

УДК 517.938

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА ДРОБНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МАКШЕРРИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ИСКУССТВЕННОЙ ЭКГ*

^{1,2*} *Алимов Х.Т.*, ^{2,3} *Паровик Р.И.*

*xtalimov820@gmail.com

¹ Ташкентский университет информационных технологий,
100084, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Амира Тимура, д. 108;² Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,
100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская, д. 4;³ Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН,
684034, Россия, с. Паратунка, ул. Мирная, д. 7.

В статье исследуется математическая модель Макшерри с учетом наследственности для описания искусственных ЭКГ. Математическая модель состоит из трех обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с производными дробных порядков в смысле Герасимова-Капуто, для которых справедливы локальные начальные условия (задача Коши). Задача Коши решается с помощью численного метода, основанного на нелокальной явной конечно-разностной схеме первого порядка точности. С помощью правила Рунге показано, что порядок вычислительной точности численного алгоритма стремится к теоретическому порядку при увеличении количества узлов расчетной сетки. Численный алгоритм был реализован в компьютерной программе на языке Maple. С помощью компьютерной программы была проведена визуализация результатов моделирования при различных значениях порядков дробных производных. Показано, что порядки дробных производных позволяют более гибко описывать искусственную ЭКГ.

Ключевые слова: модель Макшерри, ЭКГ, дробная производная, численный алгоритм, порядок точности, правило Рунге.

Цитирование: Алимов Х.Т., Паровик Р.И. Некоторые аспекты численного анализа дробной математической модели Макшерри для описания искусственной ЭКГ // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2024. – № 2(56). – С. 7-16.

1 Введение

Электрокардиограмма (ЭКГ) – это графическая запись электрической активности работы сердца, которая дает информацию о частоте сердечных сокращений, ритме и проведении электрических импульсов в сердце. Ионный ток вызывает сокращение и последующее расслабление мышечных волокон сердца. В результате мы получаем график изменения электрического потенциала от времени, который позволяет установить некоторые состояния, характерные для заболевания сердца. Например, сужение коронарных артерий или инфаркт миокарда.

Особое место занимает расшифровка ЭКГ. Один нормальный цикл ЭКГ представляет собой последовательную деполяризацию/реполяризацию предсердий и желудочков, которые происходят при каждом сердечном сокращении. Их можно приближенно связать с пиками и впадинами ЭКГ или с PQRST морфологией [1] (рис. 1).

*Работа выполнена в рамках рамочного соглашения о сотрудничестве на 2022-2027 гг. между ИКИР ДВО РАН и Национальным университетом Узбекистана имени Мирзо Улугбека №1118 от 28.04.2022 г.

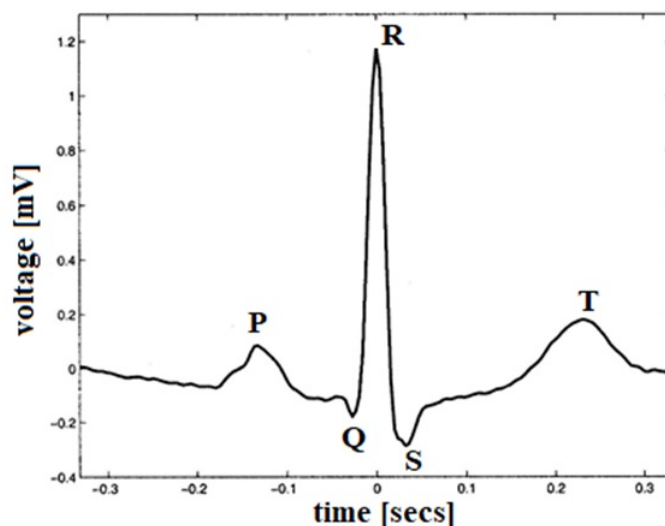


Рис. 1 PQRST-морфология здорового человека

На рис.1 приведен одиночный синусовый (нормальный) цикл ЭКГ для одного сердечного сокращения с PQRST-морфологией, записанный у здорового человека.

PQRST-морфологию можно разделить на следующие ключевые участки:

- 1) Р-зубец – небольшое низкоамплитудное отклонение от базовой линии, вызванное фронтом волны активации (деполяризация) предсердий до сокращения предсердий.
- 2) PQ-интервал – время между началом деполяризации предсердий и желудочков.
- 3) QRS-комплекс – часть ЭКГ с наибольшей амплитудой, вызванная ионными токами, генерируемыми при деполяризации желудочков до их сокращения.
- 4) QT-интервал – время между началом желудочковой деполяризации и окончанием желудочковой реполяризации.
- 5) ST-интервал – время между окончанием зубца S и началом зубца T.
- 6) Т-зубец – реполяризация желудочков, при которой сердечная мышца готовится к следующему циклу ЭКГ.

Необходимо отметить, что удлинённый QT-интервал может указывать на желудочковые тахикардии, которые приводят к внезапной смерти [2]. ST-интервал также может быть связан с сердечными заболеваниями, если наблюдается значительное повышение или понижение амплитуды вдали от исходного уровня. Более детально с методами расшифровки ЭКГ можно познакомиться в монографии [1].

В настоящей работе нас будут интересовать ЭКГ, полученные не за счет записи электрокардиографа, а за счет решения соответствующей математической модели. Отправной точкой в этом вопросе будет являться статья [3], в которой была предложена математическая модель (модель Макшерри) для генерации искусственных ЭКГ. Математическая модель представляла собой систему из трех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с начальными условиями (задача Коши).

В работе авторов [4] была предложена дробная математическая модель Макшерри, которая является обобщением ранее известной модели из статьи [3]. Это обобщение заключалось в переходе от целочисленных производных к дробным производным. Такой переход может быть обусловлен наличием эффекта наследственности в рассматриваемом процессе. Эффекты наследственности или эрeditарности хорошо

описаны в монографиях [5, 6]. В статье [4] авторы предложили численный алгоритм решения дробной математической модели Макшерри, основанный на нелокальной явной конечно-разностной схеме первого порядка точности. Численный алгоритм был реализован в системе компьютерной алгебры Maple, с помощью которой была проведена визуализация результатов моделирования. Было показано, что PQRST-морфология сохраняется, а порядки дробных производных дают более гибкое моделирование, рассматриваемого процесса.

В настоящей статье мы продолжим изучать дробную математическую модель Макшерри. Были введены в модельные уравнения вспомогательные параметры, которые сохраняют стандартную размерность искомых величин. Исследуется нелокальная явная конечно-разностная схема. С помощью правила Рунге показано, что вычислительный порядок точности стремиться к теоретическому при увеличении расчетных узлов сетки. Также проведена визуализация результатов моделирования и дана их интерпретация.

2 Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу Коши [3]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \left(1 - \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}\right) x(t) - \omega y(t), \\ \dot{y}(t) = \left(1 - \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}\right) y(t) + \omega x(t), \\ \dot{z}(t) = - \sum_{i \in \{P, Q, R, S, T\}} a_i \Delta \theta_i \exp\left(-\frac{\Delta \theta_i^2}{2b_i^2}\right) - (z(t) - z_0(t)), \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0, \end{cases} \quad (1)$$

где $x(t), y(t), z(t) \in C^1[0, T]$ – составляющие сигнала ЭКГ, отражающего ионный ток и имеют размерности напряжения, $t \in [0, T]$ – время процесса, $T > 0$ – время моделирования, $\Delta \theta_i = (\theta - \theta_i) \bmod 2\pi$, $\theta = \text{atan2}(x(t), y(t))$, ω – угловая скорость, $z_0(t) = A \sin(2\pi f t)$, где амплитуда и частота имеет следующие значения $A = 0.15$, $f = 0.25$, начальные условия: x_0, y_0, z_0 – заданные константы. Здесь функция $\text{atan2}(x(t), y(t))$ – функция, возвращающая значения из четвертого квадранта акртангенса.

Остальные параметры θ_i, a_i, b_i являются константами, определяющие PQRST-морфологию. Их значения берутся из таблицы, которые соответствуют здоровому человеку [7].

Таблица 1 Параметры модели (1)

Индекс i	P	Q	R	S	T
θ_i (рад)	$-\frac{1}{3}\pi$	$-\frac{1}{12}\pi$	0	$\frac{1}{12}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
a_i	60	-250	1500	-375	37.5
b_i	0.25	0.1	0.1	0.1	0.4

Определение 1. Задачу Коши (1) будем называть классической математической моделью Макшерри для генерации искусственной ЭКГ.

В статье [3] классическая математическая модель Макшерри была исследована с помощью численного метода Рунге-Кутты 4-го порядка. Дана визуализация результатов моделирования и их интерпретация.

Замечание 1. Отметим, что целью разработки классической модели Макшерри в статье [3] было предоставление стандартного реалистичного сигнала ЭКГ с известными характеристиками, который может быть сгенерирован с помощью конкретных статистических данных, таких как среднее значение и стандартное отклонение частоты сердечных сокращений и характеристик частотной области вариабельности сердечного ритма.

В статье [7] классическая математическая модель Макшерри была исследована с помощью спектров максимальных показателей Ляпунова на предмет существования хаотических режимов.

Следуя подходу, предложенному в статье [8], формально заменим правые части модельных уравнений в системе (1) на следующие соотношения:

$$\frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{1}{\Theta_\alpha^{1-\alpha}} \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha}, \frac{dy}{dt} \rightarrow \frac{1}{\Theta_\beta^{1-\beta}} \frac{d^\beta y}{dt^\beta}, \frac{dz}{dt} \rightarrow \frac{1}{\Theta_\gamma^{1-\gamma}} \frac{d^\gamma z}{dt^\gamma}, \quad (2)$$

где $\Theta_\alpha, \Theta_\beta, \Theta_\gamma$ – вспомогательные параметры, имеющие размерность времени. Замена (2) имеет смысл в том, что позволяет соблюсти стандартную размерность искомых величин.

Операторы дробного дифференцирования в (2) понимаются в смысле Герасимова-Капуто [9, 10]:

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha}, 0 < \alpha < 1, \\ \frac{d^\beta y(t)}{dt^\beta} &= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{\dot{y}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\beta}, 0 < \beta < 1, \\ \frac{d^\gamma z(t)}{dt^\gamma} &= \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t \frac{\dot{z}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\gamma}, 0 < \gamma < 1, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция.

Подставляя в правые части системы (1) вместо целочисленных производных дробные производные (3), мы получаем следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = K_\alpha \left(1 - \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}\right) x(t) - \omega_1 y(t), \\ \frac{d^\beta y(t)}{dt^\beta} = K_\beta \left(1 - \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}\right) y(t) + \omega_2 x(t), \\ \frac{d^\gamma z(t)}{dt^\gamma} = -K_\gamma \left[\sum_{i \in \{P, Q, R, S, T\}} a_i \Delta \theta_i \exp\left(-\frac{\Delta \theta_i^2}{2b_i^2}\right) + (z(t) - z_0(t)) \right], \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0, \end{cases} \quad (4)$$

где $K_\alpha = (\Theta_\alpha)^{\alpha-1}$, $K_\beta = (\Theta_\beta)^{\beta-1}$, $K_\gamma = (\Theta_\gamma)^{\gamma-1}$, $\omega_1 = \omega K_\alpha$, $\omega_2 = \omega K_\beta$.

Определение 2. Задачу Коши (4) мы будем называть дробной математической моделью Макшерри.

Замечание 2. Для дробной математической модели Макшерри (4) справедливы локальные начальные условия.

Замечание 3. Отметим, что в предельном случае, когда $\alpha = \beta = \gamma = 1$. Дробная математическая модель Макшерри (4) переходит в классическую модель Макшерри (1).

Замечание 4. Заметим, что случай, когда в системе (4) $\Theta_\alpha = \Theta_\beta = \Theta_\gamma = 1$ был рассмотрен в статье авторов [4].

Дробная математическая модель Макшерри (4) далее будет объектом нашего исследования.

3 Методика решения

В силу того, что дробная математическая модель Макшерри (4) является нелинейной, то необходимо использовать численные методы для ее решения.

Для решения задачи Коши (4) воспользуемся теорией конечно-разностных схем. Для этого будем считать, что функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ обладают необходимыми условиями гладкости. Рассмотрим равномерную сетку по временной координате. Разобъем отрезок $[0, T]$ на N равных частей с шагом дискретизации $\tau = T/N$. Тогда функции решения $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ перейдут в сеточные функции $x(t_k)$, $y(t_k)$, $z(t_k)$, где $t_k = k\tau$, $k = 1, \dots, N$. Аппроксимации производных дробных порядков даются следующими формулами (5):

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha x(t_k)}{dt_k^\alpha} &= \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{i=0}^{k-1} w_i^\alpha (x_{k-i+1} - x_{k-i}) + O(\tau), \\ \frac{d^\beta y(t_k)}{dt_k^\beta} &= \frac{\tau^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} \sum_{i=0}^{k-1} w_i^\beta (y_{k-i+1} - y_{k-i}) + O(\tau), \\ \frac{d^\gamma z(t_k)}{dt_k^\gamma} &= \frac{\tau^{-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{i=0}^{k-1} w_i^\gamma (z_{k-i+1} - z_{k-i}) + O(\tau), \end{aligned} \quad (5)$$

где весовые коэффициенты имеют вид: $w_i^\alpha = (i+1)^{1-\alpha} - i^{1-\alpha}$, $w_i^\beta = (i+1)^{1-\beta} - i^{1-\beta}$, $w_i^\gamma = (i+1)^{1-\gamma} - i^{1-\gamma}$.

$$\left\{ \begin{aligned} &x_0 = a, y_0 = b, z_0 = c, \\ &x_1 = \frac{1}{W_\alpha} \left(K_\alpha \left(1 - \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \right) x_0 - \omega_1 y_0 + W_\alpha x_0 \right), \\ &y_1 = \frac{1}{W_\beta} \left(K_\beta \left(1 - \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \right) y_0 + \omega_2 x_0 + W_\beta y_0 \right), \\ &z_1 = -\frac{K_\gamma}{W_\gamma} \left(\sum_{i=1}^5 a_i \Delta \theta_{0,i} \exp \left(-\frac{\Delta \theta_{0,i}^2}{2b_i^2} \right) - (W_\gamma - 1) z_0 \right), \\ &x_2 = \frac{1}{W_\alpha} \left(K_\alpha \left(1 - \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \right) x_1 - \omega_1 y_1 + W_\alpha x_1 \right), \\ &y_2 = \frac{1}{W_\beta} \left(K_\beta \left(1 - \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \right) y_1 + \omega_2 x_1 + W_\beta y_1 \right), \\ &z_2 = -\frac{K_\gamma}{W_\gamma} \left(\sum_{i=1}^5 a_i \Delta \theta_{1,i} \exp \left(-\frac{\Delta \theta_{1,i}^2}{2b_i^2} \right) - (W_\gamma - 1) z_1 - A \sin(2\pi f\tau) \right), \\ &x_{k+1} = \frac{1}{W_\alpha} \left(K_\alpha \left(1 - \sqrt{x_k^2 + y_k^2} \right) x_k - \omega_1 y_k - W_\alpha \sum_{i=1}^{k-1} w_i^\alpha (x_{k-i+1} - x_{k-i}) + W_\alpha x_k \right), \\ &y_{k+1} = \frac{1}{W_\beta} \left(K_\beta \left(1 - \sqrt{x_k^2 + y_k^2} \right) y_k + \omega_2 x_k - W_\beta \sum_{i=1}^{k-1} w_i^\beta (y_{k-i+1} - y_{k-i}) + W_\beta y_k \right), \\ &z_{k+1} = -\frac{K_\gamma}{W_\gamma} \left(\sum_{i=1}^5 a_i \Delta \theta_{k,i} \exp \left(-\frac{\Delta \theta_{k,i}^2}{2b_i^2} \right) + W_\gamma \sum_{i=1}^{k-1} w_i^\gamma (z_{k-i+1} - z_{k-i}) - (W_\gamma - 1) z_k - z_{0,k} \right), \\ &z_{0,k} = A \sin(2\pi f k \tau), k = 2, \dots, N-1, \end{aligned} \right. \quad (6)$$

где $W_\alpha = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}$, $W_\beta = \frac{\tau^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}$, $W_\gamma = \frac{\tau^{-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)}$, a, b, c – заданные константы.

Замечание 5. Нелокальная явная конечно-разностная схема (6) является условно устойчивой и сходится с первым порядком.

Исследуем нелокальную явную конечно-разностную схему (6) с помощью правила Рунге или метода двойного пересчета [11]. Покажем, что порядок вычислительной точности стремится к теоретическому глобальному первому порядку. Для этого введем погрешности:

$$\xi_x^i = \max |x_i - x_{2i}|, \xi_y^i = \max |y_i - y_{2i}|, \xi_z^i = \max |z_i - z_{2i}|, \quad (7)$$

где $\xi_x^i, \xi_y^i, \xi_z^i$ – погрешность численной схемы (6), x_i, y_i, z_i – численное решение на шаге τ_i , x_{2i}, y_{2i}, z_{2i} – численное решение на шаге $\tau_i/2$. Вычислительная точность для p_x, p_y, p_z получена по формулам:

$$p_x = \log_2 \left(\frac{\xi_x^i}{\xi_x^{i+1}} \right), p_y = \log_2 \left(\frac{\xi_y^i}{\xi_y^{i+1}} \right), p_z = \log_2 \left(\frac{\xi_z^i}{\xi_z^{i+1}} \right). \quad (8)$$

Рассмотрим конкретные примеры оценки вычислительной точности схемы (6).

Пример 1. Классическая модель Макшерри: $\alpha = \beta = \gamma = 1$, $\omega = 1$, $t \in [0, 1]$, $x(0) = 0.1$, $y(0) \approx z(0) = 0.25$. Значения коэффициентов берутся из Таблицы 1. Результаты расчетов по формулам (7) и (8) приведены в Таблице 2.

Таблица 2 Классическая модель Макшерри ($\alpha = \beta = \gamma = 1$)

N	τ	ξ_x	ξ_y	ξ_z	p_x	p_y	p_z
10	1/10	0.0052	0.0022	0.119	-	-	-
20	1/20	0.0027	0.0013	0.079	0.960	0.723	0.588
40	1/40	0.0014	0.0007	0.042	0.984	0.872	0.912
80	1/80	0.000684	0.000379	0.021	0.993	0.939	0.947
160	1/160	0.000343	0.000193	0.011	0.997	0.970	0.972
320	1/320	0.000171	0.000098	0.006	0.998	0.985	0.992
640	1/640	0.000086	0.000049	0.003	0.999	0.993	0.994

Из табл. 2 мы видим, что компоненты вычислительной точности p_x, p_y, p_z при увеличении узлов расчетной сетки N стремятся к единице – теоретическому порядку точности схемы (6).

Пример 2. Дробная модель Макшерри: $\alpha = \beta = \gamma = 0.9$, $\Theta_\alpha = \Theta_\beta = \Theta_\gamma = 1$, $\omega = 1$, $x_0 = 0.1$, $y_0 = 0.15$, $z_0 = 0.2$, $t \in [0, 1]$ [4]. Остальные значения параметров берутся из предыдущего примера. Результаты расчетов по формулам (7) и (8) даны в Таблице 3.

Таблица 3 Дробная модель Макшерри ($\alpha = \beta = \gamma = 0.9$)

N	τ	ξ_x	ξ_y	ξ_z	p_x	p_y	p_z
10	1/10	0.0144371251	0.0115074024	0.503600131	-	-	-
20	1/20	0.0067895516	0.0080172059	0.248774354	1.09	0.52	1.02
40	1/40	0.0030783936	0.0047016043	0.122878255	1.14	0.77	1.02
80	1/80	0.0013872851	0.0025717057	0.060882958	1.15	0.87	1.01
160	1/160	0.0006151021	0.0013627082	0.029470865	1.17	0.92	1.05

Из табл.3 порядок вычислительной точности близок также как и в предыдущем примере к теоретическому порядку точности схемы (6).

Рассмотрим другой случай с различными значениями $\alpha = 0.7, \beta = 0.9, \gamma = 0.8$. Начальные условия $x_0 = y_0 = z_0 = 0.1$. Остальные параметры оставим без изменения.

Таблица 4 Дробная модель Макшерри ($\alpha = 0.7, \beta = 0.9, \gamma = 0.8$)

N	τ	ξ_x	ξ_y	ξ_z	p_x	p_y	p_z
10	1/10	0.02016857149	0.0119489053	0.7967764478	-	-	-
20	1/20	0.0097571621	0.0089602315	0.400408397	1.05	0.42	0.99
40	1/40	0.00452258504	0.0053449063	0.203770521	1.11	0.75	0.97
80	1/80	0.00208821022	0.0029059414	0.099717093	1.11	0.88	1.03
160	1/160	0.00094955496	0.0015108455	0.048324703	1.14	0.94	1.05

Из табл. 4 видно, что вычислительная точность при увеличении узлов расчетной сетки близка к единице. Далее отметим, что для x и z приемлемый результат достигается на втором шаге метода двойного пересчета. Для y на шестом шаге метода двойного пересчета.

В табл. 5 приведены результаты расчетов в случае, когда значения вспомогательных параметров дробной модели Макшерри различны (4): $\Theta_\alpha = 1.01, \Theta_\beta = 1.003, \Theta_\gamma = 1.005$. Значения остальных параметров взяты из предыдущего случая.

Таблица 5 Дробная модель Макшерри ($\alpha = 0.7, \beta = 0.9, \gamma = 0.8$)

N	τ	ξ_x	ξ_y	ξ_z	p_x	p_y	p_z
10	1/10	0.02008176435	0.0118650481	0.7928440013	-	-	-
20	1/20	0.0097215210	0.0089028878	0.395625307	1.05	0.41	0.99
40	1/40	0.0045059401	0.0053125856	0.199050036	1.11	0.74	1.1
80	1/80	0.00208046645	0.0028891554	0.092987021	1.11	0.88	1.1
160	1/160	0.00094598753	0.0015024784	0.039021183	1.13	0.94	1.2

Здесь также мы видим, что динамика сохраняется, глобальный порядок нелокальной явной конечно-разностной схемы является первым. Также можно заметить, что значения компонент вычислительной точности p_x и p_y , дают приемлемый результат уже на втором шаге метода двойного пересчета. В то же время, значения компоненты вычислительной точности $z(t)$ выходит на приемлемый результат после шестого шага метода двойного пересчета.

4 Результаты моделирования

Рассмотрим некоторые результаты моделирования в рамках дробной модели Макшерри (4) по численному алгоритму (6). Численный алгоритм (6) был реализован в системе компьютерной алгебры Maple с возможностью визуализации результатов моделирования [12]. Здесь важное значение имеет компонента $z(t)$. Как в классической модели Макшерри (1), так и в дробной модели Макшерри (4) она определяет PQRST-морфологию искусственной ЭКГ.

В случае, когда вспомогательные параметры в дробной модели Макшерри (4): $\Theta_\alpha = \Theta_\beta = \Theta_\gamma = 1$, а значения других параметров модели (4) $t \in [0, 50]$, $\omega = 1$, $A = 0.15$, $f = 0.25$ остальные значения взяты из Таблицы 1, количество узлов $N = 2000$ для расчетной сетки нелокальной явной конечно-разностной схемы (6). Начальные условия $x_0 = y_0 = z_0 = 1$. Результаты расчетов компоненты $z(t)$ приведены на рис.2.

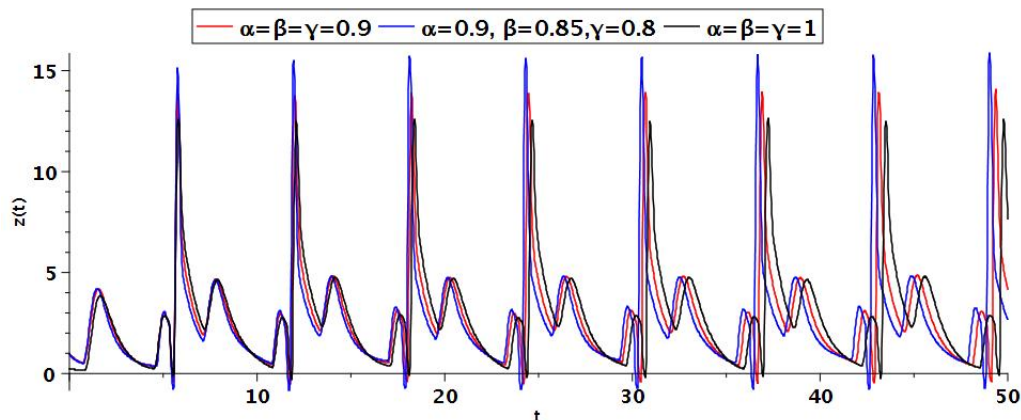


Рис. 2 Результаты моделирования при $\Theta_\alpha = \Theta_\beta = \Theta_\gamma = 1$.

На рис.2 представлена динамика компоненты $z(t)$ решения дробной модели Макшерри (4) при различных значениях порядков дробных производных α, β, γ . Случай, когда их значения соизмеримы (одинаковые) соответствует красной расчетной кривой, а случай когда они несоизмеримы – синей расчетной кривой. Также для сопоставления приведена расчетная кривая для классической модели Макшерри (1) – черная расчетная кривая. Мы видим, что PQIRST-морфология искусственной ЭКГ сохраняется для дробной модели Макшерри (4) при $\Theta_\alpha = \Theta_\beta = \Theta_\gamma = 1$. Это имеет важное практическое значение, что дает предпосылки для дальнейшего изучения дробной модели Макшерри.

Случай, когда значения вспомогательных параметров $\Theta_\alpha, \Theta_\beta, \Theta_\gamma$ различны для дробной модели Макшерри (4) приведен на рис.3.

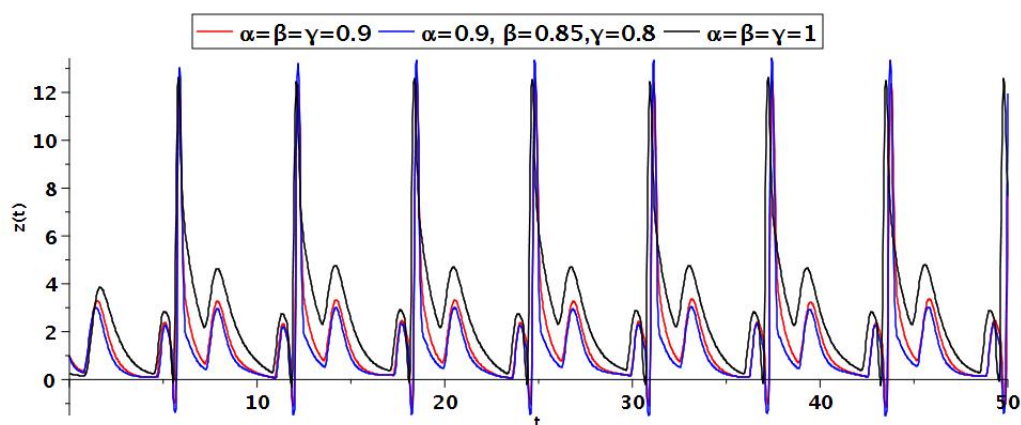


Рис. 3 Результаты моделирования при $\Theta_\alpha = 1.1, \Theta_\beta = 1.2, \Theta_\gamma = 1.25$.

На рис.3 приведены различные расчетные кривые компоненты $z(t)$ решения дробной модели Макшерри (4) при различных значениях порядков дробных производных. Здесь также как и на предыдущем рисунке мы видим сохранение PQIRST-морфология искусственной ЭКГ. Также видим некоторые изменения в расчетных кривых по сравнению с классической модели Макшерри (черная кривая). Эти изменения можно считать отклонениями от нормы, т.е. от показателей здорового че-

ловека. Поэтому значения дробных производных можно учитывать при разработки новой диагностики сердца.

5 Заключение

В дробной модели Макшерри предложено учитывать вспомогательные параметры $\Theta_\alpha, \Theta_\beta, \Theta_\gamma$, которые характеризуют некоторые времена, рассматриваемого процесса с наследственностью. С помощью нелокальной явной конечно-разностной схемы было получено численного решение при различных значениях параметров модели. Были построены графики решения и дана их интерпретация.

Кроме того, в статье было проведено исследование нелокальной явной конечно-разностной схемы. Подтверждено по правилу Рунге с помощью оценки порядка вычислительной точности численного алгоритма, что глобальный порядок точности, исследуемой схемы – первый.

Показано, что дробная математическая модель может быть применима для генерации искусственных ЭКГ.

Литература

- [1] *Hampton J., Hampton J.* The ECG Made Easy E-Book: The ECG Made Easy E-Book. – Elsevier, 2019. – 240 p.
- [2] *Schwartz P. J., Wolf S.* QT interval prolongation as predictor of sudden death in patients with myocardial infarction // *Circulation*. – 1978. – Vol. 57, No. 6. – P. 1074-1077.
- [3] *McSharry P.E. et al.* A dynamical model for generating synthetic electrocardiogram signals // *IEEE transactions on biomedical engineering*. – 2003. – Vol. 50, No. 3. – P. 289-294. – doi: <http://dx.doi.org/10.1109/TBME.2003.808805>.
- [4] *Алимов Х.Т., Дзамихова Ф.Х., Паровик Р.И.* Дробная математическая модель Макшерри // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. – 2023. – Т. 42, № 1. – С. 164-179. – doi: <http://dx.doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-164-179>.
- [5] *Volterra V.* Functional theory, integral and integro-differential equations. – New York: Dover, 2005. – 288 p.
- [6] *Учайкин В.В.* Метод дробных производных. – Ульяновск: Артишок, 2008. – 510 с.
- [7] *Марценюк В.П., Сарабун Р.О.* Исследование нелинейной динамики в модели МакШерри на основе экспонент Ляпунова // *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии*. – 2014. – № 2. – С. 57-61.
- [8] *Gomez-Aguilar J.F., Razo-Hernandez R., Granados-Lieberman D.* A physical interpretation of fractional calculus in observables terms: analysis of the fractional time constant and the transitory response // *Revista Mexicana de Física*. – 2014. – No. 60. – 3. 32-38.
- [9] *Герасимов А.Н.* Обобщение законов линейного деформирования и их применение к задачам внутреннего трения // *Прикладная математика и механика*. – 1948. – Т. 44, №6. – С. 62-78.
- [10] *Caputo M.* Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent - II // *Geophysical Journal International*. – 1967. – Vol. 13. – P. 529-539.
- [11] *Gavrilyuk I. et al.* Exact and truncated difference schemes for boundary value ODEs. – Basel: Springer, 2011. – 247 p.
- [12] *Thompson I.* Understanding Maple. – UK: Cambridge University Press, 2016. – 228 p.

Поступила в редакцию 21.04.2024

UDC 517.938

SOME ASPECTS OF NUMERICAL ANALYSIS OF THE FRACTIONAL MATHEMATICAL MCSHERRY MODEL FOR DESCRIBING AN ARTIFICIAL ECG*

^{1,2*} *Alimov Kh.T.*, ^{2,3} *Parovik R.I.*

*xtalimov820@gmail.com

¹Tashkent University of Information Technologies,
108, Amir Timur ave., Tashkent, 100084 Uzbekistan;

²National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek,
4, Universitetskaya str., Tashkent, 100174 Uzbekistan;

³Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS,
7, Mirnaya str., Paratunka, 684034 Russia.

The article examines McSherry's mathematical model, taking into account heredity, to describe artificial ECGs. The mathematical model consists of three ordinary nonlinear differential equations with derivatives of fractional orders in the Gerasimov-Caputo sense, for which local initial conditions are valid (Cauchy problem). The Cauchy problem is solved using a numerical method based on a nonlocal explicit finite-difference scheme of first order accuracy. The numerical algorithm was implemented in a computer program in the Maple language. Using Runge's rule, it is shown that the order of computational accuracy of the numerical algorithm tends to the theoretical order as the number of nodes of the computational grid increases. Using a computer program, the simulation results were visualized for various values of the orders of fractional derivatives. It is shown that the orders of fractional derivatives allow a more flexible description of the artificial ECG. It should be noted that the numerical method, which was used in the article, can be applied to a more general mathematical model when the orders of fractional derivatives are functions of time.

Keywords: McSherry model, ECG, fractional derivative, numerical algorithm, order of accuracy, Runge's rule.

Citation: Alimov Kh.T., Parovik R.I. 2024. Some aspects of numerical analysis of the fractional mathematical McSherry model for describing an artificial ECG. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 2(56): 7-16.

*The work was carried out within the framework of a framework agreement on cooperation for 2022-2027 between the Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS and the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek No. 1118 dated 04/28/2022.

HISOBLASH VA AMALIY МАТЕМАТИКА MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
PROBLEMS OF COMPUTATIONAL
AND APPLIED MATHEMATICS



ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 2(56) 2024

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Азамов А.А., Арипов М.М., Шадиметов Х.М.

Ответственный секретарь:

Ахмедов Д.Д.

Редакционный совет:

Азамова Н.А., Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Бурнашев В.Ф.,
Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия), Игнатьев Н.А.,
Ильин В.П. (Россия), Исмаилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия),
Карачик В.В. (Россия), Курбонов Н.М., Маматов Н.С., Мирзаев Н.М.,
Мирзаева Г.Р., Мухамадиев А.Ш., Назирова Э.Ш., Нормуродов Ч.Б.,
Нуралиев Ф.М., Опанасенко В.Н. (Украина), Расулмухамедов М.М., Расулов А.С.,
Садуллаева Ш.А., Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А.,
Хамдамов Р.Х., Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Чье Ен Ун (Россия),
Шабозов М.Ш. (Таджикистан), Dimov I. (Болгария), Li Y. (США),
Mascagni M. (США), Min A. (Германия), Schaumburg H. (Германия),
Singh D. (Южная Корея), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(99871) 263-41-98.

E-mail: journals@airi.uz.

Сайт: www.pvpm.uz.

Дизайн и компьютерная вёрстка:

Шарилов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 30.04.2024 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №2. Тираж 100 экз.

Содержание

Алимов Х.Т., Паровик Р.И.

Некоторые аспекты численного анализа дробной математической модели
Макшерри для описания искусственной ЭКГ 7

Халджигитов А.А., Адамбаев У.Э., Джумаёзов У.З., Хасанова З.З.

Новые модельные уравнения в деформациях для анизотропных тел 17

Нуралиев Ф.М., Султанов Б.Ж., Дауытова Ж.К.

Математическое моделирование процессов деформированного состояния сет-
чатых пластин со сложной формой 30

Равшанов Н., Таштемирова Н., Каршиев Д.А.

Моделирование процесса распространения аэрозольных частиц в погранич-
ном слое атмосферы с учетом их поглощения и захвата растительным по-
кровом 41

Назирова Э.Ш., Неъматов А., Исмаилов Ш., Артикбаева Г.

Математическое моделирование фильтрации газа с учетом изменения пори-
стости породы в зависимости от давления 58

Равшанов Н., Холматова И.И., Курбонов Н.М., Исламов Ю.Н.

Математическое моделирование процесса подземного выщелачивания с уче-
том изменения гидродинамических параметров пористой среды 72

Адылова Ф.Т., Давронов Р.Р.

Генеративный искусственный интеллект для разработки лекарств de novo:
новые рубежи в области молекул 85

Мадатов Х.А.

Математическая модель автоматического определения несущественных слов
текстов на узбекском языке 99

Сулюкова Л.Ф., Ёркулов Б.А.

Методика оценки имеющегося уровня информационной безопасности обра-
зовательной информационной системы 106