета осциллограмм и фазовых траекторий с помощью программного комплекса ABMVAFracSim для бифуркационной диаграммы рис. 7а при  $\beta_1 = 0.9 \in [0.66, 1]$ ,  $T = 1000N = 3 \cdot 10^4$ . Здесь уже мы видим другой регулярный режим — предельный цикл.

Аналогичную картину мы можем увидеть для бифуркационной диаграммы на рис. 7б.

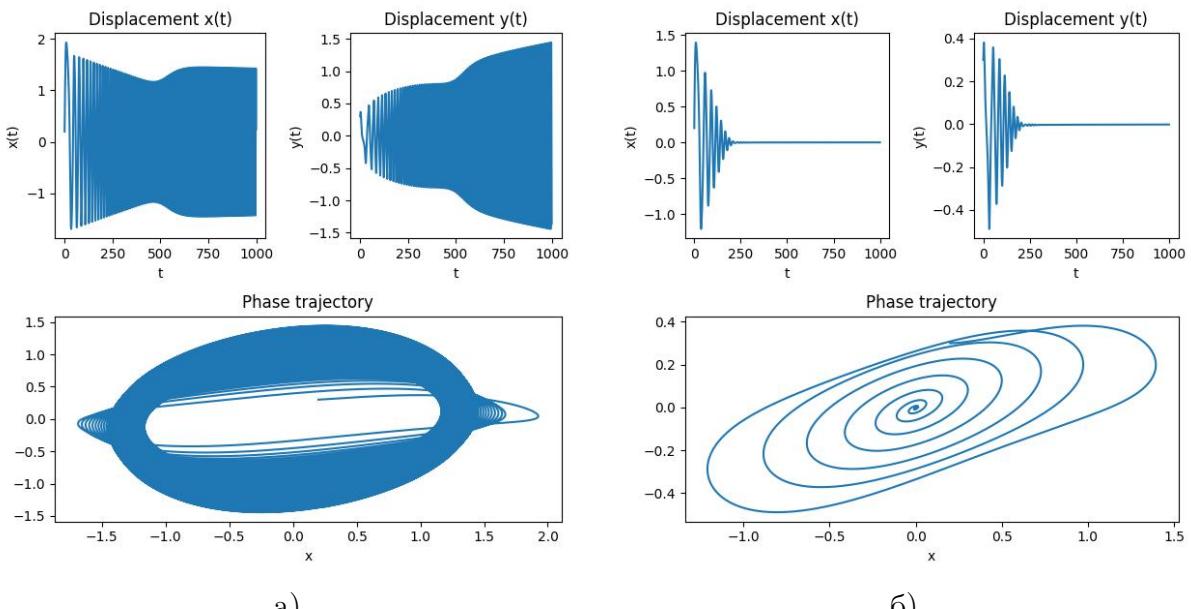
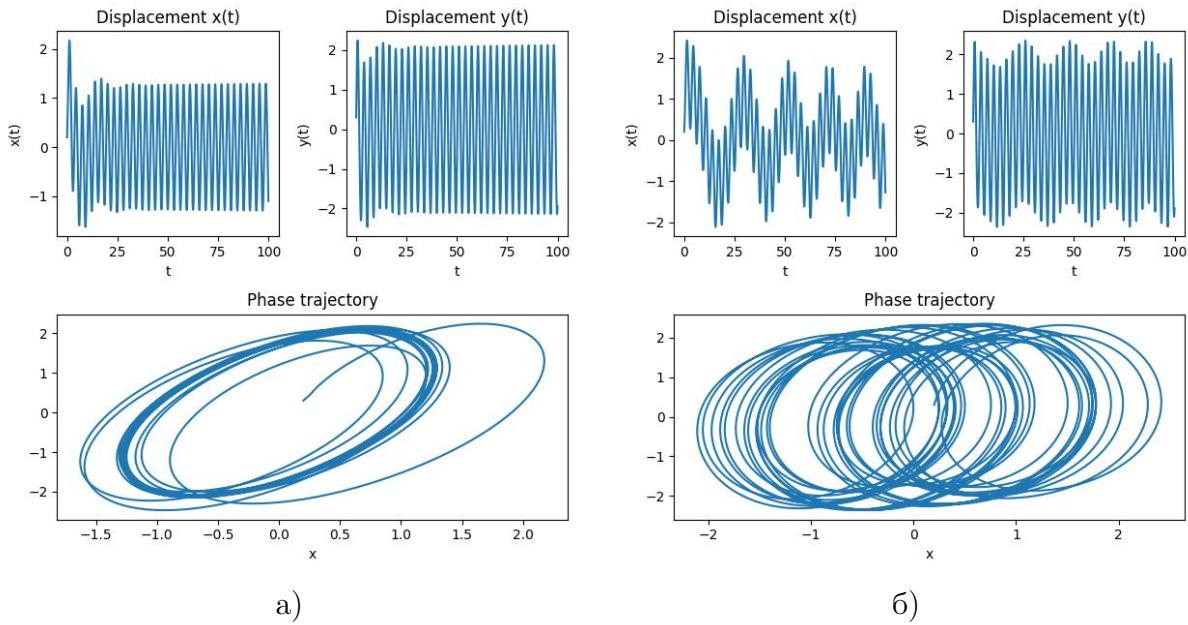
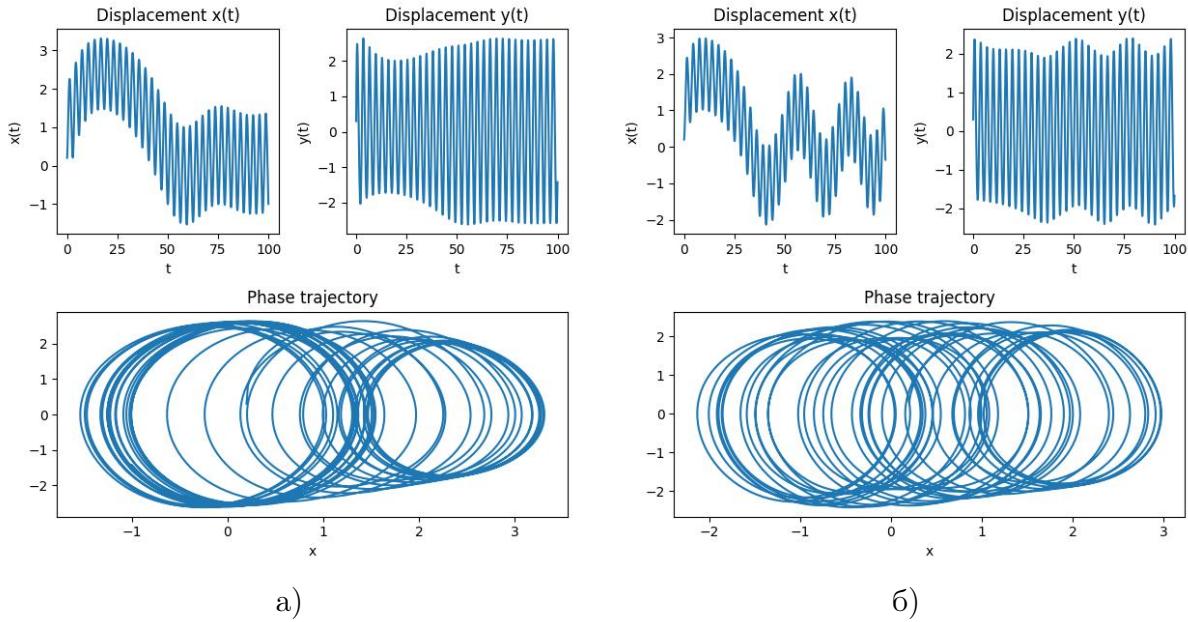


Рис. 10 Осциллограммы и фазовая траектория для рис. 7б: а)  $\beta_2 = 0.9$ ; а)  $\beta_2 = 0.6$

В заключении приведем некоторые примеры, которые соответствуют случаю вынужденных колебаний:  $\delta = 4, \varphi = 2, T = 100, N = 3000$ .



**Рис. 11** Осциллограммы и фазовая траектория для рис. 7б: а)  $\beta_1 = 0.6$ ; а)  $\beta_1 = 0.9$



**Рис. 12** Осциллограммы и фазовая траектория для рис. 7б: а)  $\beta_2 = 0.6$ ; а)  $\beta_2 = 0.9$

На рис.11 и рис.12 приведены осциллограммы и фазовые траектории полученные с помощью программного комплекса ABMVAFracSim для случая вынужденных колебаний.

Наличие внешнего периодического воздействия приводит к тому, что в системе возникают предельные циклы. Здесь имеет смысл произвести исследования амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристик с целью изучения эффектов резонанса.

## 7 Заключение

В работе с помощью программного комплекса ABMVAFracSim на языке программирования Python, в котором реализован численный алгоритм Адамса-Башфорта-Мултона для решения дробного осциллятора Ван дер Поля-Эйри с внешней периодической силой. С помощью программного комплекса были построены бифуркационные поверхности и диаграммы — зависимости решения от значений порядков дробных производных. Показано, что существуют области, в которых регулярные режимы устойчивый фокус и предельный цикл сменяют друг друга.

Программный комплекс ABMVAFracSim может быть дополнен модулем для качественного анализа дробного осциллятора Ван дер Поля-Эйри. Например, в этом модуле может быть реализована возможность построения бифуркационных диаграмм для исследования регулярных и хаотических режимов. Другой модуль может быть реализована процедура расчета амплитудно-частотных и фазо-частотных характеристик вынужденных колебаний.

Другое направление исследований — это построение карт динамических режимов, что приводит к необходимости задействовать большие вычислительные ресурсы.

## Литература

- [1] *Hilfer R.* Foundations of fractional dynamics // *Fractals*, – 1995. vol. 3(03). – P. 549–556.
- [2] *Cattani C., Srivastava H.M., Yang X.J.* Fractional dynamics. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, – 2015.
- [3] *Tarasov V.E.* General Fractional Dynamics // *Mathematics*, – 2021. vol. 9(13), 1464. doi: <http://dx.doi.org/10.3390/math9131464>
- [4] *Нахушеев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, – 2003. – 272 с.
- [5] *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, – 2006. – 523 p.
- [6] *Van der Pol B.* On relaxation-oscillations // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, – 1926. – vol. 2. – no 11. – P. 978–992.
- [7] *Airy G.* On the intensity of light in the neighbourhood of a caustic // Trans. Camb. Phil. Soc., 1838. no 50. – P. 379–402.
- [8] *Rabotnov Yu.N.* Elements of hereditary mechanics of solids. Moscow: MIR Publishers. – 1980. – 387 p.
- [9] *Салимова А.И., Паровик Р.И.* Математическая модель дробного осциллятора Ван дер Поля-Эйри // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки, – 2024. – Т. 47. №2. – С. 19–32.
- [10] *Salimova A.I., Parovik R.I.* Dynamic modes of the Van der Pol-Airy fractional oscillator // AIP conference proceedings, – 2024. – vol. 3244. – no. 1. 020006. doi: <http://dx.doi.org/10.1063/5.0241421>.
- [11] *Van Horn B.M. II, Nguyen Q.* Hands-On Application Development with PyCharm: Build Applications like a Pro with the Ultimate Python Development Tool. Birmingham, UK: Packt Publishing Ltd., – 2023. – 652 p.
- [12] *Novozhenova O.G.* Life And Science of Alexey Gerasimov, One of the Pioneers of Fractional Calculus in Soviet Union // FCAA, – 2017. – vol. 20. – P. 790–809. doi: <http://dx.doi.org/10.1515/fca-2017-0040>.
- [13] *Caputo M., Fabrizio M.* On the notion of fractional derivative and applications to the hysteresis phenomena // Meccanica, – 2017. – vol. 52. – P. 3043–3052. doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s11012-017-0652-y>.

- [14] *Паровик Р.И.* Задача Коши для обобщенного уравнения Эйри // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. – 2014. – Т. 16. – № 3. – С. 64–69.
- [15] *Паровик Р.И.* Математическое моделирование эредитарного осциллятора Эйри с тренировкой // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2017. – Т. 10. – № 1. – С. 138–148. doi: <http://dx.doi.org/10.14529/mmp170109>
- [16] *Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S.* An active pulse transmission line simulating nerve axon // Proc. IRE. – 1962. – no. 50, – P. 2061–2070.
- [17] *Cartwright J., Eguiluz V., Hernandez-Garcia E., Piro O.* Dynamics of elastic excitable media // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. – 1999. – no. 9. – P. 2197–2202.
- [18] *Efremidis N.K. et al.* Airy beams and accelerating waves: an overview of recent advances // Optica. – 2019. – vol. 6. – no. 5. – P. 686–701. doi: <http://dx.doi.org/10.1364/OPTICA.6.000686>.
- [19] *Parovik R.I.* Mathematical model of the Van der Pol fractal oscillator // Doklady Adygskoy (Cherkesskoy) Mezhdunarodnoy akademii nauk. – 2015. – vol. 17, – no. 2. – P. 57–62.
- [20] *Liénard A.* Etude des oscillations entretenues // Revue générale de l'électricité, – 1928. – no. 23. – P. 901–912.
- [21] *Yang C., Liu F.* A computationally effective predictor-corrector method for simulating fractional order dynamical control system // ANZIAM Journal, – 2005. – vol. 47. – P. 168–184. doi: <http://dx.doi.org/10.21914/anziamj.v47i0.1037>.
- [22] *Сергиецко Д.Ф., Паровик Р.И.* Об одной системе связанных линейных осцилляторов с дробным тренировкой и непостоянными коэффициентами для описания геоакустической эмиссии // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. – 2024. – Т. 49. – № 4. – С. 36–49. doi: <http://dx.doi.org/10.26117/2079-6641-2024-49-4-36-49>
- [23] *Parovik R.* Selkov's Dynamic System of Fractional Variable Order with Non-Constant Coefficients // Mathematics. – 2025. – Vol. 13, – No. 3. doi: <http://dx.doi.org/10.3390/math13030372>.

Поступила в редакцию 13.03.2025

UDC 519.622.2

## ABMVAFRACSIM SOFTWARE PACKAGE FOR STUDYING THE FRACTIONAL VAN DER POL-AIRY OSCILLATOR\*

<sup>1</sup>*Salimova A.I.*, <sup>2</sup>*Parovik R.I.*

*parovik@ikir.ru*

<sup>1</sup>National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek,  
Tashkent, Universitetskaya, 4, Uzbekistan;

<sup>2</sup>Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS,  
Kamchatka, Paratunka, Mirnaya st., 7, Russia.

In the article, using the ABMVAFracSim software package developed in the Python programming language, the fractional oscillatory system of Van der Pol-Airy is investigated. The fractional Van der Pol-Airy oscillator is a nonlinear differential equation with fractional derivatives, which are understood in the Gerasimov-Caputo sense. In the

\*The work was carried out within the framework of the state assignment of IKIR FEB RAS (no. 124012300245-2).

software package, the Adams-Bashforth-Multon numerical algorithm from the predictor-corrector family was implemented for studying the fractional Van der Pol-Airy oscillator. Also, the ability to visualize the simulation results is implemented - to build oscillograms and phase trajectories, as well as save them for subsequent analysis. The simulation results can also be saved in text files. In the work, a study of the dynamic modes of the fractional Van der Pol-Airy oscillator is carried out, oscillograms and phase trajectories are built for different values of the control parameters. The operation of the ABMVAFracSim software package is described.

**Keywords:** fractional van der Pol-Airy oscillator, oscillograms, Phyton, phase trajectories, Adams-Bashforth-Multon method.

**Citation:** Salimova A.I., Parovik R.I. 2025. ABMVAFracSim software package for studying the fractional van der Pol-Airy oscillator. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 2(64): 17-29.

**DOI:** [https://doi.org/10.71310/pcam.2\\_64.2025.02](https://doi.org/10.71310/pcam.2_64.2025.02).

# ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

**№ 2(64) 2025**

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

## **Учредитель:**

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и  
искусственного интеллекта.

## **Главный редактор:**

Равшанов Н.

## **Заместители главного редактора:**

Азамов А.А., Арипов М.М., Шадиметов Х.М.

## **Ответственный секретарь:**

Ахмедов Д.Д.

## **Редакционный совет:**

Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Арушанов М.Л., Бурнашев В.Ф.,  
Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия), Игнатьев Н.А.,  
Ильин В.П. (Россия), Иманкулов Т.С. (Казахстан), Исмагилов И.И. (Россия),  
Кабанихин С.И. (Россия), Карабич В.В. (Россия), Курбонов Н.М., Маматов Н.С.,  
Мирзаев Н.М., Мухамадиев А.Ш., Назирова Э.Ш., Нормуродов Ч.Б.,  
Нуралиев Ф.М., Опанасенко В.Н. (Украина), Расулмухамедов М.М., Расулов А.С.,  
Садуллаева Ш.А., Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халдзигитов А.,  
Хамдамов Р.Х., Хужаев И.К., Хужаев Б.Х., Чье Ен Ун (Россия),  
Шабозов М.Ш. (Таджикистан), Dimov I. (Болгария), Li Y. (США),  
Mascagni M. (США), Min A. (Германия), Singh D. (Южная Корея),  
Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при  
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

**ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X**

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

## **Адрес редакции:**

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

Э-почта: [journals@airi.uz](mailto:journals@airi.uz).

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

## **Дизайн и вёрстка:**

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 25.04.2025 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №2. Тираж 100 экз.

# PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

## No. 2(64) 2025

The journal was established in 2015.  
6 issues are published per year.

**Founder:**

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

**Editor-in-Chief:**

Ravshanov N.

**Deputy Editors:**

Azamov A.A., Aripov M.M., Shadimetov Kh.M.

**Executive Secretary:**

Akhmedov D.D.

**Editorial Council:**

Aloev R.D., Amirgaliev E.N. (Kazakhstan), Arushanov M.L., Burnashev V.F., Zagrebina S.A. (Russia), Zadorin A.I. (Russia), Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia), Imankulov T.S. (Kazakhstan), Ismagilov I.I. (Russia), Kabanikhin S.I. (Russia), Karachik V.V. (Russia), Kurbonov N.M., Mamatov N.S., Mirzaev N.M., Mukhamadiev A.Sh., Nazirova E.Sh., Normurodov Ch.B., Nuraliev F.M., Opanasenko V.N. (Ukraine), Rasulov A.S., Sadullaeva Sh.A., Starovoitov V.V. (Belarus), Khayotov A.R., Khaldjigitov A., Khamdamov R.Kh., Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh., Chye En Un (Russia), Shabozov M.Sh. (Tajikistan), Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA), Mascagni M. (USA), Min A. (Germany), Singh D. (South Korea), Singh M. (South Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.

The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

**ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X**

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.

Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

**Address:**

100125, Tashkent, Buz-2, 17A.  
Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.  
E-mail: [journals@airi.uz](mailto:journals@airi.uz).  
Web-site: <https://journals.airi.uz>.

**Layout design:**

Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.

Signed for print 25.04.2025

Format 60x84 1/8. Order No. 2. Print run of 100 copies.

## Содержание

<i>Хужсаёрөв Б.Х., Файзиев Б.М., Сагдуллаев О.К.</i>	
Математическая модель переноса деградирующегося вещества в двухзонной пористой среде . . . . .	5
<i>Салимова А.И., Паровик Р.И.</i>	
Программный комплекс ABMVAFracSim для исследования дробного осциллятора Ван дер Поля-Эйри . . . . .	17
<i>Равшанов Н., Шадманов И.У., Адизова З.М.</i>	
Разработка математической модели для контроля и прогнозирования процессов тепло- и влагообмена в процессе хранения зерновых продуктов с учетом воздействия вредителей . . . . .	30
<i>Рустамов Н., Амиртаев К.</i>	
Эвристическая модель оценки психического свойства лидера . . . . .	46
<i>Нормуродов Ч.Б., Муродов С.К., Шакаева Э.Э.</i>	
Спектрально-сеточная аппроксимация обыкновенного дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной . . . . .	54
<i>Хаётов А.Р., Бердимурадова У.А.</i>	
Оптимальная квадратурная формула с производными для произвольно фиксированных узлов в пространстве Соболева . . . . .	64
<i>Нормуродов Ч.Б., Шакаева Э.Э., Зиякулова Ш.А.</i>	
Дискретный вариант метода предварительного интегрирования и его применение к численному решению сингулярно возмущенного уравнения . . . . .	74
<i>Адылова Ф.Т.</i>	
Почему квантовые вычисления – это будущее искусственного интеллекта? . .	87
<i>Мухамедиева Д.Т., Раупова М.Х.</i>	
Квадратичное программирование в модели распределения ресурсов в сельском хозяйстве на основе квантового алгоритма . . . . .	101
<i>Шарипов Д.К., Саидов А.Д.</i>	
Модифицированный метод SHAP для интерпретируемого прогнозирования осложнений сердечно-сосудистых заболеваний . . . . .	114

# Contents

<i>Khuzhayorov B.Kh., Fayziev B.M.</i>	
Mathematical model of transport of degrading substance in a two-zone porous medium . . . . .	5
<i>Salimova A.I., Parovik R.I.</i>	
ABMVAFracSim software package for studying the fractional van der Pol-Airy oscillator . . . . .	17
<i>Ravshanov N., Shadmanov I.U., Adizova Z.M.</i>	
Development of a mathematical model for monitoring and forecasting heat and moisture exchange processes during grain storage considering pest impact . . . . .	30
<i>Rustamov N., Amirtayev K.</i>	
A heuristic model for evaluating the mental qualities of a leader . . . . .	46
<i>Normurodov Ch.B., Murodov S.K., Shakaeva E.E.</i>	
Spectral-grid approximation of an ordinary differential equation with a small parameter at the highest derivative . . . . .	54
<i>Hayotov A.R., Berdimuradova U.A.</i>	
An optimal quadrature formula with derivatives for arbitrarily fixed nodes in the Sobolev space . . . . .	64
<i>Normurodov Ch.B., Shakaeva E.E., Ziyakulova Sh.A.</i>	
A discrete variant of the method pre-integration and its application to the numerical solution of a singularly perturbed equation . . . . .	74
<i>Adilova F.T.</i>	
Why are quantum computing technologies the future of artificial intelligence? . . . . .	87
<i>Mukhamediyeva D.T., Raupova M.H.</i>	
Quadratic programming in the resource allocation model in agriculture based on the quantum algorithm . . . . .	101
<i>Sharipov D.K., Saidov A.D.</i>	
Modified SHAP approach for interpretable prediction of cardiovascular complications . . . . .	114

# HISOBLASH VA AMALIY МАТЕМАТИКА MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ  
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
PROBLEMS OF COMPUTATIONAL  
AND APPLIED MATHEMATICS

